Esercitazioni di Geometria 1

Docente: Prof. S. Manfredini

Romualdo Vitale

4 dicembre 2015

Indice

Capitolo 1

Spazi vettoriali e applicazioni lineari

1.1 Esercizi del 21/10/2015

-da iniziare-

1.2 Esercizi del 22/10/2015

-da iniziare-

1.3 Esercizi del 28/10/2015

Osservazione Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato e $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Allora valgono i seguenti fatti:

1. $\dim W \leq \dim V$.
2. $\dim W = 0 \Leftrightarrow W = \{0\}$.
3. $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.
4. preso un altro $U \subseteq V$ sottospazio, se $\dim U = \dim W$ e $U \subseteq W$ allora $U = W$.

Le dimostrazioni sono lasciate al lettore per esercizio.

Osservazione Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, $U, W \subseteq V$ sottospazi, allora vale la seguente formula (*Formula di Grassmann*):

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Negli esercizi, date delle informazioni su tre di questi oggetti, stimeremo (o addirittura troveremo) il quarto.

Esercizio 1. Siano $W, U \subseteq \mathbb{R}^4$ sottospazi definiti come segue:

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Determinare $U + W$.

Soluzione. Possiamo procedere in due modi:

- scriviamo U in forma parametrica, ottenendo una lista di generatori di $U + W$ da cui estraggo una base;
- scriviamo W in forma cartesiana e studiamo $W \cap U$.

Procediamo nel secondo modo. Scriviamo la matrice così fatta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \operatorname{Im} L_A.$$

Un vettore $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ appartiene a W se e solo se il sistema $AY = X$ è risolubile.

Riduciamo a scalini la matrice $[A \mid X]$ (per semplicità riporto solo le operazioni svolte):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} R_3 = R_3 - R_1 \\ \hline R_4 = R_4 - R_1 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} R_3 = R_3 + 3R_2 \\ \hline R_4 = R_4 + 2R_2 \end{array}} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 + 3x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + 2x_2 \end{array}\right]$$

Affinché il sistema sia risolubile, nell'ultima colonna non devono esserci pivots.
La forma cartesiana di W è:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_3 - x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Di conseguenza abbiamo ottenuto un modo rapido per scrivere l'intersezione tra i due sottospazi:

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_3 - x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 \end{array} \right\},$$

dove le ultime due equazioni sono state ottenute da quelle del testo attraverso manipolazioni della matrice associata. Sostituendo quelle stesse equazioni nelle prime due si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 \\ x_3 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_4 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0.$$

Concludendo con la *Formula di Grassmann*:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4$$

anzi, mettendo insieme tutte le informazioni possiamo scrivere:

$$U \oplus W = \mathbb{R}^4.$$

Come anticipato all'inizio, avremmo potuto prendere le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

e sostituendo due coppie di valori arbitrari (per esempio prima $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$, poi $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$), avremmo ottenuto:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Per concludere, avremmo dovuto dimostrare che la matrice ottenuta affiancando quei quattro vettori avesse quattro pivots.

Esercizio 2. Siano W un insieme e B una matrice definiti come segue:

$$B \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \quad W \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

1. Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale.
2. Calcolare $\dim W$.

3. Determinare un supplementare di W.

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che $B^j \in W$ al variare di $j \in \mathbb{N}$ (anche l'identità è inclusa, perché $B^0 = I$).

1. Verifichiamo che W è un sottospazio di V:

   - $0_V \in W\colon \quad 0_V B = B 0_V = 0_V$ vero;

   - $\forall\, x, y \in W \quad x + y \in W\colon \quad (x+y)B = B(x+y) \Leftrightarrow xB + yB = Bx + By$ vero;

   - $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in W \quad \alpha x \in W\colon \quad xB = Bx \Rightarrow \alpha x B = \alpha B x \underset{\text{prop.assoc.}}{\Longrightarrow} (\alpha x)B = B(\alpha x)$ vero.

2. Vediamo che relazioni tra i coefficienti troviamo per una generica matrice $A \in W$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Invece di lavorare in $M(2, \mathbb{R})$, portiamo tutto in $\mathbb{R}^4$, perché i due spazi hanno la stessa dimensione e sono isomorfi. Utilizzo la base standard per il cambio di coordinate:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

da cui segue che:

$$A \in W \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = a + c \\ a = b + d \\ c - d = -a \\ c = -b \end{cases}.$$

Svolgendo i conti (ovvero assegnando valori arbitrari a b e a d) si arriva a:

$$[\quad]_{\mathcal{B}}(W) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} c = -b \\ a = b + d \end{array} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \dim W = 2.$$

Con l'isomorfismo al contrario $[\quad]_{\mathcal{B}}^{-1}$ in matrici riusciamo a trovare le due matrici che generano W:

$$W = \operatorname{Span}(I, B).$$

1.4 Esercizi del 29/10/2015

-da iniziare-

1.5 Esercizi del 04/11/2015

Esercizio 3. Siano $U,\ W \subseteq \mathbb{R}^3$, definiti come segue:

$$U \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \right\}$$

$$W \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \right\}$$

Determinare se esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che verifichi contemporaneamente le seguenti condizioni:

- $f(U) \subseteq W$;
- $f(W) \subseteq U$;
- $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;
- $\dim \ker f = 1$.

Soluzione. Innanzitutto scriviamo U e W in forma parametrica. Poiché essi sono sottospazi descritti da una sola equazione, avranno dim = 2 e saranno pertanto Span di due vettori. Infatti:

$$x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -x \\ z \end{bmatrix}$$

$$x - y + z = 0 \Leftrightarrow y = x + z \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ x+z \\ z \end{bmatrix}$$

Assegnando due coppie di valori arbitrari (generalmente 0 e 1 per la prima, 1 e 0 per la seconda) alle incognite si ottiene:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \qquad W = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Poiché il secondo vettore di U e il primo vettore di W sono linearmente indipendenti (verifica lasciata al lettore), dalla *Formula di Grassmann* ricaviamo la dimensione dell'intersezione:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

In particolare, dalle prime due richieste del testo segue:

$$f(U \cap W) \subseteq U \cap W$$

ovvero $U \cap W$ è **f-invariante**.

Attraverso queste informazioni sappiamo come scegliere una base di $\mathbb{R}^3$ su cui definire f: fissiamo una base dell'intersezione e la completiamo a base di U e di W; in questo modo otterremo tre vettori linearmente indipendenti di cui sarà semplice scrivere le immagini per rispettare le prime due richieste del problema.
Utilizzando la forma cartesiana, scriviamo l'intersezione come:

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Con l'*Algoritmo di completamento a base* otteniamo:

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Abbiamo ottenuto tre vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Rispettando le condizioni imposte dal problema, cerchiamo di vedere quali sono le immagini della base:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longmapsto \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $\lambda, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Questi parametri verranno fissati (se possibile) dalle altre condizioni del testo.

Costruiamo un terzo piano Z contenente un $v \in \mathbb{R}^3 \setminus (U \cap W)$ tale che $f(v) = v$ e $\ker f$[1] .
Notiamo che $v \notin \ker f$ perché $f(v) \neq 0$, pertanto possiamo scrivere:

$$Z = \ker f \oplus \operatorname{Span}(v)$$

[1]Posso porre questa condizione perché per esibire una f ho bisogno di un vettore v che viene mandato in se stesso.

per costruzione, $Z \neq U$ e $Z \neq W$, quindi per la *Formula di Grassmann* si ha:

$$\dim Z \cap U = 1 \quad \dim Z \cap W = 1.$$

Vediamo dove viene mandato Z da f:

$$f(Z) = f(\mathrm{Span}(v) \oplus \ker f) = \mathrm{Span}(v, 0) = \mathrm{Span}(v).$$

Ora controlliamo le intersezioni con U e W:

$$f(Z \cap U) \subseteq \mathrm{Span}(v) \cap W = \{0\} \Rightarrow Z \cap U \subseteq \ker f$$

$$f(Z \cap W) \subseteq \mathrm{Span}(v) \cap U = \{0\} \Rightarrow Z \cap W \subseteq \ker f$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$Z \cap U = \ker f \quad Z \cap W = \ker f$$

In definitiva si ha:

$$\ker f \subseteq (U \cap W) \Rightarrow \ker f = U \cap W \Rightarrow \lambda = 0.$$

ACHTUNG! La condizione $\lambda = 0$ NON garantisce che $\dim \ker f = 1$. Andranno scelti opportunamente i parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e controllata poi la dimensione del nucleo di f.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

da cui, applicando f ad ambo i membri, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 2a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ c+d \\ 2c+d \end{bmatrix}.$$

Infine, sommando componente a componente, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-c \\ a+c+d \\ 2a+b+2c+d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = d = 1 \\ a = -1-c \end{cases}.$$

Per concludere, basta fissare un valore di $a \in \mathbb{R}$ (per esempio $a = 1$), determinare il corrispettivo valore di c (in questo caso $c = 0$) e verificare che l'applicazione trovata soddisfi tutte le condizioni del testo.

1.6 Esercizi del 05/11/2015

Osservazione In generale, siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali finitamente generati. Allora:

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Cioè la dimensione è un **invariante** nella relazione di equivalenza ”essere isomorfi”.

Esercizio 4. Siano date V e $f_n \colon V \to \mathbb{R}^n$ definite come segue:

$$V \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = p(-x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$f_n(p) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ \vdots \\ p(n-1) \end{bmatrix}$$

1. Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[x]$ e che f_n è lineare.
2. Calcolare $\dim V$.
3. Per quali n f_n è iniettiva? Per quali è surgettiva? Per quali è un isomorfismo? Nell'ultimo caso, calcolare f^{-1}.

Soluzione. Dimostreremo solo gli ultimi due punti, lasciando il primo al lettore.

2. Vediamo come sono fatti i vettori in V. Dato $p \in V$:

$$p = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Per definizione di V, però:

$$b = d = 0$$

Pertanto $V = \mathrm{Span}(1, x^2, x^4)$, quindi $\dim V = 3$ (dato che sappiamo che quei tre vettori sono linearmente indipendenti, perché $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ è una base di $\mathbb{R}_4[x]$).

3. Preliminarmente possiamo notare che per la *Formula di Grassmann* si ha:

$$\dim \operatorname{Im} f_n = \dim V - \dim \ker f_n \leq \dim V = 3,$$

Dunque per ogni $n > 3$, f_n non può essere surgettiva.

Iniettività Possiamo lavorare su $\ker f_n$, infatti sappiamo che:

$$f_n \text{ iniettiva } \Leftrightarrow \ker f_n = \{0\} \tag{1.1}$$

Preso $p \in V$

$$\ker f_n = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(-1) = \cdots = p(n-1) = p(-n+1) = 0\} \tag{1.2}$$

quindi in totale ci sono $2(n-1)+1 = 2n-1$ radici. Poiché l'unico polinomio che ha più radici del suo grado è il polinomio nullo, possiamo calcolare per quali valori di n vale la disuguaglianza che garantisce l'iniettività:

$$2n - 1 > 4 \Rightarrow n \geq 3$$

Non resta che controllare a mano i casi $n = 1$ e $n = 2$.

- $n = 1 \Longrightarrow$ sostituendo nell'espressione (1.2), si ha

$$\ker f_1 = \{p \in V \mid p(0) = 0\}$$

pertanto p è della forma $p = x^2 q$, con $q \in U = \mathbb{R}_2[x] \cap \ker f_1$. Si nota che:

$$U = \operatorname{Span}(1, x^2), \text{ da cui segue che:}$$

$$\ker f_1 = x^2 \operatorname{Span}(1, x^2) = \operatorname{Span}(x^2, x^4)$$

Pertanto di sicuro contiene almeno due elementi, contro le condizioni di iniettività al punto (1.1).

- $n = 2 \Longrightarrow$ analogamente $\ker f_2 = \{p \in V \mid p(0) = p(1) = p(-1) = 0\}$, pertanto $\ker f_2 = \operatorname{Span}(x^2(x^2-1))$ e contiene anche $\{0\}$, contro le condizioni di iniettività al punto (1.1).

Possiamo concludere che f_n è iniettiva $\Leftrightarrow n \geq 3$.

Surgettività Preliminarmente abbiamo visto che f_n non può essere surgettiva $\forall\ n > 3$.
Nei casi in cui $n \leq 3$ per definizione di surgettività deve essere:

$$\dim \operatorname{Im} f_n = \dim \mathbb{R}^n = n$$

- $n = 3 \Rightarrow \dim \ker f_3 = \dim V - \dim \operatorname{Im} f_3 = 3 - 3 = 0$.
Inoltre, siccome $\dim \ker f_3 = 0$ allora f_3 è iniettiva e, in particolare, è un isomorfismo.
- $n = 2 \Rightarrow \dim \ker f_2 = \dim V - \dim \operatorname{Im} f_2 = 3 - 2 = 1$. Inoltre, poiché $\operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ allora è proprio $\operatorname{Im} f_2 \equiv \mathbb{R}^2$.
- $n = 1 \Rightarrow \dim \ker f_1 = \dim V - \dim \operatorname{Im} f_1 = 3 - 1 = 2$. Inoltre, poiché $\operatorname{Im} f_1 \subseteq \mathbb{R}$ allora è proprio $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}$

Pertanto f_n surgettiva $\Leftrightarrow n \leq 3$.

Esercizio 5. Siano $V \subseteq \mathbb{R}^5$ uno spazio vettoriale e $F_B \colon \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ una funzione definite come segue:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$F_B(A) \stackrel{\text{def}}{=} AB \text{ con } B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \text{ fissata}$$

1. Esibire una base di V e dimostrare che F_B è lineare.
2. Determinare, se esiste, una matrice B tale che $\operatorname{Im} F_B \cong V$.
3. Determinare per quali B esiste la funzione inversa F_B^{-1}.

Soluzione. Utilizzeremo alcuni metodi risolutivi visti a lezione.

1. Per trovare quali vettori di V sono linearmente indipendenti, scriviamo la matrice
$$C = [v_1 \mid \ \dots \ \mid v_5]$$
costruita affiancando i vettori colonna che generano V, la riduciamo a scalini e controlliamo le colonne contenenti i pivots. Quelle stesse colonne in C rappresenteranno i vettori linearmente indipendenti. Infatti:

$\dim V = \operatorname{rnk} C = \dim \operatorname{Span}(\mathcal{C}(A)) = \dim \operatorname{Span}(\mathcal{R}(A)) = \#$ pivots di una ridotta a scalini di C.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ la prima riga va benissimo per il primo pivot perché c'è un 1,}$$

quindi eseguiamo le operazioni sulle altre:

$$\begin{array}{|c|} \hline R_2 = R_2 - R_1 \\ \hline R_3 = R_3 - 2R_1 \\ \hline R_4 = R_4 + R_1 \\ \hline R_5 = R_5 + 2R_1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora notiamo che ci sono due sottomatrici 3×1 con gli stessi coefficienti, quindi diventeranno entrambe 0 in un solo passaggio algebrico, infatti:

$$\begin{array}{|c|} \hline R_3 = R_3 - R_2 \\ \hline R_4 = R_4 + R_2 \\ \hline R_5 = R_5 + 2R_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim V = 3.$$

I pivots si trovano nella prima, nella seconda e nella quarta colonna della ridotta a scalini, quindi $V = \operatorname{Span}(v_1, v_2, v_4)$.

2. Ora sappiamo che $\dim V = 3$, quindi:
$$\operatorname{Im} F_B \cong V \iff \operatorname{rnk} F_B = 3.$$
F_B è univocamente determinata non appena sono definite le immagini di una base di $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, quindi scriviamo una generica $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ e vediamo dove vengono mandati gli elementi della base standard:
$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\operatorname{Im} F_B = \operatorname{Span} \left\{ F_B \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), F_B \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), F_B \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), F_B \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$$
da cui, svolgendo i conti:
$$\operatorname{Im} F_B = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right\}.$$
Vogliamo determinare quanti di questi vettori sono linearmente indipendenti. Per farlo, prima di tutto trasformiamo le matrici in vettori di $\mathbb{R}^4$ tramite l'isomorfismo:
$$[\quad]_{\mathfrak{B}} : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix},$$
poi scriviamo la matrice $C = [v_1 \mid \ \dots \ \mid v_4]$, come fatto al punto 1:
$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^tB & 0 \\ \hline 0 & {}^tB \end{array} \right]$$

Abbiamo ottenuto una matrice a blocchi che dipende da ${}^tB$. Poiché per ridurre a scalini C utilizziamo le stesse operazioni sia per il blocco superiore sia per quello inferiore,

$$\operatorname{rnk} C = 2 \cdot \operatorname{rnk}^t B = 2 \cdot \operatorname{rnk} B,$$

che è un numero pari, quindi di sicuro è diverso da 3. La risposta è *no*.

3. Condizione necessaria e sufficiente è che B sia invertibile, quindi

$$\text{se } \operatorname{rnk} B = 2 \text{ allora esiste una e una sola } F_B^{-1}(D) = DB^{-1}.$$

Esercizio 6. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ stabilire se A è invertibile e, in tal caso, calcolare A^{-1}.

Soluzione. In generale, per trovare l'inversa di una matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ possiamo ridurre a scalini $[A \mid I]$, ovvero la matrice ottenuta affiancando A alla matrice identica di dimensione $n \times n$ fino ad ottenere, se possibile (ovvero se $\operatorname{rnk} A = n$) la matrice $[I \mid B]$.
L'inversa cercata sarà proprio B.[2]

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

da cui, con diversi passaggi algebrici, si arriva a:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I \mid B].$$

Ora basta verificare moltiplicando la matrice B trovata per A sia a destra sia a sinistra.

1.7 Esercizi del 11/11/2015

Osservazione Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati. Siano:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base di } V \quad \text{ovvero } \dim V = n,$$

$$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\} \text{ base di } W \quad \text{ovvero } \dim W = m,$$

allora si definisce la *matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$*:

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}),$$

tale che per ogni $v \in V$ si ha:

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = A\,[v]_{\mathcal{B}}\,.$$

Possiamo rappresentare la situazione con un *diagramma commutativo*:
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & W \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{C}}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Poiché tutte le funzioni del diagramma sono isomorfismi, valgono le seguenti relazioni:

$$\ker L_A = [\quad]_{\mathcal{B}}(\ker f),$$

$$\operatorname{Im} L_A = [\quad]_{\mathcal{C}}(\operatorname{Im} f).$$

L'utilità pratica consiste nel poter trasformare le applicazioni lineari in matrici.

Esercizio 7. Sia $f : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_[x]$ definita come segue:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{\longmapsto} [a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})]x^2 + [a_{11} + a_{12} - (a_{21} + a_{22})]x + a_{11} + a_{21} - (a_{12} + a_{22}).$$

1. Dire se f è iniettiva e/o surgettiva.
2. Determinare $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

Soluzione. Utilizziamo l'osservazione scritta sopra.

[2] In realtà in questo modo troviamo un'inversa sinistra, ma possiamo dimostrare che è anche inversa destra e, quindi, inversa.

1. Preliminarmente possiamo affermare che f non è iniettiva, infatti:
$$\dim \mathcal{M}(2,\mathbb{R}) > \dim \mathbb{R}_2[x].$$
Possiamo utilizzare una matrice associata fissando una base in partenza e una in arrivo. Prendiamo le due basi standard:
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ 1, x, x^2 \right\}.$$
Costruiamo la matrice A. La k-esima colonna di A sarà così fatta:
$$A^k = [f(v_k)]_{\mathcal{C}}, \qquad \text{ovvero:}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto x^2+x+1 \Rightarrow \left[x^2+x+1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto -x^2+x-1 \Rightarrow \left[-x^2+x-1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto -x^2-x+1 \Rightarrow \left[-x^2-x+1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto x^2-x-1 \Rightarrow \left[x^2-x-1\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Gli ultimi vettori ottenuti sono le colonne che formano A.
$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Non resta che ridurre a scalini la matrice A per calcolarne il rango:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} L_A = \operatorname{rnk} f = 3$$
Da cui segue che f è surgettiva e che $\dim \ker f = 1$.

2. Basandoci sulla posizione dei pivots nella matrice ridotta a scalini, riusciamo a determinare una base di $\operatorname{Im} f$ scritta in coordinate di $\mathbb{K}^3$:[3]
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$
da cui con l'isomorfismo al contrario otteniamo:
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left(x^2+x+1, -x^2+x-1, -x^2-x+1\right).$$
Caratterizziamo $\ker f$ partendo da $\ker L_A$:
$$\ker L_A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x-y+z-t=0 \\ 2y-2z=0 \\ -2z+2t=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x=y=z=t \Leftrightarrow \ker L_A = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$
Non resta che tornare indietro applicando l'isomorfismo al contrario. Si ottiene:
$$\ker f = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Poiché la scelta delle basi non è unica, è possibile che ci siano basi più comode su cui lavorare. Viene lasciata al lettore la verifica che prendendo i sottoinsiemi:
$$\mathfrak{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ e}$$
$$\mathfrak{C}' = \left\{ x^2+x+1, x+1, 1 \right\}$$
si ottengono delle basi con le quali i conti sono più semplici.

[3] Si noti che scritta in coordinate essa non rappresenta una base di $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}_2[x]$, che è un sottospazio costituito da polinomi.

1.8 Esercizi del 12/11/2015

Esercizio 8. Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $U \subseteq V$ e $Z \subseteq W$ sottospazi. Sia inoltre:

$$T \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \operatorname{Hom}(V,W) \;\middle|\; \begin{array}{l} \ker f \supseteq U \\ \operatorname{Im} f \supseteq Z \end{array} \right\}.$$

1. Dimostrare che T è un sottospazio vettoriale.
2. Calcolare $\dim T$.

Soluzione. La verifica che T è un sottospazio viene lasciata al lettore.

2. Una volta fissate $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{C}$ base di W possiamo utilizzare un isomorfismo con lo spazio delle matrici, così definito:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \colon \operatorname{Hom}(V,W) &\to \mathcal{M}(m,n,\mathbb{K}) \\ g &\mapsto \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f). \end{aligned}$$

In particolare si ha:

$$\dim T = \dim \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T),$$

pertanto possiamo lavorare con la *matrice associata*.
Scegliamo $\mathcal{B}$ partendo da una base di U e completandola a base di V; analogamente per $\mathcal{C}$ partiamo da una base di Z e la completiamo a base di W:

$$\{u_1,\dots,u_h\} \text{ base di } U \text{ completata a } \mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_h,v_{h+1},\dots,v_n\} \text{ base di } V,$$

$$\{z_1,\dots,z_k\} \text{ base di } Z \text{ completata a } \mathcal{C} = \{z_1,\dots,z_k,w_{k+1},\dots,w_m\} \text{ base di } W.$$

Fissata una $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$, per vedere com'è fatta la sua matrice associata dobbiamo applicare f ai vettori di B e scrivere le immagini ottenute come combinazioni lineari dei vettori della base C. Notiamo che, per le ipotesi del problema:

- $f(u_1) = \dots = f(u_h) = 0$.
- $f(v_{h+1}),\dots,f(v_n) \in Z$.

Sulla base di queste informazioni possiamo rappresentare la matrice associata:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \text{ dove } A \in \mathcal{M}(k, n-h, \mathbb{K}).$$

Abbiamo dimostrato che:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) \subseteq H = \left\{ M \in \mathcal{M}(m,n,\mathbb{K}) \;\middle|\; \exists\, A \in \mathcal{M}(k,n-h,\mathbb{K}) \colon \mathcal{M} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

se valesse anche l'altra inclusione, in particolare varrebbe l'uguaglianza, da cui sarebbe facile calcolare la dimensione cercata.
Verifichiamo se funziona. La tesi è:

$$f \in \operatorname{Hom}(V,W) \;:\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in H \Rightarrow f \in T.$$

Sfruttiamo la relazione che caratterizza il diagramma commutativo:

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = A[V]_{\mathcal{B}} \tag{1.3}$$

controllando le due proprietà di T, tenendo presente che il vettore j-esimo della base $\mathcal{B}$ viene mandato dal passaggio in coordinate nel vettore e_j, si ha:

- $\forall\ i [f(u_i)]_{\mathcal{C}} \overset{(1.3)}{=} \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] e_i = 0$, poiché le prime h colonne della matrice sono nulle. Pertanto la condizione $\ker f \subseteq U$ è rispettata.
- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(u_1),\dots,f(u_h),f(v_{h+1}),\dots,f(v_n)) = \operatorname{Span}(f(v_{h+1},\dots,f(v_n))$,
dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'aver appena dimostrato che la base di U viene mandata nel nucleo di f. Pertanto, sfruttando la relazione (1.3):

$$\forall\ l \quad [f(v_{h+i})]_{\mathcal{C}} \overset{(1.3)}{=} \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] e_{h+l} = \left[\begin{array}{c} A^l \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right].$$

Poiché le uniche componenti che danno contributo sono le prime k, che nella base $\mathcal{C}$ corrispondono ai vettori base di Z, concludiamo che $Z \subseteq \operatorname{Im} f$.

In definitiva:
$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) = H = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] | A \in \mathcal{M}(k, n-h, \mathbb{K}) \right\}.$$
Non resta che presentare una base di H (semplice esercizio lasciato al lettore).
$$\dim T = \dim H = k(n-h) = \dim Z(\dim V - \dim U).$$

Esercizio 9. Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, definiamo:
$$T_1 \overset{\text{def}}{=} \{ f \in \operatorname{Hom}(V, W) \,|\, f(U) \subseteq Z \}.$$

1. Dimostrare che T_1 è un sottospazio vettoriale.
2. Calcolare $\dim T_1$.

Soluzione. -da fare-

Esercizio 10. Sulla linea dei due esercizi precedenti, siano $U_1, U_2 \subseteq V$ e $Z_1, Z_2 \subseteq W$ sottospazi, T_2 un insieme definito come segue:
$$T_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in \operatorname{Hom}(V, W) \,\middle|\, \begin{array}{l} f(U_1) \subseteq Z_1 \\ f(U_2) \subseteq Z_2 \end{array} \right\}.$$

1. Dimostrare che T è un sottospazio vettoriale.
2. Calcolare $\dim T$.

Osservazione Si noti che dalle due condizioni del testo ne scaturisce forzatamente una terza:
$$f \in T_2 \Longrightarrow f(U_1 \cap U_2) \subseteq Z_1 \cap Z_2 \text{ anzi } f(U_1 + U_2) \subseteq Z_1 + Z_2.$$

Soluzione. La soluzione è lasciata al lettore per esercizio.

Esercizio 11. Esercizio di verifica della relazione dei diagrammi commutativi.

Esercizio 12. Siano date due matrici $A_\lambda,\ B \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ così definite:
$$A_\lambda \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $B \underset{\text{SD}}{=} A_\lambda$? In tal caso, esibire le matrici.

1.9 Esercizi del 18/11/2015

Esercizio 13. Definiamo il *centro del gruppo* delle matrici quadrate:
$$C_{\mathcal{M}(n,\mathbb{K})} \overset{\text{def}}{=} \{ A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \,|\, AB = BA \quad \forall\, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \}.$$

1. Dimostrare che $C_{\mathcal{M}(n,\mathbb{K})}$ è un sottospazio vettoriale.
2. Dimostrare che $C_{\mathcal{M}(n,\mathbb{K})} = \operatorname{Span} I$.

Soluzione. Il primo punto è una semplice verifica lasciata al lettore.

2. L'inclusione $\supseteq$ è ovvia.
Presa $A \in C_{\mathcal{M}(n,\mathbb{K})}$, considero l'applicazione lineare associata L_A. Si ha:
$$L_A \circ L_B = L_B \circ L_A \quad \forall\, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}).$$
Poiché l'applicazione $f_L \colon \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \to \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ che associa ad ogni matrice B la sua L_B è surgettiva, possiamo scrivere:
$$L_A \circ f = f \circ L_A \quad \forall\, f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n),$$
ovvero L_A commuta con tutti gli endomorfismi di $\mathbb{K}^n$.
Scegliendo opportunamente delle f, possiamo ricavare le informazioni cercate.
Presa una $f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n$ e un $v \in \ker f$, allora per definizione di centro si ha:
$$L_A(f(v)) = f(L_A(v) \Leftrightarrow L_A(v) \in \ker f$$
Pertanto, poiché questa proprietà non dipende dalla scelta di v, possiamo scrivere:
$$L_A(\ker f) \subseteq \ker f,$$

ovvero $\ker f$ è L_A*-invariante*.
Fissato un $w \in \mathbb{K}^n$, $w \neq 0$, esiste almeno una $f \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ tale che $\ker f = \mathrm{Span}(w)$. Dimostriamo questo fatto:
Presa $\{w, w_2, \dots, w_n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ ottenuta completando a base a partire da w, allora esiste un'unica $h \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ tale che:

$$h(w) = 0, \quad h(w_2) = w_2, \dots, h(w_n) = w_n.$$

Con una funzione così fatta, poiché $w \in \ker f$ allora anche $\mathrm{Span}(w) \subseteq \ker f$. Per la formula delle dimensioni, tenendo conto che:

$$\dim \mathrm{Im}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rnk}\, f = \dim \mathrm{Span}(h(w_2), \dots, h(w_n)) = \mathrm{Span}(w_2, \dots, w_n) = n - 1,$$

segue che $\dim \ker h = 1 = \dim \mathrm{Span}(w)$, cioè $\mathrm{Span}(w) = \ker f$.
Avendo dimostrato ciò, possiamo scrivere:

$$\forall\, w \in \mathbb{K}^n \quad \exists\, \lambda_w \in \mathbb{K} \colon L_A(w) = \lambda_w w,$$

ovvero tutte le rette in $\mathbb{K}^n$ sono L_A*-invarianti.* Non resta che controllare se ci sono relazioni tra i vari λ_w. Presi $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti, per quanto appena detto si ha:

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{K} \colon L_A(v_1) = \lambda_1 v_1,$$

$$\exists \lambda_2 \in \mathbb{K} \colon L_A(v_2) = \lambda_2 v_2.$$

Presa la base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ ottenuta completando a base l'insieme $\{v_1, v_2\}$, esiste un'unica $g \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ tale che:

$$g(v_1) = v_2,\ g(v_2) = v_1,\ g(v_3) = 0,\ \dots\ , g(v_n) = 0.$$

Per la commutatività del centro, si ha:

$$L_A(g(v_1)) = g(L_A(v_1)) \Leftrightarrow L_A(v_2) = g(\lambda_1 v_1) \Leftrightarrow \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_2 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0,$$

ma $v_2 \neq 0$, quindi: $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2$.
Pertanto su tutte le rette i λ sono uguali, cioè:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \colon \forall\, w \in \mathbb{K}^n L_A(w) = \lambda w \Rightarrow L_A = \lambda \underset{\mathbb{K}^n}{\mathrm{Id}} \Rightarrow A = \lambda I.$$

È possibile fornire una dimostrazione algebrica per questo esercizio.

-da completare-

1.10 Esercizi del 19/11/2015 mancanti

-Cerco gli appunti di quella lezione-

1.11 Esercizi del 25/11/2015

-Servono quelli del 19/11/2015 per questa lezione-

Capitolo 2

Spazi affini

2.1 Esercizi del 05/11/2015

Esercizio 14. - da iniziare -

Capitolo 3

Spazi duali

3.1 Esercizi del 25/11/2015

Osservazione Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora si definisce *spazio duale*:

$$V^* = Hom(V, \mathbb{K}).$$

Sebbene non esista un *isomorfismo canonico* tra V e V^*, possiamo scrivere:

$$\dim(V^*) = \dim V = n.$$

Presa $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, allora esistono unici $f_1, \dots, f_n \in V^*$ tali che:

$$\forall\ i, j = 1, \dots, n \quad f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } I = j \end{cases},$$

dove la funzione δ_{ij} è detta *delta di Kronecker*.
L'insieme così fatto:

$$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$$

è una base di V^* e si definisce *base duale di* $\mathcal{B}$.

Esercizio 15. Sia $V = \mathbb{R}^3$ spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vettori così fissati:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Calcolare $\mathcal{B}^*$, ovvero la base duale di $\mathcal{B}$.
3. Presa $f \in V^*$ definita come:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) \overset{\text{def}}{=} 2x - y + z,$$

calcolare $[f]_{\mathcal{B}^*}$.

Soluzione. Utilizziamo le informazioni dell'osservazione precedente.

1. Per dimostrare che $\mathcal{B}$ sia effettivamente una base, possiamo scrivere la matrice così fatta:

$$A = [\ v_1 \mid v_2 \mid v_3\ ],$$

ne calcoliamo il determinante e controlliamo se è diverso da 0. In tal caso, la matrice A sarà invertibile e quindi effettivamente $\mathcal{B}$ sarà una base di $\mathbb{R}^3$. Si possono produrre alcuni zeri nella matrice attraverso semplici manipolazioni algebriche. Il calcolo viene lasciato per esercizio al lettore, mentre il risultato è $\det A = -3 \neq 0$.

2. Dobbiamo determinare i *funzionali lineari* di $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = ax + by + cz, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Non resta che determinare a, b, c ricorrendo al delta di Kronecker:

$$\begin{aligned} f_1(v_1) = 1 &\iff a - b + 2c = 1 \\ f_1(v_2) = 0 &\iff a + 2b - c = 0 \\ f_1(v_3) = 0 &\iff a - b + c = 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere scritte sotto forma matriciale in modo più compatto, ossia:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det A = \det^t A = -3$, il sistema avrà soluzione unica. I valori di a, b, c possono essere calcolati con la *regola di Cramer*:

$$a = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$c = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot (-3) = 1$$

Se iteriamo lo stesso procedimento anche per determinare f_2 e f_3, notiamo che l'unica differenza sta nella colonna dei termini noti. Pertanto possiamo agevolmente determinare le scritture di questi tre funzionali:

$$f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + z$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \frac{x+y}{3}$$

$$f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x - y - z$$

Viene lasciata come verifica al lettore che effettivamente $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ costituisce una base (è sufficiente calcolare il determinante della matrice associata).

3. Come per trovare le coordinate di un vettore di V nella base $\mathcal{B}$ scriviamo una combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 e risolviamo il sistema, ad esempio:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

così per trovare le coordinate di un funzionale di V^* nella base $\mathcal{B}^*$ scriviamo una combinazione lineare di f_1, f_2, f_3, ottenendo:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3.2 Esercizi del 26/11/2015

Esercizio 16. Sia $V = \mathbb{R}_k[x]$ con $k \in \mathbb{N}$ uno spazio vettoriale e per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $val_a \in V^*$ un'applicazione così definita:

$$val_a(p) \stackrel{\text{def}}{=} p(a).$$

Determinare $\operatorname{Span}(\{val_a \mid a \in \mathbb{R}\})$.

Soluzione. Possiamo dimostrare che, presi $a_1, \ldots, a_h \in \mathbb{R}$, con $1 \leq h \leq k+1$ si ha:

$$val_{a_1}, \ldots, val_{a_h} \text{ sono linearmente indipendenti} \iff a_1, \ldots, a_h \text{ sono a due a due distinti.}$$

Fatto ciò, per concludere bisognerà esibire degli $a_1, \ldots, a_{k+1}$ e mostrare che le valutazioni loro associate costituiscono una base di V^*.

$(\Rightarrow)$ Supponiamo per assurdo che esistano $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i, j \leq k+1$ tali che $a_i = a_j$. Allora si avrebbe $val_{a_i} = val_{a_j}$, cioè esisterebbero almeno due valutazioni linearmente dipendenti, contro l'ipotesi.

$(\Leftarrow)$ Prese $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^k\}$ base di V e $\mathcal{B}' = \{1\}$ base di $\mathbb{R}$, la matrice del cambiamento di base:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \colon V^* &\to \mathcal{M}(1, k+1, \mathbb{R}) \\ val_a &\mapsto (1, a, \ldots, a^k) \end{aligned}$$

fissato $a \in \mathbb{R}$ è un isomorfismo. In particolare, la tesi è equivalente a dimostrare che le matrici associate alle valutazioni degli a_i sono linearmente indipendenti.
Per fare ciò dobbiamo calcolare il rango di una matrice così fatta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_h \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \dots & a_h^k \end{bmatrix}}_{A}$$

Cerchiamo un minore di A invertibile. Scegliamo quello formato dalle prime h righe e colonne:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_h \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^h & \dots & a_h^h \end{bmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j) \neq 0$$

perché è il *determinante di una matrice di Vandermonde.* Pertanto $\operatorname{rnk} A \geq h$, anzi $\operatorname{rnk} A = h$ perché A ha esattamente h colonne, da cui segue che $val_{a_1}, \dots, val_{a_h}$ sono linearmente indipendenti. Una base di V^* per esempio è $\{val_0, \dots, val_k\}$, quindi in conclusione si ha:

$$\operatorname{Span}(\{val_a \mid a \in \mathbb{R}\}) = V^*$$

> **Osservazione** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato con $\dim V = n$. Presa $f \in V^*$, si ha:
> $$\dim \ker f = \begin{cases} n & \text{se } f \equiv 0, \text{ cioè } \ker f = V \\ n-1 & \text{se } f \not\equiv 0, \text{ cioè } \ker f \text{ è un iperpiano.} \end{cases}$$

Esercizio 17. Dimostrare che, prese $f, g \in V^*$ si ha:

$$\ker f \supseteq \ker g \quad \iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\; t.c.\; f = \lambda g.$$

Soluzione. Questo risultato verrà generalizzato nell'esercizio seguente. $(\Leftarrow)$ per ogni $v \in \ker g$ si ha: $f(v) = \lambda g(v) = 0$.
$(\Rightarrow)$ Se $f = 0$, allora basta prendere $\lambda = 0$. Supponiamo pertanto $f \neq 0$. Per l'osservazione precedente, si ha:

$$\dim \ker f = n - 1 \overset{\text{per Hp.}}{\Longrightarrow} \dim \ker g = n - 1 \overset{\text{stessa dim } + \supseteq}{\Longrightarrow} \ker f = \ker g.$$

Non resta che determinare λ. Per farlo, fissiamo:

$$\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \text{ base di } \ker f \ (\ker g)$$

$$\text{e la completiamo a } \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} \text{ base di } V.$$

Per costruzione, si ha:

$$f(v_i) = g(v_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, (n-1)$$
$$f(v_n) \neq 0, g(v_n) \neq 0.$$

Prendiamo allora:

$$\lambda = \frac{f(v_n)}{g(v_n)} \neq 0,$$

con questo valore le due funzioni f e g coincidono su una base, quindi $f = \lambda g$.

> **Osservazione** Siano $f, g \in V^*$. Allora si ha:
> $$\ker f = \ker g \Leftrightarrow \begin{cases} f = g = 0 \\ f, g \neq 0 \text{ che è il caso appena visto, cioè esiste } \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda \neq 0\ t.c.\ f = \lambda g. \end{cases}$$

Esercizio 18. Prese $f, g \in V^*$, le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

- f e g sono linearmente indipendenti.
- $f, g \neq 0$ e $\ker f \neq \ker g$.
- $\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2$.

Soluzione. La dimostrazione viene lasciata per esercizio al lettore. L'idea consiste nel considerare $W, U \subseteq V$ sottospazi vettoriali con $\dim W = \dim U = n-1$. Allora ci sono due casi per l'intersezione:

$$\dim(U \cap W) = \begin{cases} \dim U & \text{se } U \subseteq W \\ \dim U - 1 & \text{se } U \not\subseteq W \end{cases}$$

da cui si conclude utilizzando la Formula di Grassmann e il fatto che la somma dei due sottospazi è:

$$U + W = \begin{cases} W & \text{se} \quad U \subseteq W \\ V & \text{se} \quad U \not\subseteq W \end{cases}$$

Osservazione In generale, presi $f_1, \dots, f_h \in V^*$, si ha:

$$f_1, \dots, f_h \text{ sono linearmente indipendenti } \Leftrightarrow \dim(\ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_h) = \dim V - h.$$

Inoltre, detta $\dim V = n$, possiamo applicare il risultato precedente nel caso di una base:

$$f_1, \dots, f_n \text{ è una base di } V^* \;\Leftrightarrow\; \dim(\ker f_1 \cap \dots \ker f_n) = 0.$$

Osservazione Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato con $\dim V = n$ e sia $Y \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Si definisce *annullatore di* Y l'insieme così fatto (le seguenti scritture sono equivalenti):

$$\begin{aligned} \operatorname{Ann}(Y) &= \{f \in V^* \mid \forall\, v \in Y \ f(v) = 0\} \\ &= \{f \in V^* \mid f(Y) = \{0\}\} \\ &= \{f \in V^* \mid f \in V^* \mid \ker f \supseteq Y\}. \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà (che richiameremo nei prossimi esercizi):

1. $\operatorname{Ann}(Y)$ è un sottospazio vettoriale di V^*.
2. $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq V \Rightarrow \operatorname{Ann}(Y_1) \supseteq \operatorname{Ann}(Y_2)$.
3. $\operatorname{Ann}(Y) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Span}(Y))$.
4. $W \subseteq V$ spazio vettoriale $\Rightarrow \dim \operatorname{Ann}(W) = \dim V - \dim W$.
5. $\forall\, f \in V^* \quad \operatorname{Ann}(\ker f) = \operatorname{Span}(f)$, infatti:

$$\begin{cases} f = 0 \Rightarrow \ker f = V \Rightarrow \operatorname{Ann}(V) = \{0\} \\ f \neq 0 \Rightarrow \dim \ker f = n-1 \Rightarrow \dim \operatorname{Ann}(\ker f) = 1 \text{ da cui segue la tesi.} \end{cases}$$

Esercizio 19. Siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali.

1. $\operatorname{Ann}(U+W) = \operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W)$.
2. $\operatorname{Ann}(U \cap W) = \operatorname{Ann}(U) + \operatorname{Ann}(W)$.

Soluzione. In questo esercizio dimostreremo che l'annullatore "scambia" l'intersezione con la somma.

1. $(\subseteq)\quad U, W \subseteq U+W \overset{\text{prop. 2}}{\Rightarrow} \begin{matrix} \operatorname{Ann}(U) \supseteq \operatorname{Ann}(U+W) \\ \operatorname{Ann}(W) \supseteq \operatorname{Ann}(U+W) \end{matrix} \Rightarrow \operatorname{Ann}(U+W) \subseteq \operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W)$.

   $(\supseteq)\quad f \in \operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W) \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \begin{matrix} f(U) = \{0\} \\ f(W) = \{0\} \end{matrix} \Rightarrow f(U+W) \overset{\text{f lin.}}{=} f(U) + f(W) = \{0\}$
   $\Rightarrow f \in \operatorname{Ann}(U+W) \Rightarrow \operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W) \subseteq \operatorname{Ann}(U+W)$.

2. $(\subseteq)\quad \begin{matrix} U \cap W \subseteq U \\ U \cap W \subseteq W \end{matrix} \overset{\text{prop.2}}{\Rightarrow} \begin{matrix} \operatorname{Ann}(U \cap W) \supseteq \operatorname{Ann}(U) \\ \operatorname{Ann}(U \cap W) \supseteq \operatorname{Ann}(W) \end{matrix} \overset{\text{è ssp.}}{\Rightarrow} \operatorname{Ann}(U) + \operatorname{Ann}(W) \subseteq \operatorname{Ann}(U \cap W)$.

   $(\supseteq)$ dimostriamo che i due oggetti hanno la stessa dimensione e concludiamo con la relazione di contenimento appena trovata:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ann}(U) + \operatorname{Ann}(W)) &\overset{\text{Grassmann}}{=} \dim \operatorname{Ann}(U) + \dim \operatorname{Ann}(W) - \dim(\operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W)) \\ &\overset{\text{prop.4+pt.1}}{=} (\dim V - \dim U) + (\dim V - \dim W) - \dim(\operatorname{Ann}(U+W)) \\ &\overset{\text{prop.4}}{=} 2\dim V - \dim U - \dim W - (\dim V - \dim(U+W)) \\ &= \dim V - (\dim U + \dim V - \dim(U+W)) \\ &\overset{\text{Grassmann}}{=} \dim V - \dim(U \cap W) \\ &\overset{\text{prop.4}}{=} \dim \operatorname{Ann}(U \cap W). \end{aligned}$$

Osservazione In generale, preso $Z \subseteq V^*$ sottospazio vettoriale, si ha:

$$Z = \operatorname{Ann}\left(\bigcap_{f \in Z} \ker f\right)$$

infatti, per l'osservazione precedente, presi $f_1, \dots, f_k$ generatori di Z^1, si ha:

$$\operatorname{Ann}\left(\bigcap_{f \in Z} \ker f\right) = \operatorname{Ann}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i\right) = \operatorname{Ann}(\ker f_1) + \dots + \operatorname{Ann}(\ker f_k) = \operatorname{Span} f_1 + \dots \operatorname{Span} f_k =$$

$$= \operatorname{Span}(f_1, \dots, f_k) = Z.$$

- da completare -

3.3 Esercizi del 02/12/2015

Esercizio 20. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n finita, $U \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. Presa $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di U, costruire una base per $\operatorname{Ann}(U)$.

Soluzione. Con l'algoritmo di completamento a base otteniamo:

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \text{ base di } V$$

$$\text{e } \mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\} \text{ base di } V^*, \text{ duale di } \mathcal{B}.$$

Vogliamo dimostrare che:

$$\mathcal{B}' = \{f_{k+1}, \dots, f_n\} \text{ è una base di } \operatorname{Ann}(U).$$

Di sicuro gli elementi di $\mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti perché fanno parte di una base, inoltre sono di numero giusto perché $\dim \operatorname{Ann}(U) = n - k$.
Non resta che dimostrare $\mathcal{B}' \subseteq \operatorname{Ann}(U)$. Per farlo, possiamo sfruttare la definizione di annullatore, esibendo una base di U che gli elementi di $\mathcal{B}'$ annullano.

$$f_i(v_j) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{con } i = k+1, \dots, n \\ \text{con } j = 1, \dots, k \end{array} \quad \Rightarrow \forall\ i = k+1, \dots, n \quad f_i(U) = \{0\} \Rightarrow f_i \in \operatorname{Ann}(U).$$

Osservazione Cambiare il completamento a base di V cambia di conseguenza anche $\operatorname{Ann}(U)$.

Osservazione Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Si definisce *trasposta di f* l'applicazione così fatta:

$$\begin{aligned} {}^t f \colon W^* &\to V^* \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà (che verificheremo nel prossimo esercizio):

1. ${}^t f$ è lineare (cioè ${}^t f \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$).
2. $\ker {}^t f = \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f)$.
3. $\operatorname{Im} {}^t f = \operatorname{Ann}(\ker f)$.
4. Prese $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}^*$ base di V^*, $\mathcal{C}$ base di W, $\mathcal{C}^*$ base di W^*, si ha:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t \mathfrak{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Esercizio 21. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare così definita:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

Iniziamo dalla **proprietà 4**. Poniamo $\mathcal{B} = Can_4$, base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{C} = Can_3$, base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora la matrice associata all'applicazione in quelle due basi è:

$$\mathfrak{M}_{Can_4, Can_3}(f) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}$$

-da completare-