Geometria 2
Alcuni argomenti

Francesca Pistolato

2 maggio 2017

Indice

Si tratta di una raccolta -incompleta- di argomenti trattati durante il corso di Geometria 2 tenuto da Broglia & Acquistapace nell'a.a. 2015-2016. Ringrazio Simone Cappellini che mi ha permesso di basarmi sui suoi appunti. Per la versione integrale, ma anche per tanti altri appunti, guardate qui. La seconda parte del corso, dall'Omotopia in poi sono lezioni tenute da Lelli-Chiesa nell'a.a. 2016/2017. Se avete correzioni, dubbi o richieste di chiarimenti scrivete a `pistolato[at]mail.dm.unipi.it`

Per le prime due parti, Topologia generale e Omotopia si rimanda alla seconda edizione del libro di Marco Manetti, "Topologia" [3]. Per quanto riguarda la terza, Analisi complessa, si consiglia di seguire il libro di Freitag, "Complex Analysis" [2].

Parte I

Topologia Generale

Capitolo 1

Prime definizioni

In questo capitolo daremo alcune definizioni di base per un corso di topologia generale, ad esempio quella di topologia e spazio topologico, di applicazione continua e prodotto topologico.

Definizione 1.1 (Topologia)**.** Sia X un insieme. Sia τ una famiglia di sottoinsiemi di X con queste proprietà:

- $\emptyset \in \tau$,
- se A, $B \in \tau$, allora $A \cap B \in \tau$,
- se $A_i \in \tau$ per $i \in I$, allora $\bigcup_I A_i \in \tau$,

allora τ è una *topologia* se X. Gli elementi di τ vengono chiamati *aperti* di X.

Definiamo una relazione d'ordine (parziale) sulla categoria delle topologie:

Definizione 1.2 (Topologia più/meno fine, equivalente)**.** Sia X un insieme dotato di due topologie τ e σ. Allora τ si dice *più fine* di σ se $\sigma \subseteq \tau$ o analogamente se $i : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ è continua; *meno fine* se vale il viceversa. Se due topologie sono l'una più fine dell'altra, si dicono *equivalenti*.

Esempio 1.1. La famiglia degli intervalli aperti (secondo la definizione comune) di $\mathbb{R}$ è una topologia.

Definizione 1.3 (Spazio topologico)**.** La coppia (X, τ) dove X è un insieme e τ una topologia su X è detta *spazio topologico*.

Questa nuova definizione ci permette di ampliare quella di funzione continua, dandoci la possibilità di darne una molto più astratta:

Definizione 1.4 (Funzione continua)**.** Una funzione $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ fra spazi topologici è detta *continua* se la controimmagine di aperti di Y è un aperto di X, ovvero se $\forall \Omega \in \tau_Y \ f^{-1}(\Omega) \in \tau_X$.

Definizione 1.5 (Base)**.** Dato (X, τ) uno spazio topologico, si definisce *base* di τ una sottofamiglia $\mathcal{B}$ della topologia tale che ogni aperto della topologia si può scrivere come unione degli aperti della base, ovvero $\forall A \in \tau \ \exists B_i \in \mathcal{B}$ tale che $\bigcup\limits_i B_i = A$.

Il seguente criterio è utile se abbiamo una sottofamiglia di sottoinsiemi di un insieme X e vogliamo capire se determini o meno una (non meglio precisata) topologia:

Teorema 1.1. *Dato un insieme X, sono condizioni necessarie e sufficienti affinchè una sottofamiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X sia una base di <u>una</u> base di una topologia su X le seguenti:*

- $\bigcup \mathcal{B} = X$*;*

- $\forall A,\ B \in \mathcal{B},\ \forall x \in A \cap B \ \exists C \in \mathcal{B}$ *tale che* $x \in C \subset A \cap B$.

Dimostrazione. Si rimanda a *Manetti, Teorema 3.7, pag. 43.* □

Date queste definizioni, cerchiamo di capire se e come studiare la struttura di alcuni spazi topologici, visti come sottoinsiemi di spazi più grandi, cioè se sia lecito o meno parlare di sottospazio topologico e come sia definita la topologia di sottospazio.

Definizione 1.6 (Sottospazio topologico, 1)**.** Dato (X, τ) spazio topologico, definiamo (Y, σ) *sottospazio topologico* se $Y \subset X$ e $\forall \Omega \in \sigma \ \exists A \in \tau$ tale che $\Omega = A \cap Y$.

Definizione 1.7 (Sottospazio topologico, 2)**.** Dato (X, τ) spazio topologico, definiamo (Y, σ) *sottospazio topologico* se la funzione immersione (l'identità su Y) $i : Y \to X$ è una funzione continua e σ è la topologia meno fine che la rende continua.

Definizione 1.8 (Omeomorfismo)**.** Due spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) si dicono *omeomorfi* se esiste una funzione $f : X \to Y$ continua, bigettiva e con inversa continua. Una funzione con queste proprietà si definisce *omeomorfismo*.

Esempio 1.2 (Topologia discreta)**.** Sia X dotato della topologia discreta, ovvero $\tau = \mathcal{P}(X)$. Allora ogni $f : X \to Y$ è continua, ma la sua inversa (a patto che sia definita) è continua solo se anche Y è dotato della topologia discreta.

Esempio 1.3 (Retta di Sorgenfrey)**.** La topologia della retta di Sorgenfrey è definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ come quella generata da questa base:

$$\mathcal{B} = \{ \, [a, b) \subset \mathbb{R} \mid a, \, b \in \mathbb{R} \, \}$$

Osserviamo che è più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$, in quanto ogni intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (gli aperti della topologia euclidea) è un aperto in Sorgenfrey, infatti

$$(a, b) = \bigcup_{a<c<b} [c, b)$$

Dove non meglio specificato, X sarà uno spazio topologico. Definiamo alcune operazioni sugli insiemi

Definizione 1.9 (Intorno di un punto)**.** Sia $x \in X$. Definiamo *intorno di* x un sottoinsieme $U \subset X$ tale che $\exists A \in \tau$ tale che $x \in A \subset U$. Denotiamo $\mathcal{I}(x) = \{ \, U \subset X \mid U \text{ è intorno di } x \, \}$.

Osserviamo che intersezione finita di intorni è un intorno e ogni sottoinsieme contenente un intorno è a sua volta un intorno.

Definizione 1.10 (Chiusura)**.** Dato uno spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme A, definiamo *chiusura* di A l'insieme $\overline{A}$ il più piccolo chiuso di X contenente A. Costruttivamente

$$\overline{A} = \bigcap \{ \, F \subset X \mid F \supset A \text{ e } F \text{ è chiuso in } X \, \}$$

Possiamo caratterizzare la chiusura di un sottoinsieme anche come segue:

Proposizione 1.2. *La chiusura di un insieme è l'insieme dei suoi punti aderenti: dato X spazio topologico e $A \subset X$,*

$$\overline{A} = \{ \, x \in X \mid \forall U \in \mathcal{I}(x) \; U \cap A \neq \emptyset \, \}$$

Dimostrazione. Si rimanda a *Manetti, Lemma 3.21, pag 47.* □

Definizione 1.11 (Parte interna)**.** Dato uno spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme A, definiamo *parte interna* di A l'insieme unione di tutti gli aperti contenuti in A, ovvero

$$A^\circ = \bigcup \{ \, \Omega \in \tau \mid \Omega \subset A \, \}$$

Anche ora possiamo caratterizzarlo come segue:

Proposizione 1.3. *La parte interna di un sottoinsieme è l'insieme dei punti interni, ovvero*

$$A^\circ = \{\, x \in A \mid \exists U \in \mathcal{I}(c) \text{ tale che } x \in U \subset A \,\}$$

Dimostrazione. Basta applicare la definizione. □

Definizione 1.12 (Frontiera)**.** Dato uno spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme A, definiamo *frontiera* di A l'insieme $\partial A = \overline{A} - A^\circ$, ovvero i punti aderenti sia ad A che al suo complementare.

Una volta data la definizione di intorno, possiamo estendere la nozione di base dell'insieme degli intorni, ovvero

Definizione 1.13 (Base locale, o sistema fondamentale di intorni)**.** Dato uno spazio topologico (X, τ) e $x \in X$, definiamo *base locale* una famiglia $\mathcal{B}_x$ di $\mathcal{I}(x)$ tale che ogni intorno di x contiene un elemento di $\mathcal{B}_x$.

Esempio 1.4. Un sistema fondamentale di intorni di $x = 0 \in \mathbb{R}$ è la famiglia $\mathcal{B}_0 = \left\{\, (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \,\right\}$.

Teorema 1.4. *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e solo se $\forall A \subseteq X$ si ha $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Dimostrazione. □

Si può anche guardare su *Manetti, Teorema , pag .*

Definizione 1.14 (Applicazione aperta, chiusa)**.** Un'applicazione $f : X \to Y$ fra spazi topologici si dice *aperta* se $\forall A \in \tau_X \ f(A) \in \tau_Y$, ovvero immagine di aperti è un aperto. Viceversa, se immagine di chiusi è un chiuso f si dice *chiusa*.

Osservazione 1.5. Un omeomorfismo è sia aperto che chiuso.

Esempio 1.5. L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $t \mapsto (t,\, t^2)$ è un'immersione chiusa.

L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $t \mapsto (\frac{t}{1+t^4},\, \frac{t^2}{1+t^4})$ non è chiusa, in quanto scelto $a \in \mathbb{R}$ $f(\mathbb{R} - (-a, a))$ non è un chiuso di $f(\mathbb{R})$. Il suo grafico è una coppia di foglioline.

Definizione 1.15 (Sottoinsieme denso)**.** Dato X uno spazio topologico, un suo sottoinsieme D si dice *denso* se $\overline{D} = X$.

Un'interessante caratterizzazione di un denso è la seguente:

Proposizione 1.6. *Un sottoinsieme D è denso se interseca ogni aperto della topologia su X, ovvero se*

$$\forall A \in \tau \quad A \cap D \neq \emptyset$$

Esempio 1.6. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Supponiamo che $\mathbb{R} - \overline{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$. In quanto complementare di un chiuso, è aperto e dunque contiene un aperto della topologia. Possiamo generalizzare affermando che contiene una palla aperta (secondo la distanza euclidea). Sia $B = \mathcal{B}(x, \delta)$. Allora esiste un intervallo di estremi reali, $A = (x - \delta, x + \delta)$ che non contiene elementi di $\mathbb{Q}$. Ciò è assurdo in quanto mi basta prendere un qualsiasi elemento $q \in A$, troncarne lo sviluppo decimale in modo tale che $tronc(q) \in A$ e si ottiene che $tronc(q) \in A \cap \mathbb{Q}$.

Dunque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ora enunciamo alcuni risultati dimostrati ad esercitazione.

Teorema 1.7. *Sia X spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora $f : Z \to Y$ è continua se e solo se $f \circ i : Z \to X$ è continua.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è per definizione. Proviamo quella inversa. Supponiamo $i \circ f$ continua e consideriamo $A \supset X$ aperto. Per continuità, $(f \circ i)^{-1}(A)$ è aperto in Z, ma questo vuol dire che $f^{-1}(i^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$ è aperto in Z. □

Teorema 1.8. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Allora $\forall A \subseteq Y$, vale che $\overline{A}$ in Y coincide con $\overline{A} \cap Y$.*

Dimostrazione. Segue dall'applicazione della definizione. □

Si può anche guardare su *Manetti, Lemma 3.55, pag. 59.*

Spazi metrici

Alcuni insiemi sono dotati di una funzione con alcune propretà, denominata distanza, che ad ogni coppia di punti associa un numero reale positivo. Questa funzione ci permette di definire una topologia sull'insieme e dunque lavorare in una struttura analoga a quella di uno spazio topologico, che chiameremo spazio metrico, di cui andremo a studiare alcune proprietà.

Definizione 1.16 (Distanza)**.** Sia X un insieme. Una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice *distanza* se rispetta alcune proprietà:

- $d(x, y) \geq 0$ $\forall x,\ y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x,\ y \in X$;
- $d(x, z) \leq d(x, y + d(y, z))$ $\forall x,\ y,\ z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Definizione 1.17 (Spazio metrico)**.** Definiamo *spazio metrico* una coppia (X, d) definita da un insieme X e d distanza su X.

Definizione 1.18 (Palle indotte da una distanza)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Dato $x \in X$ e $\delta > 0$, definiamo *palla aperta di centro x e raggio δ* l'insieme dei punti

$$B(x, \delta) = \{\ y \in X \mid d(x, y) < \delta\ \}$$

Viene chiamata "palla" per analogia con quanto accade su $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea.

Questa struttura definisce uno spazio topologico. Vediamo come

Proposizione 1.9 (Topologia indotta da una distanza)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora la famiglia*

$$\tau = \{\ A \subset X \mid \exists x \in A,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } B(x, \delta) \subset A\ \}$$

è una topologia su X.

Dimostrazione. La dimostrazione sono banali verifiche. □

Osservazione 1.10. Fondamentalmente uno spazio metrico è uno spazio topologico in cui la topologia è indotta da una distanza. Non tutti gli spazi topologici sono spazi metrici.

Da notare la seguente definizione, presa da *Manetti, Definizione 3.49, pag. 56*:

Definizione 1.19 (Distanze equivalenti)**.** Due distanze su un insieme X si dicono *equivalenti* se inducono la stessa topologia.

Lemma 1.11. *Secondo le definizioni date, valgono i seguenti fatti:*

1. *le palle aperte sono aperti della topologia indotta;*

2. le palle chiuse sono del tipo $B(x,\delta) = \{\, y \in X \mid d(x,y) \leq \delta \,\}$.

Dimostrazione. Non ho voglia di farla. □

Esempio 1.7 (Distanze equivalenti)**.** In classe abbiamo dato tre differenti distanze su $\mathbb{R}^2$ e osservato che fossero equivalenti:

- la distanza euclidea: $d_\varepsilon(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;
- $d'(x,y) = max\{\ |\, x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\,\}$;
- $d''(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

L'abbiamo dimostrato osservando che le palle, con opportuni coefficienti, fossero l'una contenuta nell'altro.

Proposizione 1.12. *La famiglia delle palle aperte è una base della topologia indotta.*

Dimostrazione. Immagina. □

Topologia prodotto

Lavorando con gli insiemi, data una coppia di insiemi viene automatico definirne il prodotto cartesiano. Ci chiediamo quindi se sia possibile definire una topologia su questa struttura in modo che la proiezione sia un'applicazione continua. Detto meglio, dati X e Y due spazi topologici, consideriamo $X \times Y$ e vorremmo definire una topologia Π tale che le usuali

$$\pi_X : X \times Y \to X \text{ e } \pi_Y : X \times Y \to Y$$

siano continue.

Definizione 1.20 (Topologia prodotto)**.** Dati X e Y spazi topologici, definiamo *topologia prodotto* la topologia meno fine che rende le proiezioni continue.

Diamone ora una seconda caratterizzazione:

Proposizione 1.13. $\mathcal{B} = \{\, U \times V \subset X \times Y \mid U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y \,\}$ *è una base della topologia prodotto.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare due cose, che $\mathcal{B}$ sia una base di una topologia e che sia equivalente a Π. □

Facciamo

Capitolo 2

Connessione, compattezza e funzioni proprie

In questo capitolo daremo le definizioni di spazio connesso, ricoprimento, spazio compatto e funzioni proprie. Alla luce di queste nuove nozioni ricaveremo alcuni importanti risultati.

Definizione 2.1 (Connesso, 1)**.** Uno spazio topologico X si dice *connesso* se non è scrivibile come unione disgiunta di due aperti (o equivalentemente chiusi).

Proponiamo la definizione presente su *Manetti, Definizione 4.1, pag. 68*

Definizione 2.2 (Connesso, 2)**.** Uno spazio topologico X si dice connesso se gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X.

É facile dimostrare che sono due definizioni equivalenti. Per una dimostrazione puntuale si veda *Manetti, Lemma 4.2, pag. 68.*

Definizione 2.3 (Arco continuo)**.** Sia X uno spazio topologico e x_0, $x_1 \in X$. Diciamo che $\alpha : [0, 1] \to X$ è un *arco continuo* fra i punti x_0 e x_1 se α è una applicazione continua e $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$.

Definizione 2.4 (Connesso per archi)**.** Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se $\forall x,\ y \in X$ esiste un arco continuo fra i punti x e y.

Esempio 2.1 (La pulce e il pettine)**.** A partire da

$$Y = (0, 1) \times \{ 0 \} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

definiamo l'insieme $X = Y \cup \{ P \}$, con $P = (0, \frac{1}{2})$.

Mostriamo che X è connesso, ma non connesso per archi.

Y è connesso per archi, dunque connesso. Inoltre $Y \subseteq X \subseteq \overline{Y}$ e perciò anche X è connesso (si può vedere una dimostrazione su *Manetti, Lemma 4.22, pag. 73*). Sia per assurdo $\alpha : [0,1] \to X$ un arco continuo tale che $\alpha(0) = P$ e $\alpha(1) = x \in Y$. In quanto α continua, è continua sulle componenti dunque non è restrittivo supporre che $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ con α_i continue e tali che $\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_1(1) = x_1$ e $\alpha_2(0) = \frac{1}{2}$, $\alpha_2(1) = x_2$.

Sia $C = max \{ t \in [0,1] \mid \alpha_1(t) = 0 \}$. C'è un unico punto in X la cui prima componente è 0 ed è P. Poichè α_2 è continua esiste $\delta > 0$ tale che $c < t < c+\delta$, allora $\alpha_2(t) > \frac{1}{4}$. Osserviamo allora che l'arco α è tale che:

- $\alpha(t) = P$ se $0 \leq t \leq C$
- $\alpha(t) \in \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{4} \right\}$ se $C \leq t \leq C + \delta$;
- $\alpha(C + \delta) \neq P$ poichè C è il max.

Ma allora $X \cap \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{4} \right\}$ non è connesso per archi. Infatti $\alpha(C + \delta) \in$ un segmento di Y con $y > \frac{1}{4}$, e $\alpha(C) = P$ stanno in aperti disgiunti.

Non ho molto capito.

Definizione 2.5 (Ricoprimento)**.** Un *ricoprimento* di uno spazio X è una famiglia di sottoinsiemi $\{ A_i \mid i \in I \}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Definizione 2.6 (Aperto, chiuso)**.** Un ricoprimento è *aperto* se gli A_i sono aperti. Altrimenti *chiuso* se gli A_i sono chiusi.

Definizione 2.7 (Finito)**.** Un ricoprimento è *finito* se I è finito. Un ricoprimento è *puntualmente finito* se $\forall x \in X$ x appartiene al più ad un numero finito di A_i. Un ricoprimento è *localmente finito* se $\forall x \in X$ $\exists U \in \mathcal{I}(x)$ che interseca al più un numero finito di A_i.

Osservazione 2.1. Se un ricoprimento è localmente finito, allora è puntualmente finito. Non è vero il viceversa.

Definizione 2.8 (Fondamentale)**.** Un ricoprimento è *fondamentale* se $\forall U \subset X$ U è aperto se e solo se $\forall A_i \in \mathcal{A}$ $A_i \cap U$ è aperto in A_i.

Proposizione 2.2. *Ogni ricoprimento aperto o chiuso e localmento finito è un ricoprimento fondamentale.*

Dimostrazione. Si veda *Manetti, Teorema 4.34, pag. 77.* $\square$

Definizione 2.9 (Sottoricoprimento)**.** Dato un ricoprimento $\mathcal{V}$ di uno spazio X, un *sottoricoprimento* è un ricoprimento $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Definizione 2.10 (Restringimento)**.** Dato un ricoprimento $\mathcal{V} = \{ V_i \}_i$ di uno spazio X, un *restringimento* è un sottoricoprimento $\mathcal{U} = \{ U_i \}_i$ tale che $\forall i \in I \; U_i \subseteq V_i$.

Definizione 2.11 (Raffinamento)**.** Dato un ricoprimento $\mathcal{V}$ di uno spazio X, un *raffinamento* è un ricoprimento $\mathcal{U}$ tale che $\forall U \in \mathcal{U} \; \exists V \in \mathcal{V}$ tale che $U \subseteq V$.

Proposizione 2.3. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici e $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i \in I \}$ un ricoprimento fondamentale di X. Allora f è continua se o solo se $\forall i \in I \; f|_{U_i}$ è continua.*

Dimostrazione. Si veda *Manetti, Proposizione 4.33, pag. 77.* $\square$

Definizione 2.12 (Compatto)**.** Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 2.4. $[0, 1]$ *è compatto in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Si veda *Manetti, Teorema 4.39, pag. 78.* $\square$

Proposizione 2.5. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici. Se X è compatto, allora $f(X)$ lo è in Y.*

Proposizione 2.6. *Un chiuso in un compatto è compatto.*

Dimostrazione. Si veda *Manetti, Proposizione 4.41 (1), pag. 79.* $\square$

Proposizione 2.7. *In uno spazio di Hausdorff i compatti sono chiusi.*

Dimostrazione. Sia X di Hausdorff e $K \subseteq X$ un compatto. In quanto di Hausdorff, $\forall y \in K$ e $\forall x \notin K \; \exists V_y$ e U_x intorni rispettivamente di y e x, tali che $V_y \cap U_x = \emptyset$. Possiamo supporre che tali intorni siano aperti e dunque $\{ V_y \mid y \in Y \}$ è un ricoprimento aperto di K: sia $\mathcal{B} = \{ V_{y_1}, \dots, V_{y_k} \}$ un sottoricoprimento finito. A questo punto $\forall x \notin K$ consideriamo U_x tale che $U_x \cap \bigcup \mathcal{B} = \emptyset$ (basta prendere l'intersezione -finita- dei k aperti di x con intersezione vuota con gli y_i che producono il ricoprimento $\mathcal{B}$). Allora $X - K = \bigcup\limits_{x \notin K} U_x$, unione di aperti e dunque K è chiuso. $\square$

Si propone anche la dimostrazione fornita su *Manetti, Corollario 4.48, pag. 83*, che tuttavia sfrutta il teorema di Wallace (*Teorema 4.47, pag. 82*).

Proposizione 2.8. *I compatti di* $\mathbb{R}^n$ *sono tutti e soli i chiusi e limitati.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto. In quanto $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff, K è chiuso. Definiamo $\pi_i : K \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'i-esima coordinata. In quanto continua. $\pi(K) \subseteq \mathbb{R}$ è un compatto e dunque limitato da inf e sup dell'unione (finita) degli aperti che ricoprono $\pi(K)$.

$\Rightarrow$) Non si capisce. □

Su *Manetti, Corollario 4.42, pag. 79* viene proposta una dimostrazione per $n = 1$. Mentre questa la si trova nel *Corollario 4.50, pag. 83.*

Esempio 2.2 (L'insieme di Cantor)**.** Per un definizione precisa si rimanda a insieme di Cantor.

Oltre a fornire una dimostrazione del fatto che è limitato e chiuso (e per proposizioni precedenti compatto), racconta tanti altri fattini interessanti.

Una seconda definizione di questo insieme può essere data identificando i segmentini costituenti tale insieme con sequenze binarie finite. Ad esempio, se il livello 0 denota l'intervallo $[0, 1]$, sul livello 3 il segmento più a sinistra sarà identificato dalla stringa 0 0 0, quello alla sua destra da 0 0 1, mentre quello più a destra di tutti da 1 1 1, ovvero l'1 denota uno shift del *max* a sinistra e lo 0 di uno shift del *min* a destra.

Teorema 2.9. *Il prodotto di spazi topologici compatti è compatto.*

Dimostrazione. Siano X e Y due spazi topologici compatti.

Sia $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di $X \times Y$ che ricopre $X \times Y$. Per definizione, ogni U_i è unione di aperti del tipo $A \times B$ con A e B aperti rispettivamente di X e Y, base canonica (rettangoli) del prodotto.

Proviamo che ogni ricoprimento costituito di rettangoli ha un sottoricoprimento finito, fatto ciò concludiamo per la proposizione sul Manetti.

Sia $x \in X$. In quanto omeomorfo a Y, $\{ x \} \times Y$ è compatto e dunque ammette un ricoprimento aperto finito. Sia $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ un ricoprimento finito di $\{ x \} \times Y$. In quanto aperti di $X \times Y$ saranno del tipo $U_{i_j} = A_{i_j} \times B_{i_j}$ tali che $\forall j \; x \in \pi_X(A_{i_j})$. Allora $x \in A_x = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ e di conseguenza $\pi_X^{-1}(A_x) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.

Osserviamo che $\{ A_x \}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X e dunque ammette un sottoricoprimento finito, ovvero $\exists x_1, \ldots x_h \in X$ tali che $X = A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_h}$.

Ma allora $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{h} \pi_X^{-1}(A_{x_i})$ e siccome ogni $\pi_X^{-1}(A_{x-i})$ è contenuto in un numero finito di U_{i_j}, allora abbiamo un numero finito di rettangoli che ricopre $X \times Y$. □

Teorema 2.10 (Tychonoff)**.** *Il prodotto arbitrari di compatti è compatto.*

Lemma 2.11 (Lebesgue)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora per ogni $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X esiste δ, detto numero di Lebesgue tale che $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon \leq \delta$ $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.*

Dimostrazione. Per ogni $X \in X$ esiste un $\delta_x > 0$ tale che $B(x, \delta_x) \subset X$. Allora costruiamo il seguente ricoprimento aperto di X: $\mathcal{A} = \left\{ B(x, \frac{\delta_x}{2}) \mid x \in X \right\}$. Per compattezza di X, ammette un sottoricoprimento finito $\mathcal{B}$, ovvero esistono finiti elementi di X, siano $x_1, \ldots, x_n$ tali che

$$X \subset \bigcup \left\{ B(x_1, \frac{\delta_{x_1}}{2}), \ldots, B(x_n, \frac{\delta_{x_n}}{2}) \right\}$$

Ma allora $\delta = min \{ \delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n} \}$ è il numero di Lebesgue cercato. Verifichiamolo.

Sia $p \in X$ e $E = B(p, m)$ con $m < \delta$. In quanto ricoprimento, esisterà x_j tale che $p \in B(x_y, \frac{\delta_{x_j}}{2}) \in \mathcal{B}$, ma allora $\forall y \in E$ per disuguaglianza triangolare

$$d(y, x_j) \leq d(y, p) + d(p, x_j) < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \leq \delta_{x_j}$$

Ovvero $y \in B(x_y, \frac{\delta_{x_j}}{2})$, cioè $E \subseteq B(x_y, \frac{\delta_{x_j}}{2})$. □

Tale dimostrazione è presa da questa dispensa: Numero di Lesbesgue, Unipd. Non mi piaceva molto quella proposta da Broglia (anzi, non sono riuscita a capire cosa avesse scritto).

Riproponiamo il seguente risultato dimostrato su *Manetti, Corollario 4.52, pag. 83*:

Corollario 2.12. *Un'applicazione continua fra due spazi topologici tali che il primo è compatto e il secondo di Hausdorff è chiusa. Se è anche bigettiva, allora è un omeomorfismo.*

Viene applicata nel seguente esempio:

Ricapitolando, possiamo concludere che

- il prodotto di connessi è connesso;
- connesso per archi ⇒ connesso, ma non vale il viceversa;
- connesso per archi ⇒ connesso per compatti, ma non vale il viceversa.

Non ho capito cosa intenda per connesso per compatti, forse si riferisce agli ε-cammini di cui si parla in *Manetti, Esercizio 4.37, pag. 84.*

Definizione 2.13 (Applicazione propria, 1)**.** Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice *propria* se è continua e $\forall K \in Y$ compatto, $f^{-1}(K)$ è compatto in X.

Esempio 2.3. Chiediamoci se le seguenti applicazioni sono proprie:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $t \mapsto (t, t^2)$ è propria;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $t \mapsto (\frac{t}{1+t^{10}}, \frac{t^2}{1+t^{10}})$ non lo è, basti vedere la controimmagine di $\{ (0, 0) \}$.

Consideriamo ora la seguente definizione

Definizione 2.14 (Applicazione propria, 2)**.** Una applicazione $f : X \to Y$ fra spazi topologici si dice *propria* se è continua, chiusa e $\forall y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è compatta in X.

Dimostriamo l'equivalenza delle due definizioni.

Dimostrazione. $Def(2) \Rightarrow Def(1)$: sia K un compatto di Y e $y \in K$. Sia $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f^{-1}(K)$. Ma $f^{-1}(K) \supseteq f^{-1}(y)$ che per ipotesi è compatto, dunque esistono un numero finito di elementi di $\mathcal{U}$ che ricoprono $f^{-1}(y)$: siano $U_1, \ldots, U_k$ e $A_y = \bigcup_i U_i$. In quanto unioni di aperti, gli A_y sono aperti, dunque $X - A_y$ sono chiusi e, per chiusura di f, $f(X - A_y)$ è ancora chiuso. Allora $Y - f(X - A_y)$ è un aperto che contiene y, in quanto $f^{-1}(y) \cap (X - A_y) = \emptyset$. Per la caratterizzazione degli aperti come intorni di ogni proprio punto, esiste un aperto che contiene y: $V_y \in Y - f(X - A_y)$, dunque tale che $f^{-1}(V_y) \subseteq A_y$ e ricopribile con un numero finito di aperti (quelli costituenti A_y).

Allora in quanto K è compatto, ricoprendolo con tali A_y al variare di $y \in K$ ottengo un ricoprimento aperto e dunque un sottoricoprimento finito, le cui controimmagini sono finite e ricopribili in modo finito.

$Def(1) \Rightarrow Def(2)$: le ipotesi che abbiamo non sono sufficienti. Dobbiamo supporre che Y sia T_2 (di Hausdorff) e localmente compatto. $\square$

Facciamo un esempio.

Citiamo prima un risultato dimostrato su *Manetti, Corollario 4.52, pag. 83*:

Proposizione 2.13. *Un'applicazione continua fra due spazi topologici tali che il primo è compatto e il secondo di Hausdorff è chiusa. Se è anche bigettiva, allora è un omeomorfismo.*

Esempio 2.4 (La curva di Peano)**.** Definita come un'applicazione continua surgettiva da $[0, 1]$ nel quadrato. In quanto applicazione continua da un compatto in un T_2 (anch'esso compatto in quanto chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$), è chiusa. Inoltre è propria secondo entrambe le definizioni, infatti

1. un compatto del quadrato è chiuso, in quanto il quadrato è T_2, ma allora per continuità ha controimmagine chiusa in $[0, 1]$ ed è di conseguenza anche limitata, dunque compatta;

2. è continua e chiusa, resta da verificare che la fibra di ogni elemento sia compatta. Ma la fibra è la controimmagine del singoletto, chiuso, e dunque analogamente a sopra è compatta.

Un'altra particolarità è la non iniettività. Infatti, se fosse iniettiva sarebbe una bigezione e per chiusura, anche un omeomorfismo. Ma $[0, 1]$ viene sconnesso da un qualsiasi punto interno, a differenza del quadrato.

Capitolo 3

Quozienti topologici

Tale struttura nasce dall'esigenza di definire una struttura di spazio topologico anche su insiemi dotati di una relazione di equivalenza. Infatti, dato uno spazio topologico e una relazione di equivalenza su di esso, l'insieme quoziente "perde" la topologia.

Diamo qualche definizione

Definizione 3.1 (Saturato di un elemento)**.** Dato un insieme X e una relazione di equivalenza, definiamo il *saturato* di un elemento l'insieme degli elementi in relazione con lui, ovvero la sua classe di equivalenza.

Dato (X, τ) uno spazio topologico, la scelta della topologia è dettata, però, dall'esigenza di rendere continua la proiezione al quoziente

$$\pi : X \to X/\mathcal{R} \text{ tale che } x \mapsto \pi(x)$$

Perciò definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $X/\mathcal{R}$

$$\left\{ \Omega \subset X \mid \pi^{-1}(\Omega) \in \tau_X \right\}$$

Proposizione 3.1. *La topologia quoziente così definita è la topologia più fine che rende continua la proiezione pi.*

Dimostrazione. Si veda sul Manetti. $\square$

Osservazione 3.2. I quozienti di un connesso sono ancora connessi, analogo per i compatti. Non vale lo stesso per spazi $T2$. Vedremo in seguito degli esempi.

Teorema 3.3. *Sia $\mathcal{R}$ una relazione su X spazio topologico e $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione al quoziente. Consideriamo $f : X \to Z$ un'applicazione fra spazi topologici continua e costante sulle fibre di π. Allora esiste un'applicazione continua $h : X/\mathcal{R} \to Z$ che fa commutare il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\mathcal{R} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Osservazione 3.4. Anche se f è surgettiva, non è detto che h sia un omeomorfismo. Lo sarebbe se f fosse chiusa.

Facciamo alcuni esempi:

Esempio 3.1 (Contrazione)**.** Vediamo un esempio particolare di quoziente di uno spazio topologico, ovvero la contrazione in un punto di un suo sottoinsieme: definiamo su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $x, y \in (0, 1)$.

Gli elementi di $\mathbb{R}/\sim$ sono $\{ \pi(x) \mid x \notin (0, 1) \} \cup \pi((0, 1))$. In particolare $[(0, 1)] = \omega$ è un punto aperto, in quanto la sua controimmagine è un aperto di $\mathbb{R}$. Se fosse anche chiuso, allora in $\mathbb{R}/\sim$ avremo un sottoinsieme contemporaneamente chiuso e aperto, contraddicendo la connessione del quoziente. Dunque siccome non tutti i punti sono chiusi, deduciamo che il quoziente non è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esempio 3.2 (Contrazione, 2)**.** Ora definiamo la relazione su $\mathbb{R}$: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $x, y \in [0, 1]$.

Definiamo la seguente applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f : x \mapsto \begin{cases} x - 1 & se\ x > 1 \\ 0 & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Tale applicazione è continua, surgettiva e chiusa, dunque un'identificazione (usando il lessico del Manetti); inoltre è costante sulle fibre della proiezione al quoziente e dunque il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Ma inoltre h è un omeomorfismo.

Esempio 3.3. Restiamo ancora su $\mathbb{R}$ e a partire dalla seguente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} cos(2\pi t) \\ sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

definiamo la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $f(x) = f(y)$. Consideriamo il solito diagramma, banalmente f è costante sulle fibre di π.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Infatti $Im(f) = S^1$. Ma ora f è chiusa e dunque h è un omeomorfismo.

Esempio 3.4 (Quoziente di spazi $T2$ non è necessariamente $T2$)**.** Spostiamoci in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo il sottospazio

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 1 = 0 \right\}$$

cioè l'insieme delle due rette $y = \pm 1$. Definiamo su H la relazione di equivalenza $v = (a, 1) \sim w = (b, -1)$ se e solo se $a = b$ e $|a|, |b| < 1$.

Mostriamo che non è $T2$. Definiamo $\omega_1 = \pi((1, 1))$ e $\omega_2 = \pi((1, -1))$. Siano Ω_1 e Ω_2 intorni disgiunti rispettivamente di ω_1 e ω_2, possiamo già supporre che siano aperti. Ma allora le controimmagini $\pi^{-1}(\Omega_1)$ e $\pi^{-1}(\Omega_2)$ sono due aperti di $\mathbb{R}^2$ contenenti rispettivamente $(1, 1)$ e $(1, -1)$. In quanto punti di un aperto, esisteranno $B((1, 1), \delta) \subset \pi^{-1}(\Omega_1)$ e $B((1, -1), \varepsilon) \subset \pi^{-1}(\Omega_2)$, ma allora esiste $c \in (0, 1)$ tale che $(c, 1) \in B((1, 1), \delta)$ e $(c, -1) \in B((1, -1), \varepsilon)$. Questo vuol dire che $\pi((c, 1)) = \pi((c, -1)) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

Esempio 3.5. Vediamo ora due diversi quozienti di $\mathbb{R}$. Sono molto diversi pur essendo prodotti da una scrittura simile. Definiamo le due relazioni

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ |x|, |y| > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad x \sim' y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ |x|, |y| \geq 1 \end{cases}$$

Vediamo $\sim$ produce un quoziente non $T2$, la dimostrazione è analoga alla precedente con i punti 1 e $1 + \varepsilon$.

La seconda invece è omeomorfa a S^1. Definiamo $f : \mathbb{R} \to S^1$ tale che

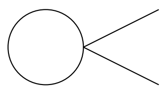
$$f : t \mapsto \begin{cases} \binom{cos(\pi - \pi t)}{sin(\pi - \pi t)} \ se \ 0 \leq t < 1 \\ \binom{cos(\pi - \pi t)}{sin(\pi - \pi t)} \ se \ -1 < t < 0 \\ (1, 0) \ altrimenti \end{cases}$$

É continua e surgettiva, inoltre è costante sulle fibre di $\pi_{\sim'}$ (potremmo proprio dire che $x \sim' y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$). Dunque esiste ed è continua h che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\
\mathbb{R}/\sim \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre f è chiusa e dunque h è un omeomorfismo.

Esempio 3.6. Se in $\mathbb{R}$ identifichiamo 1 e -1 otteniamo un quoziente del tipo



Se invece consideriamo $\square = [0,1] \times [0,1]$ e la relazione $(a,b) \sim (c,d)$ se e solo se

$$\begin{cases} a = c \\ b = 0 \\ d = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} b = d \\ a = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

otteniamo il toro. Un altro modo di vederlo è come $S^1 \times S^1$.

Esempio 3.7. Possiamo generalizzare il toro come segue: si consideri $\mathbb{R}^n - \{ 0 \}$ dotato della relazione $x \sim y$ se e solo se $\exists m \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2^m y$. Proviamo che $\mathbb{R}^n - \{ 0 \} \big/ \sim \, \cong S^1 \times S^{n-1}$.

Innanzitutto osserviamo che data una semiretta uscente da 0, i suoi punti possono essere in relazione solo con altri punti della stessa semiretta e ogni punto di S^{n-1} rappresenta una di queste semirette; inoltre per ogni $v \in S^{n-1}$, il segmento $tv + (1-t)2v$ al variare di $t \in [0,1]$ contiene un solo rappresentante per ciascuna classe di equivalenza di punti in tale semiretta quindi tale segmento rispetto alla relazione data è omeomorfo a S^1.

Dunque è continua, surgettiva e costante sulle fibre l'applicazione $f : \mathbb{R}^n - \{ 0 \} \to S^{n-1} \times S^1$ tale che

$$f : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (v, w)$$

dove $v \in S^{n-1}$ è tale che $\exists k > 0$: $kv = x$ e $w = \binom{cos 2\pi t}{sin 2\pi t}$ con t tale che $tv + (1-t)2v \sim x$.

Esempio 3.8. Consideriamo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sia $\omega = \pi(\mathbb{Z})$. Possiamo immaginare il quoziente come un fiore con una quantità numerabile di petali che si intersecano in ω. Tuttavia è un po' brutto da studiare, in quanto ω non ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile. Questo ci permette anche di dimostrare che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ non è immergibile in $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In seguito parla del processo diagonale di Cantor. Lo approfondirò più avanti.

Esempio 3.9 (L'ombrello di Whitney)**.** Consideriamo $\mathbb{R}^2$ e la seguente relazione d'equivalenza: $(a,b) \sim (c,d)$ se e solo se $(a,b) = (c,d)$ o $a = c = 0$ e $b = -d$.

Ci chiediamo se il quoziente $\mathbb{R}^2/\sim$ sia immergibile in $\mathbb{R}^3$. Questo vuol dire cercare di costruire un'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che sia costante sulle fibre di π. Definiamola nel modo seguente:

$$f : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ u \\ v^2 \end{pmatrix}$$

É continua e la sua immagine è contenuta nello spazio delle soluzioni di $x^2 - zy^2 = 0$. Questo spazio prende il nome di *ombrello di Whitney* e l'asse z prende il nome di *manico dell'ombrello*, sebbene i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ ad altezza "negativa", ovvero con $z < 0$, non siano contenuti nell'immagine di f.

Esempio 3.10. Mostriamo che $\mathbb{R}$ dotato della seguente relazione di equivalenza $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $x - y = n \in \mathbb{Z}$, è omeomorfo a S^1.

Una strategia utile è quella di cercare un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contenga uno e un solo rappresentante di ogni classe di equivalenza. In questo caso un tale insieme è $[0,1]$ in cui $0 \sim 1$ e dunque omeomorfo a S^1. Formalmente si considera la funzione $f : \mathbb{R} \to S^1$ tale che

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} cos(2\pi t) \\ sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Si mostra che è continua, surgettiva, costante sulle fibre di π e chiusa e che dunque produce un omeomorfismo tra S^1 e il quoziente.

Esempio 3.11 (Nastro di Moebius, bottiglia di Klein)**.** Chiamiamo nastro di Moebius il quoziente di $\mathcal{Q} = [0,1] \times [0,1]$ secondo la relazione $(a,b) \sim (c,d)$ se e solo se $(a,b) = (c,d)$ oppure se $a = 0$, $c = 1$ e $b = 1 - d$.

La bottiglia di Klein è invece il quoziente di $\mathcal{Q}$ secondo la relazione $(a, b) \sim (c, d)$ se e solo se $(a, b) = (c, d)$ oppure se $a = 0$, $c = 1$ e $b = 1 - d$, o se $b = 0$, $d = 1$ e $a = 1 - c$.

Di seguito parleremo di un'importante omeomorfismo tra la sfera in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n-1}$ e di come immergere uno spazio generico in uno spazio compatto.

La proiezione stereografica

Idealmente si tratta di proiettare la sfera sul piano del polo Nord.

Consideriamo $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, lo spazio delle soluzioni di $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Π il piano di equazione $z = 0$ che sappiamo essere omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e il Polo Nordo, ovvero il punto $(0, 0, 1)$.

Costruiamo la seguente applicazione: dato N il polo Nord e un generico $P \in S^3$ $f : S^2 - \{ N \} \to \mathbb{R}^2$ è tale che

$$f : P \mapsto NP \cap \Pi$$

dove NP denota la retta passante per N e P, esplicitamente

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 + -y^2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

É evidentemente continua e ha un'inversa, la proiezione al polo Sud, che dato $S \in \Pi \subset \mathbb{R}^3$ e SP la retta passante per S e P

$$g : P \mapsto SP \cap S^2$$

$$g : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix}$$

altrettanto continua, dunque la proiezione trovata, che chiameremo *stereografica*, è un omeomorfismo fra $\mathbb{R}^2 - \{ 0 \}$ e $S^2 - \{ N \}$.

Da notare che in realtà $f \circ g : \mathbb{R}^2 - \{ 0 \} \to \mathbb{R}^2 - \{ 0 \}$.

Esempio 3.12. Si consideri X dato dall'unione delle rette di $\mathbb{R}^2$ di equazioni $y = 1$ e $y = -1$ dotato della relazione $(x, a) \sim (y, b)$ se e solo se $(x, a) = (y, b)$ o se $a = -b$ e $xy = 1$. Mostriamo che il quoziente è omeomorfo a S^1.

La compattificazione di Alexandrov

Abbiamo visto che $S^2 - \{ N \}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$: è bene ricordarlo in quanto S^2 è compatto e $\mathbb{R}^2$ no!

Osserviamo che se un aperto di S^2 non contiene N, si ha che la sua controimmagine rispetto alla proiezione stereografica è ancora un aperto di $\mathbb{R}^2$; invece se contiene P la sua controimmagine è complementare di un compatto di $\mathbb{R}^2$. Abbiamo trovato una compattificazione di $\mathbb{R}^2$, ovvero

Definizione 3.2 (Compattificazione)**.** Una *compattificazione* è uno spazio compatto in cui posso immergere lo spazio di partenza.

Proposizione 3.5 (Compattificazione di Alexandrov)**.** *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Sia* $\infty \notin X$*. Definiamo* $\widehat{X} = X \cup \infty$ *e* $\widehat{\Omega} = \left\{ \Omega_i \subset \widehat{X} \mid i \in I \right\}$ *tali che*

- *o* $\Omega_i \in \tau$,
- *o* $\infty \in \Omega_i$ *e* $\widehat{X} - \Omega_i \subset X$ *è compatto in* X.

Allora $\widehat{\Omega}$ *è una topologia e* $\widehat{X}$ *è compatto.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova su Manetti. □

Capitolo 4

Spazi proiettivi e classificazione proiettiva delle quadriche

Richiamando i concetti di proiezione stereografica e compattificazione, definiamo un particolare quoziente di $\mathbb{R}^n - \{ 0 \}$:

Definizione 4.1 (Spazio proiettivo)**.** Definiamo su $\mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \}$ la seguente relazione d'equivalenza:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } y = \lambda x$$

Lo spazio quoziente $\mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \} \big/ \sim$ è definito *spazio proiettivo di dimensione n su* $\mathbb{R}$ e si denota $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

In modo del tutto analogo si può definire lo spazio proiettivo su $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. In questo caso gli elementi si identificano con le circonferenze massime. Basta infatti vedere $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e dunque $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}^{2n}) = \pi(S^{2n-1})$.

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Consideriamo lo spazio proiettivo di dimensione n su $\mathbb{K}$

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n+1} - \{ 0 \} \big/ \sim$$

è un quoziente convesso, compatto (in quanto lo possiamo vedere come quoziente della sfere) e $T2$.

Mostriamo che è localmente omeomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Sia $\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{ 0 \} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$$

dove $[0, \dots, 0] \notin \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ e $[\lambda x_1, \dots, \lambda x_n] = [x_1, \dots, x_n]$.

Osserviamo che $\forall \mathbb{K}^{n+1} \supset H_i = \{ v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_i = 1 \}$, $H_i \cong \mathbb{K}^n$ e

$$\pi(H_i) = U_i = \{ P = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \mid P_i \neq 0 \}$$

Infatti se $v \in H_i$, $\pi(v) = [v] = [x_0, \dots, 1, \dots, x_n] \in U_i$; viceversa se $P \in U_i$ $P = [x_0, \dots, x_i, \dots, x_n]$ con $x_i \neq 0$, $P = [\frac{x_0}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}] \in \pi(H_i)$.

Inoltre U_i è aperto in $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, infatti è complementare dell'insieme

$$\{ P = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0 \}$$

tale insieme è chiuso in quanto controimmagine di $\{ 0 \}$ rispetto alla proiezione sull'i-esima componente.

Mostriamo che $\pi_i = \pi|_{H_i} : H_i \to U_i$ è un omeomorfismo. Per come abbiamo definito U_i è surgettiva, inoltre è iniettiva, infatti se v, $w \in H_i$ e $v \neq w$, allora $v = (x_0, \dots, 1, \dots, x_n)$ e $w = (y_0, \dots, 1, \dots, y_n)$ e possiamo, senza perdita di generalità, supporre che $x_0 \neq y_0$. Ma allora $\forall \lambda \in \mathbb{K} - \{ 0 \}$ si ha che $w \neq \lambda v$, infatti se $\lambda = 1$ $x_0 \neq y_0$, se $\lambda \neq 1$ $x_i \neq y_i$. Inoltre è aperta, anche se non ho capito il perchè. Dunque è un omeomorfismo, sia ϕ_i la sua inversa.

A questo punto, siccome $0 \notin \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ ogni punto appartiene a qualche U_i, dunque

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

cioè un ricoprimento aperto e quindi fondamentale.

Dunque abbiamo provato che ogni punto dello spazio proiettivo di dimensione n ammette un intorno omeomorfo a $\mathbb{K}^n$. Questa è una delle idee che stanno dietro al concetto di *varietà*, di cui daremo una definizione formale più avanti. Un'altra idea è quella di *carta*, cioè una coppia costituita di un sottoinsieme della varietà e di una bigezione da tale sottoinsieme in $\mathbb{R}^n$: possiamo così vedere una varietà come un insieme di carte, la cui unione è detta *atlante*.

Date allora due carte (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la funzione di transizione

$$\phi_i^j : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j) \text{ tale che } x \mapsto \phi_j \circ \pi_i(x)$$

è un omeomorfismo. Questa è l'idea che sta dietro al cambio di coordinate. Facciamo un esempio.

Sia $P \in U_i \cap U_j$: allora esistono $x_0, \dots, x_n$ e $y_0, \dots, y_n$ tali che $\exists \lambda \neq 0$ per cui $y_h = \lambda x_h$ e

$$P = [x_0, \dots, 1_i, \dots, x_n] = [y_0, \dots, 1_j, \dots, y_n]$$

Osserviamo che se $y_j = \lambda x_j = 1$, allora $\lambda = \frac{1}{x_j}$.

Allora possiamo definire un omeomorfismo di $U_i \cap U_j$ determinando l'immagine di ciascuna componente come segue

$$\phi_i^j : P = [x_0, \dots, x_n] \mapsto \frac{1}{x_j} P$$

É un omeomorfismo in quanto composizione di omeomorfismi, cioè $\phi_i^j = \phi_j \circ \pi_i$.

Proiettivizzato di uno spazio vettoriale

Abbiamo visto in corsi precedenti che ogni spazio vettoriale finitamente generato è isomorfo a un $\mathbb{K}^n$ una volta fissata una base. Ha dunque senso chiedersi se sia lecito parlare di spazio proiettivo anche su un generico V spazio vettoriale finitamente generato. Per costruirlo procediamo come segue.

Consideriamo V spazio vettoriale di dimensione $n+1$ su $\mathbb{K}$ e una relazione di equivalenza su $V - \{ 0 \}$ tale che $v \sim y$ se e solo se $\exists \lambda \neq 0$ tale che $v = \lambda w$.

Dato $v \in V$ denotiamo $[v]$ la classe di equivalenza di v in $\mathbb{P}(V)$.

Definizione 4.2 (Indipendenza proiettiva)**.** Un insieme di punti $[P_0]$,..., $[P_k] \in \mathbb{P}(V)$ si dicono *proiettivamente indipendenti* se $P_0, \dots, P_n$ sono linearmente indipendenti in V.

Notiamo che per come abbiamo definito la relazione di equivalenza, la definizione appena data è ben posta.

In particolare, fissata $\mathcal{B} = \{ u_0, \dots, u_n \}$ una base di V,

$$\{ P_0 = [u_0], \dots, P_n = [u_n] \}$$

è un insieme di punti proiettivamente indipendenti.

Osserviamo però che il cambiamento di base usuale non è più ben definito. Infatti se rimontiamo $[u_0]$, ..., $[u_n]$ in w_0, ...,$w_n \in V$, e consideriamo le coordinate di un punto $P \in V$ $(x_0, \dots, x_n)$, la proiezione di queste sarà $[x_0, \dots, x_n]$; tuttavia se ora risalissimo ad altri rappresentanti, ad esempio $\lambda_0 w_0$, ...,$\lambda_n w_n$, la proiezione delle coordinate di P rispetto a questa nuova base non è più proporzionale a $[x_0, \dots, x_n]$.

Osserviamo inoltre che se scegliamo $U \in \mathbb{P}(V)$ in modo tale che P_0,...,P_n, U siano proiettivamente indipendenti a gruppi di $n+1$ elementi, allora possiamo scegliere una base di V, u_0,..., u_n e un rappresentante di U, v che chiameremo *punto unità*, tale che $v = u_0 + \ldots + u_n$. Questo vorrà dire che

$U = [v] = [1, \dots, 1]$. In questo modo possiamo trovare una classe di basi di V che risulti "buona" per $\mathbb{P}(V)$.

Diamo alcune definizioni:

Definizione 4.3 (Riferimento proiettivo)**.** Un riferimento proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è una $n+2$-upla di elementi proiettivamente indipendenti a gruppi di $n+1$ elementi.

Ad esempio, la $n+2$-upla trovata sopra è un riferimento proiettivo:

$$\begin{pmatrix} P_0 = [1, 0, \dots, 0] \\ \dots \\ P_n = [0, \dots, 0, 1] \\ U = [1, \dots, 1] \end{pmatrix}$$

Definizione 4.4 (Sottospazio lineare)**.** Un sottoinsieme $H \subset \mathbb{P}(V)$ è un *sottospazio lineare* se è generato, ovvero se esistono $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ tali che $H = Span(P_0, \dots, P_k)$.

In particolare risulta che $H = \mathbb{P}(\pi^{-1}(H) \cup \{ 0 \})$ e continua a valere la formula di Grassmann: dati U, $V \subset \mathbb{P}(V)$ due sottospazi lineari

$$dim(U) + dim(V) = dim(U \cap V) + dim(U \cup V)$$

con la convenzione che $dim(\emptyset) = -1$.

Osserviamo che non abbiamo mai parlato di come definire una topologia su V.

Esempio 4.1. Consideriamo, secondo le notazioni precedenti, $U_3 \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Sappiamo che è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Proviamo che le proiezioni di due rette in $\mathbb{R}^2$ hanno intersezione all'infinito. Chiameremo poi questi punti *punti all'infinito.*

'Un lo so fare.

Cambiamento di riferimento proiettivo

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$.

Siano $P_0, \dots, P_n, U$ e $Q_0, \dots, Q_n, V$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Consideriamo le classi di basi tra loro proporzionali prodotte dai due riferimenti proiettivi e scegliamone una per ciascuna classe: siano $\{ u_0, \dots, u_n \}$ e $\{ v_0, \dots, v_n \}$.

Sappiamo che esiste una e una sola matrice $A \in GL(n+1)$ che manda la base $\{ u_0, \dots, u_n \}$ in $\{ v_0, \dots, v_n \}$.

Definizione 4.5 (Proiettività)**.** Definiamo *proiettività* un cambiamento di riferimento proiettivo. Denotiamo $PGL(V)$ l'insieme delle proiettività su V.

Osserviamo che è transitivo sulle $n+2$-uple di punti proiettivamente indipendenti a gruppi di $n+1$ elementi.

Osserviamo che gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ sono le immagini degli iperpiani di V privati di $v = 0$, analogamente a quanto fatto mostrando che $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Proviamo ora due risultati:

1. $H = \{ [x_0, \dots, x_n] \mid \exists a_i$ non tutti nulli tali che $a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0 \}$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$;

2. Se due equazioni rappresentano lo stesso iperpiano, allora sono proporzionali.

Dimostrazione. 1. Supponiamo $a_0 \neq 0$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Osserviamo che è invertibile e che dunque rappresenta un cambiamento di coordinate proiettive. Tuttavia osserviamo che qualsivoglia cambiamento indotto da tale matrice (visto con la moltiplicazione riga$\cdot$ matrice) porta il primo vettore di base in nella somma di tutti i vettori della base. Dunque $P \in H$ se e solo se $y_0 = a_0x_0 + \ldots + a_nx_n = 0$, ovvero i vettori di H hanno tutti la prima componente nulla e quindi H è uguale al complementare di U_0.

2. Consideriamo due polinomi $a_0x_0+\ldots+a_nx_n$ e $b_0x_0+\ldots+b_nx_n$ rappresentanti lo stesso iperpiano, ovvero che $\sum a_ix_i = 0 \Leftrightarrow \sum b_ix_i = 0$.

Supponiamo che $a_0 \neq 0$. Osserviamo che questo implica $b_0 \neq 0$, altrimenti $(1, 0, \dots, 0)$ starebbe nell'iperpiano descritto da B e non in quello di A. Dunque possiamo scrivere

$$x_0 = \sum_{i=1} \frac{a_i}{a_0} x_i = \sum_{i=1} \frac{b_i}{b_0} x_i$$

Ma allora possiamo studiare i punti di H al variare delle ultime n componenti, sapendo che per questo mitivo la prima è vincolata. Dunque $\forall i \geq 1$ otteniamo un vettore di H di coordinate $(\frac{a_i}{a_0}, 0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$, ma anche $(\frac{b_i}{b_0}, 0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$. Ma allora b_i è proporzionale ad a_i $\forall i$.

Osservazione 4.1. I polinomi non sono funzioni da $\mathbb{P}$ in $\mathbb{K}$.

Infatti se lo fossero, anche quelli omogenei di grado l lo sarebbero, ma non è vero che $p([v]) = p([\lambda v]) = \lambda^l p([v]) \in \mathbb{K}$.

Tuttavia è interessante studiare il luogo degli zeri $\Omega = \{ v \in \mathbb{P}(V) \mid p(v) = 0 \}$, questo infatti è un cono se il polinomio è omogeneo. Osserviamo che è un chiuso in quanto uguale a

$$\pi^{-1}(\Omega) = \{ z \in \mathbb{K}^{n+1} \mid p(z) = 0 \} \cap \mathbb{K}^{n+1} - \{ 0 \}$$

Esempio 4.2 (La mappa di Hopf)**.** Consideriamo $\pi : \mathbb{C}^2 - \{ 0 \} \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ tale che $S^3 \mapsto S^2$. Osserviamo che $\forall p \in^2$, $\pi^{-1}(P)$ è un S^1 di S^3.

Osservazione 4.2. Particolare funzione che fa cose. Vedi pagina 18.

Classificazione proiettiva delle quadriche

Richiamando l'osservazione 4.1, sappiamo che i polinomi omogenei non sono funzioni proiettive, ma che nonostante ciò ha senso studiare due insiemi: se si lavora su $\mathbb{C}$

$$\{ [x_0, \ldots, x_n] \mid p(x_0, \ldots, x_n) = 0 \} \text{ e } \{ [x_0, \ldots, x_n] \mid p(x_0, \ldots, x_n) \neq 0 \}$$

mentre se si è su $\mathbb{R}$

$$\{ [x_0, \ldots, x_n] \mid p(x_0, \ldots, x_n) = 0 \}, \ \{ [x_0, \ldots, x_n] \mid p(x_0, \ldots, x_n) > 0 \}$$
$$\text{e } \{ [x_0, \ldots, x_n] \mid p(x_0, \ldots, x_n) < 0 \}$$

Sappiamo inoltre che il primo insieme è chiuso.

Diamo alcune definizioni.

Richiamando quanto fatto nel caso affine a GAAL, definiamo la relazione di equivalenza di proporzionalità tra polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ e di conseguenza definiamo *ipersuperficie proiettiva* una classe di proporzionalità e una volta fissato un rappresentante, ad esempio f, definiamo *supporto* il luogo degli zeri di f (è ben definito in quanto omogeneo) e il *grado* di un'ipersuperficie come il grado di f (sempre ben definito per la relazione che abbiamo fissato).

Facciamo alcune distinzioni:

Definizione 4.6 (Quadrica, conica)**.** Dato un polinomio omogeneo di grado 2 a coefficienti in $\mathbb{K}$, definiamo *quadrica* un ipersuperficie di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Se $n = 2$, la definiamo *conica.*

Con un abuso di linguaggio identificheremo le quadriche con i propri supporti, pur non essendo queste in corrispondenza biunivoca: infatti ogni ipersuperficie determina univocamente il proprio supporto, mentre il viceversa vale solo fra ipersuperfici ridotte e supporti in $\mathbb{C}$.

Vogliamo ora classificarle a meno di proiettività, ovvero distinguere quando due quadriche sono *proiettivamente equivalenti.*

Definizione 4.7 (Equivalenza proiettiva)**.** Due quadriche $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}'$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività g tale che $\mathcal{Q}' = g(\mathcal{Q}')$.

Per quanto fatto in corsi precedenti sappiamo che date due quadriche di equazioni ${}^tXAX = 0$ e ${}^tXA'X = 0$ sono equivalenti se e solo se le matrici A e A' sono congruenti. Nel caso dell'equivalenza proiettiva, questo vale se e solo se le due matrici sono congruenti a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

Definizione 4.8 (Rango)**.** Definiamo *rango* di una quadrica di equazione ${}^tXAX = 0$ il rango di A.

Definizione 4.9 (Degenere)**.** Una quadrica si dice *degenere* se A non è invertibile.

In particolare sono proiettivamente equivalenti su $\mathbb{R}$ se A è congruente a $\pm A'$ ovvero se hanno la stessa segnatura, una volta convenuto che $i_+ \geq i_-$; mentre su $\mathbb{C}$ lo sono se e solo se hanno lo stesso rango.

Prima di iniziare la classificazione, diamo alcune definizioni utili:

Definizione 4.10 (Cono, vertice)**.** Un ipersuperficie $\mathcal{I}$ viene detta *cono* se esiste un punto $P \in \mathcal{I}$ tale che $\forall Q \in \mathcal{I} - P$ la retta congiungente P e Q è interamente contenuta in $\mathcal{I}$. Il punto P che gode di questa proprietà si dice *vertice.*

Quadriche in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$.

Su $\mathbb{C}$ sappiamo che il rango è un invariante completo di equivalenza proiettiva, dunque

Teorema 4.3 (Classificazione proiettiva delle quadriche su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)**.** *Ogni quadrica di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di rango r è proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione*

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_i^2$$

Consideriamo una quadrica degenere, sia $\mathcal{Q}$ di rango r e di equazione $p(X) =^t XAX = 0$ con $X = (x_0, \ldots, x_n)$. Possiamo già supporre che sia in forma canonica, ovvero che

$$p(X) = x_0^2 + \ldots + x_r^2$$

A partire da un'equazione di questo tipo è sempre possibile determinare in modo univoco due sottospazi:

- il sottospazio
$$H = \left\{ v = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P} \mid \begin{cases} x_{r+1} = 0 \\ \ldots \\ x_n = 0 \end{cases} \right\}$$
ha dimensione r, interseca la quadrica, ma non vi è strettamente contenuto e dunque $\mathcal{Q} \cap H$ è una quadrica di H, in questo caso non degenere;

- il sottospazio
$$H' = \left\{ v = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P} \mid \begin{cases} x_0 = 0 \\ \ldots \\ x_r = 0 \end{cases} \right\}$$
è in somma diretta con H ed è tale che $\mathcal{Q} \supset H'$.

Dati ora $P \in H$ e $R \in H'$, la retta descritta al variare di λ, μ dei punti $\lambda P + \mu R$ è interamente contenuta in $\mathcal{Q}$ se $P \in \mathcal{Q}$: infatti se consideriamo $P = [y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0] \in H \cap \mathcal{Q}$ ovvero tale che $y_0^2 + \ldots + y_r^2 = 0$, $R =$

$[0, \ldots, 0, y_{r+1}, \ldots, y_n] \in H'$ e $S = \lambda P + \mu R = [\lambda y_0, \ldots, \lambda y_r, \mu y_{r+1}, \ldots, \mu y_n]$, questo punto verifica l'equazione della quadrica, infatti

$$^tSAS = \lambda^2 y_0^2 + \ldots + \lambda^2 y_r^2 = \lambda^2(^tPAP) = 0$$

Studiamo al variare del rango alcune di queste quadriche.

Rango $\mathbf{n-1}$ Se $r = n-1$, allora la quadrica ha equazione

$$x_0^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 0$$

In questo caso H è un iperpiano e H' la proiezione della retta $Span(x_n)$, dunque un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. In questo caso è evidente che il luogo degli zeri, H', è un cono.

Rango 2 Se H è una retta, ovvero è la proiezione di un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{C}^n$ e dunque A ha rango 2, $\mathcal{Q}$ ha equazione del tipo

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$$

e i punti

$$(i, 1, 0 \ldots, 0),\ (-1, i, 0, \ldots, 0) \in H \cap \mathcal{Q}$$

dunque qualsiasi retta congiungente uno di questi punti a un punto di H' è interamente contenuta in $\mathcal{Q}$. Notiamo che ogni punto di H' è un vertice per la quadrica $H \cap \mathcal{Q}$.

Rango 1 Se $H = \{ [1, 0, \ldots, 0] \} \in \mathbb{P}$, allora $H' = \{ v \in \mathbb{P} \mid x_0 = 0 \}$. Ma allora $\mathcal{Q}$ è un piano doppio di equazione

$$x_0^2 = 0$$

Le quadriche non degeneri sono tutte proiettivamente equivalenti, mediante cambio di coordinate, a quella di equazione

$$x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

la cui matrice è l'identità di $M(n+1, \mathbb{C})$.

Su $\mathbb{R}$ il rango non è più un invariante completo, ma lo è la segnatura, una volta stabilito che $i_+ \geq i_-$. Questo deriva dal fatto che due quadriche reali sono proiettivamente equivalenti se e solo se le loro matrici sono congruenti a meno di un fattore moltiplicativo ± 1. Quindi vale

Teorema 4.4 (Classificazione proiettiva delle quadriche su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$)**.** *Ogni quadrica di* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *di segnatura* $(p, r-p, n+1-r)$ *è proiettivamente equivalente alla quadrica di equazione*

$$\sum_{i=0}^{p-1} x_i^2 - \sum_{i=p}^{r-1} x_i^2 = 0$$

Come fatto nel caso complesso, consideriamo una quadrica reale degenere di segnatura $(p, r-p, n+1-r)$. Anche qui possiamo supporre che sia già in forma canonica e che quindi abbia equazione

$$\sum_{i=0}^{p-1} x_i^2 - \sum_{i=p}^{r-1} x_i^2 = 0$$

Definiamo nello stesso modo H e H' e osserviamo che la quadrica $\mathcal{Q} \cap H$ è una quadrica non degenere di H, il cui supporto è un cono di vertice qualsivoglia punto di H'.

Vediamo alcune quadriche non degeneri:

Segnatura $(\mathbf{n+1, 0, 0})$ Se la quadrica $\mathcal{Q}$ ha matrice di segnatura $(n+1, 0, 0)$, allora è proiettivamente equivalente a quella di equazione

$$x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

Tuttavia in $\mathbb{R}$ questo polinomio non ha radici, dunque il supporto di $\mathcal{Q}$ è vuoto. Con un abuso di linguaggio la chiameremo *quadrica vuota*.

Segnatura $(\mathbf{n, 1, 0})$ Se la segnatura della matrice della quadrica $\mathcal{Q}$ è $(n, 1, 0)$ allora avrà equazione del tipo

$$x_0^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$$

Osserviamo che il supporto di questa quadrica è omeomorfo a S^{n-1}

Quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$

Buttiamoci nello spazio proiettivo tridimensionale. Siccome le abbiamo già classificate proiettivamente, cerchiamo di farlo anche topologicamente.

Su $\mathbb{C}$ le quadriche non degeneri sono tutte omeomorfe.

Infatti la quadrica (canonica) di equazione $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 0$, secondo la proiettività di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ indotta dall'isomorfismo di $\mathbb{C}^4$

$$f : \begin{cases} x_0 \mapsto x_0 \\ x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto ix_2 \\ x_3 \mapsto ix_3 \end{cases}$$

è omeomorfa a quella di equazione $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ ovvero a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2 \times S^2$ (sarebbe da dimostrare).

Questo ci mostra anche che tutte le quadriche non degeneri siano rigate, qualsiasi cosa questo voglia dire.

Su $\mathbb{R}$, elenchiamo quelle non degeneri a seconda della loro segnatura.

Se $\mathcal{Q}$ ha segnatura $(4, 0, 0)$, allora avrà equazione $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ che in $\mathbb{R}^4$ non ha soluzioni e dunque il suo supporto è vuoto.

Se ha segnatura $(3, 1, 0)$, abbiamo una quadrica di equazione $x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 0$. Mostriamo che è omeomorfa alla sfera S^2.

Osserviamo che dato $U_3 = \{ [x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 \} (\mathbb{R}) \mid x_3 \neq 0 \ \mathcal{Q} \subset U_3$, infatti se $x_3 = 0$ non avrei soluzioni reali. Dunque possiamo considerare l'omeomorfismo da $U_3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f : \begin{cases} \frac{x_0}{x_3} \mapsto x \\ \frac{x_1}{x_3} \mapsto y \\ \frac{x_2}{x_3} \mapsto z \end{cases}$$

e vediamo che $f(\mathcal{Q}) = S^2$.

Se ha segnatura $(2, 2, 0)$ abbiamo una quadrica di equazione $x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2 = 0$. Mostriamo che è omeomorfa al toro $S^1 \times S^1$.

Sono conti che non ho voglia di leggere.

Se ho capito bene, sono in classe di omeomorfismo diverse a seconda della carta in cui le leggiamo, ovvero a seconda della posizione di alcuni piani.

Capitolo 5

Successioni e completezza

Successioni e assiomi di numerabilità

Definizione 5.1 (Successione)**.** Definiamo *successione* a valori in uno spazio topologico X, una funzione $f : \mathbb{N} \to X$ tale che $n \mapsto x_n$.

Definizione 5.2 (Sottosuccessione)**.** Data $f : \mathbb{N} \to X$ una successione a valori in uno spazio topologico e una funzione $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, definiamo *sottosuccessione* una qualsiasi funzione $f \circ i : \mathbb{N} \to X$ tale che $n \mapsto x_{i_n}$.

Enunciamo ora i due assiomi di numerabilità:

Assioma ($N1$)**.** Uno spazio topologico si dice *primo numerabile*, o $N1$, se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Assioma ($N2$)**.** Uno spazio topologico si dice *a base numerabile* o $N2$ se ammette una base della topologia numerabile.

Un esempio di spazio topologico non $N1$ è il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dell'esempio 3.8.

Varietà e varietà differenziabili Ora che abbiamo enunciato gli assiomi di numerabilità, diamo alcune definizioni:

Definizione 5.3 (Varietà)**.** Una *varietà topologica* è uno spazio topologico $T2$ e $N2$ localmente omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5.4 (Varietà differenziabile)**.** Una varietà si dice *differenziabile di classe C^k* se la funzione di transizione è un omeomorfismo di classe C^k.

Definizione 5.5 (Diffeomorfismo)**.** Un omeomorfismo di classe C^k con inversa di classe C^k si dice *diffeomorfismo*.

Dopo aver dato le definizioni di successione, viene immediato definire i punti limite e di accumulazione:

Definizione 5.6 (Punto limite)**.** Sia $\{ a_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio topologico X. Diciamo che $p \in X$ è un *punto limite* per $\{ a_n \}$, o equivalentemente che $\{ a_n \}$ converge a p, se $\forall U \in \mathcal{I}(x)\ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ si ha che $a_n \in U$ (definitivamente).

Definizione 5.7 (Punto di accumulazione)**.** Sia $\{ a_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio topologico X. Diciamo che $p \in X$ è un *punto di accumulazione* per $\{ a_n \}$ se $\forall U \in \mathcal{I}(x)$, $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N$ tale che $a_n \in U$ (frequentemente).

Osservazione 5.1. Osserviamo che un punto limite è un punto di accumulazione, ma non è vero il viceversa.

Osservazione 5.2. Per un punto di aderenza P esiste una sotto-successione che vi converge se P ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Non si capisce.

Proviamo un importante risultato dimostrato anche ad analisi matematica I, ovvero

Proposizione 5.3 (Compattezza topologica $\Rightarrow$ compattezza per successioni)**.** *Sia $\{ a_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in un compatto K. Allora ammette un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Consideriamo al variare di $m \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$C_m = \{ a_n \in K \mid n \geq m \}$$

Osserviamo che la famiglia dei C_m ha la proprietà dell'intersezione finita e siccome siamo in un compatto, l'intersezione $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m$ è non vuota. Si può vedere su *Manetti, Esercizio 4.25, pag. 81.* Evidentemente $x \in \bigcap C_m$ è il punto cercato. □

Osservazione 5.4. Il sottospazio $\pi(\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{ 0 \} \mid v_0 \neq 0 \})$, che sappiamo essere omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, è denso in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Assiomi di separabilità e completezza

Ora torniamo un attimo indietro e ricapitoliamo, completando, l'elenco degli assiomi di separabilità.

Assioma ($T1$)**.** Uno spazio topologico si dice $T1$ se *la topologia distingue i punti*, ovvero se ogni coppia di punti distinti ammette un intorno dell'uno che non contiene l'altro.

Assioma ($T2$)**.** Uno spazio topologico si dice $T2$ o *di Hausdorff* se punti distinti ammettono intorni disgiunti.

Definizione 5.8 (Regolare, completamente regolare)**.** Uno spazio topologico si dice *regolare* se per ogni chiuso C e per ogni punto $p \in C$ ammettono due aperti disgiunti. Si dice *completamente regolare* se per ogni chiuso C e per ogni punto $p \in C$ esiste una funzione continua $f : X \to X$ tale che $f(p) = 0$ e $f(C) = 1$.

Assioma ($T3$)**.** Uno spazio topologico si dice $T3$ se è $T0$ ed è regolare.

Assioma ($T3^1/_2$)**.** Uno spazio topologico si dice $T3$ se è $T0$ ed è completamente regolare.

Definizione 5.9 (Normale, completamente normale)**.** Uno spazio topologico si dice *normale* se per ogni coppia di chiusi C, D ammettono due aperti disgiunti A e B tali che $A \supset C$ e $B \supset D$. Si dice *completamente normale* se per ogni coppia di chiusi C, D esiste una funzione continua $f : X \to X$ tale che $f(C) = 0$ e $f(D) = 1$.

Assioma ($T4$)**.** Uno spazio topologico si dice $T4$ se è $T1$ ed è normale.

Un risultato importante è il seguente

Lemma 5.5 (Urysohn)**.** *Uno spazio normale è completamente normale.*

Tale lemma è conseguenza dell'omonimo teorema

Teorema 5.6 (Urysohn)**.** *Ogni spazio normale a base numerabile è metrizzabile.*

Una dimostrazione molto intuitiva del lemma e simile a quella proposta da Broglia si trova su Wikipedia e si procede "raffinando" per così dire una funzione definita a gradoni.

Ora studiamo un'altra importante proprietà degli spazi metrici, ovvero la completezza. Prima abbiamo bisogno di caratterizzare alcune successioni

Definizione 5.10 (Successione di Cauchy)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{ a_n \}$ una successione a valori in X. Diciamo che è *di Cauchy* se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$.

Definizione 5.11 (Spazio completo)**.** Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy a valori in tale spazio è convergente.

Tuttavia è interessante che ogni spazio metrico può essere completato.

Costruiamolo come segue: sia (X, d) uno spazio metrico, definiamo su di esso una relazione di equivalenza tra successioni di Cauchy: due successioni di Cauchy sono equivalenti se convergono a uno stesso punto di X. L'esistenza (e l'unicità) di tale spazio viene dimostrata qui.

Proposizione 5.7. *Il quoziente di uno spazio metrico con la relazione appena descritta è uno spazio completo.*

Enunciamo alcuni risultati

Teorema 5.8 (Baire)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Se $\{ C_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di chiusi senza parte interna, allora $C = \bigcup C_n$ è senza parte interna.*

Dimostrazione. Da includere. □

Osservazione 5.9. I complementari dei C_i sono degli Ω_i aperti e densi. Dunque l'enunciato è equivalente a dire che

$$\bigcap_i \Omega_i \neq \emptyset$$

Osservazione 5.10. Osserviamo che in questo caso ci sono alcune differenza rispetto al Manetti. Nel testo vengono definiti due tipi di sottoinsiemi di uno spazio topologico: quelli *rari*, la cui chiusura ha parte interna vuota, e quelli *magri*, ovvero contenuti in un unione numerabile di sottoinsiemi magri. Date queste definizioni viene definito *spazio di Baire* una qualsiasi spazio metrico in cui ogni sottoinsieme magro ha parte interna vuota, ovvero è uno spazio in cui vale il teorema di Baire.

Sul testo si caratterizzano come spazi di Baire non solo quelli metrici e completi, ma anche quelli localmente compatti.

In articoli i sottoinsiemi rari vengono definiti *nowhere dense* e quelli magri *meager*.

Proviamo alcune proprietà interessanti:

Proposizione 5.11. *Se X è uno spazio topologico compatto e $T2$, allora è $T4$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che è $T1$ e normale, ovvero che ogni coppia di chiusi disgiunti ammette una coppia di aperti disgiunti che li contengono.

In quanto $T2$, allora è per definizione $T1$.

Siano C, D due chiusi disgiunti di X. Fissato $x_i \in C$, $\forall y \in D$ questi due punti, che sono distinti in quanto appartenenti a insiemi disgiunti, ammettono intorni disgiunti in quanto lo spazio è $T2$: chiamiamoli $U \ni x$ e $V_y^x \ni y$. Osserviamo che $\{ V_y^x \}_{y \in D}$ è un ricoprimento aperto di D e per compattezza possiamo estrarne un sottoricoprimento finito. Sia questo $\{ V_1^x, \dots, V_n^x \}$.

Ora definiamo $\forall x \in C$ $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ che è ancora un intorno di x in quanto intersezione finita di intorni di x. Osserviamo che $\{ U_x \}_{x \in C}$ è un ricoprimento aperto di C e dunque ammette un sottoricoprimento finito, sia $\{ U_1, \dots, U_m \}$.

$A = \bigcup U_j$ e $B = \bigcup V_i$ sono due aperti disgiunti contenenti i chiusi.

Abbiamo supposto che gli intorni fossero aperti. □

Proposizione 5.12. *Sia X uno spazio $T2$ e $\{ A_n \}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X compatti e connessi tali che $A_{n+1} \subset A_n$. Allora $\bigcap A_n$ è connessa.*

Questo esercizio è stato chiesto al primo compitino dell'anno 2016.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che gli A_n sono chiusi, in quanto compatti in un $T2$.

Supponiamo che l'intersezione non sia connessa: allora esistono C, D chiusi non banali e disgiunti di $\bigcap A_n$ tali che $\bigcap A_n = C \cup D$. Siccome $\bigcap A_n$ è intersezione arbitraria di chiusi, è un chiuso, ma allora C e D sono chiusi disgiunti di X.

Siccome $\bigcap A_n \subset A_1$, in particolare C e D sono chiusi di A_1 che è uno spazio compatto e $T2$, dunque per la proposizione precedente $T4$. Siano C' e D' i due aperti di A_1 disgiunti tali che $C \subset C'$ e $D \subset D'$. Questo implica che

$$\bigcap A_n \subset C' \cup D'$$

Riflettiamo un attimo. Dato A_1 e un suo aperto $C' \cup D'$ contenente $\bigcap A_n$ vale che

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_1 - A_i) \cup (C' \cup D') = A_1$$

ovvero è un ricoprimento aperto di A_1, ma in quanto compatto ammette un sotto-ricoprimento finito:

$$\{\,(A_1 - A_{1_1}), \ldots, (A_1 - A_{n_1}), C' \cup D'\,\}$$

Questo vuol dire che $A_{1_1} \cap \ldots \cap A_{n_1} \subset C' \cup D'$, è intersezione finita di connessi con intersezione non vuota e dunque connesso, ma allora o è contenuto in C' o in D', ovvero che $\bigcap A_n \subset C'$ o $\bigcap A_n \subset D'$, ma questo è assurdo in quanto stavamo supponendo che C e D sconnettessero $\bigcap A_n$. □

Proposizione 5.13. *Sia X uno spazio topologico compatto e di $T2$. Dato $A \subset X$, proviamo che la famiglia*

$$\{\,Y \subset X \mid Y \supset A \text{ ed è compatto e connesso}\,\}$$

ammette elementi minimali rispetto all'inclusione.

Dimostrazione. Basta vedere che ogni catena linearmente ordinata rispetto all'inclusione, ammette minorante. Concludere per Lemma di Zorn. □

Capitolo 6

Gruppi di omeomorfismi

Dato X uno spazio topologico, denotiamo $Omeo(X)$ l'insieme degli omeomorfismi di X in se stesso. Osserviamo che dotato della composizione è un gruppo.

Dato $G < Omeo(X)$, definiamo la seguente relazione di equivalenza su X: $x \sim y$ se e solo se $\exists g \in G$ tale che $y = g(x)$.

In questo caso le classi di equivalenza vengono definite *orbite*.

Consideriamo l'insieme di queste, ovvero l'insieme quoziente dotato della topologia quoziente usuale. Denotiamolo X/G.

Proposizione 6.1. *La proiezione al quoziente $\pi : X \to X/G$ è un'applicazione aperta e, se G è finito, è anche chiusa.*

Dimostrazione. Sia U un aperto di X, proviamo che $\pi(U)$ è un aperto di X/G. Per definizione di topologia quoziente, questo vale se e solo se $\pi^{-1}(\pi(U))$ è aperto in U. Ma a questo punto sapendo che $\pi(U) = \bigcup_{u \in U} orb(u) = \bigcup_{u \in U} \{ y \in X \mid \exists g \in G \text{ tale che } y = g(u) \}$

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{ x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U) \} = \\ &= \{ x \in X \mid \exists u \in U,\ \exists g \in G \text{ tale che } x = g(u) \} = \\ &= \bigcup_{g \in G} \{ x \in X \mid \exists u \in U \text{ tale che } x = g(u) \} = \\ &= \bigcup_{g \in G} g(U) \end{aligned}$$

che è aperto in quanto unione di aperti dato che $g(U)$ è omeomorfo a U e dunque aperto in X.

Supponiamo G finito e consideriamo C un chiuso di X. Proviamo che $\pi(C)$ è chiuso nella topologia quoziente. Analogamente a prima otteniamo che

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g(C)$$

che è chiuso in quanto unione finita (in quanto G è finito) di chiusi.

Teorema 6.2. *Sia X uno spazio topologico $T2$ e $G < Omeo(X)$. Se esiste un aperto di X che interseca tutte le orbite e l'insieme*

$$H = \{\, g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

è finito, allora X/G è $T2$.

Dimostrazione. Fissiamo p, $q \in X/G$. Per definizione esistono x, $y \in X$ tali che $\pi(x) = p$ e $\pi(y) = q$.

Consideriamo $H = \{\, g_1, \dots, g_n \,\}$ e $\forall i = 1, \dots, n$ le coppie di intorni disgiunti $U_i \ni x$ e $V_i \ni g_i(y)$.

Costruiamo $U = A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i)$ tale che $x \in U$ e dunque, in quanto intersezione finita di intorni, un intorno di x e $V = A \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i))$ tale che $y \in V$ e, come prima, un suo intorno.

Osserviamo che $\forall g \notin H$ si ha che $U \cap g(V) = \emptyset$, invece se $\exists i = 1, \dots, n$ tale che $g = g_i$, allora

$$U \cap g(V) \subset U_i \cap g(g^{-1}(V_i)) \subset U_i \cap V_i = \emptyset$$

Mostriamo che i saturati di U e V sono gli intorni cercati. A questo punto abbiamo che

$$\pi(U) = \bigcap_{g \in G} g(U) \ni p \text{ e } \pi(U) = \bigcap_{h \in G} h(V) \ni q$$

Supponiamo per assurdo non siano disgiunti, ovvero che

$$\bigcap_{g \in G} g(U) \cap \bigcap_{h \in G} h(V) = \bigcap_{g,h \in G} g(U) \cap h(V) \neq \emptyset$$

ma allora $\exists g, h \in G$ tali che

$$U \cap g^{-1}h(V) \neq \emptyset$$

Assurdo. Quindi $X\big/G$ è $T2$. $\square$

Parte II

Omotopia

Capitolo 7

Prime definizioni

Definizione 7.1 (Localmente connesso)**.** Uno spazio si dice *localmente connesso* se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi.

Analogamente si definisce uno spazio *localmente connesso per archi.*

Dato uno spazio localmente connesso è allora particolarmente interessante studiare un particolare suo quoziente. Sia X uno spazio localmente connesso, definiamo la seguente relazione d'equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \alpha \in C(X) \text{ tale che } \alpha : [0,1] \to X \text{ e } \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y$$

Definiamo $\pi_0(X) = X/_\sim$.

A questo punto definiamo una relazione anche fra applicazioni continue:

Definizione 7.2 (Applicazioni omotope)**.** Due applicazioni continue $f, g : X \to Y$ spazi topologici si dicono *omotope* se esiste un'applicazione continua $F : X \times [0,1] \to X$ tale che

1. $F(x, 0) = f(x)$;
2. $F(x, 1) = g(x)$.

L'applicazione F viene definita *omotopia.*

Definizione 7.3 (Equivalenza omotopica)**.** Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *equivalenza omotopica* se esiste $g : Y \to X$ tale che $f \circ g \sim Id_X$ e $g \circ f \sim Id_Y$.

I due spazi si dicono *omotopicamente equivalenti.*

Definizione 7.4 (Retrazione)**.** Dato X spazio topologico e $Y \subset X$, definiamo *retrazione* un'applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r|_Y = id_Y$.

Se una data retrazione appartiene alla classe d'equivalenza (rispetto all'omotopia) dell'identità, allora diremo che è una *retrazione per deformazione*. Inoltre l'omotopia, che definiamo *deformazione*, che porta l'identità in r lascia fissi tutti i punti di Y.

Definizione 7.5 (Contrattile)**.** Uno spazio topologico si definisce *contrattile* se è omotopicamente equivalente ad un punto.

Ad esempio i connessi di $\mathbb{R}^n$ sono contrattili.

Lezioni con Lelli-Chiesa. Febbraio, 28 2017

Il gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico, siano $a, b \in X$ due punti. Denotiamo

$$\Omega(X, a, b) = \{ \alpha : [0, 1] \to X \mid \alpha(0) = a, \alpha(1) = b \text{ e } \alpha \text{ è continua} \}.$$

Notiamo che sono ben definite due applicazioni:

- l'inversione, ovvero $i : \Omega(X, a, b) \to \Omega(X, b, a)$ tale che $\forall t \in [0, 1]$ si ha $i(\alpha)(t) = \alpha(1 - t)$;
- la giunzione, ovvero $* : \Omega(X, a, b) \times \Omega(X, b, c) \to \Omega(X, a, c)$ tale che $\forall t \in [0, 1]$

$$*(\alpha, \beta)(t) = \alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Osserviamo che $i^2 = id_\Omega$ e che le due operazioni commutano, ovvero

$$i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha).$$

Siamo interessati a rendere questo insieme un gruppo, perciò poniamo $a = b$ per rendere l'inversione un'operazione interna. Tuttavia non è ancora associativa. Definiamo allora la seguente relazione:

Definizione 7.6 (Omotopia di cammini)**.** Siano α e β due cammini continui in uno spazio topologico X. Li definiamo *omotopicamente equivalenti* e denotiamo $\alpha \sim \beta$ se esiste una applicazione continua $F : I \times I \to X$ tale che

1. $F(t,0) = \alpha(t)$ per ogni $t \in I$;
2. $F(t,1) = \beta(t)$ per ogni $t \in I$;
3. $F(0,s) = a$ e $F(1,s) = b$ per ogni $s \in I$.

Vediamone alcune proprietà:

- tale relazione è di equivalenza;
- commuta con i e $*$: infatti se $\alpha \sim \beta$, $i(\alpha) \sim i(\beta)$ e se $\alpha_1 \sim \alpha_2$ e $\beta_1 \sim \beta_2$, allora $\alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 \sim \beta_2$;
- se 1_a è il cammino costante in a, allora $1_a * alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$;
- per ogni α, $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$ e $i(\alpha) * \alpha \sim 1_b$.

Osservazione 7.1. Se abbiamo due cammini $\alpha, \beta : I \to X$ tali che $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ e X è convesso, allora $F : I^2 \to X$ tale che

$$F(x,t) = (1-t) \cdot \beta(x) + t \cdot \alpha(x)$$

è sempre un'omotopia fra α e β.

Ricordiamo che fra applicazioni continue vale la seguente definizione:

Definizione 7.7 (Omotopia di applicazioni)**.** Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue. Si dicono *omotope* se esiste $F : X \times I \to Y$ continua tale che

$$F(x,0) = f(x) \text{ e } F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

Definizione 7.8 (Equivalenza omotopica)**.** Un'applicazione $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica se è continua ed esiste $g : Y \to X$ tale che $f \circ g \sim Id_X$ e $g \circ f \sim Id_Y$.

Abbiamo allora tutti gli strumenti per dare la seguente definizione:

Definizione 7.9 (Gruppo fondamentale)**.** Sia X uno spazio topologico e $a \in X$. Definiamo *gruppo fondamentale di* X *rispetto ad* a l'insieme

$$\Omega(X, a, a)/\sim := \pi_1(X, a) = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, a, a) \}.$$

In questo insieme definiamo l'operazione di inversione $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$ e di giunzione $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

Per le proprietà descritte sopra, $\pi_1(X,a)$ è un gruppo e il suo elemento neutro è $[1_a]$.

Osserviamo che $\pi_1(X,a)$ non varia per ogni elemento appartenente alla componente connessa per archi di a, dunque per brevità se X è uno spazio connesso per archi lo denoteremo $\pi_1(X)$. Infatti se $b \in X$ è nella stessa componente connessa di a, esiste $\gamma : [0,1] \to X$ continua tale che $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, perciò possiamo definire

$$\gamma_\# : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b) \text{ tale che } [\alpha] \mapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma].$$

$$\alpha \longmapsto \begin{tikzcd} a \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & b \arrow[l, bend right, "i(\gamma)"'] \end{tikzcd}$$

Tale applicazione è un omomorfismo di gruppi bigettivo.

Definizione 7.10 (Semplicemente connesso)**.** Definiamo uno spazio topologico X *semplicemente connesso* se è connesso per archi e $\pi_1(X) = \{ 0 \}$, cioè è il gruppo banale.

Esempio 7.1. Ogni sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso. Sia X un convesso di $\mathbb{R}^n$, proviamo che dato $a \in X$, $\forall \alpha \in \Omega(X,a,a)$ $\alpha \sim 1_a$. Costruiamo un'omotopia $F : I \times I \to X$ tale che

1. $F(t,0) = \alpha(t)$ per ogni $t \in I$;
2. $F(t,1) = 1_a(t) = a$ per ogni $t \in I$;
3. $F(0,s) = a$ e $F(1,s) = b$ per ogni $s \in I$.

Ora $F : (t,s) \mapsto (1-s)\cdot\alpha(t) + s\cdot a$, verifica le proprietà richieste.

Vediamo alcune proprietà del gruppo fondamentale π_1.

1. Se X e Y sono due spazi topologici, allora
$$\pi_1(X \times Y, (a,b)) = \pi_1(X,a) \times \pi_1(Y,b);$$
2. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, $a \in X$ e $b = f(a) \in Y$. Esiste ed è un omomorfismo di gruppi l'applicazione
$$f_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y,b) \text{ tale che } [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha];$$

3. Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue omotope, $a \in X$ e $t \in [0,1]$. Se F è l'omotopia fra f e g, allora possiamo definire $\gamma : [0,1] \to Y$ tale che $\gamma(t) = F(a,t)$, cioè $\gamma \in \Omega(Y, f(a), g(a))$. Di conseguenza è bene definita $\gamma_\# : \pi_1(Y, f(a)) \to \pi_1(Y, g(a))$ e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y,f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\#"'] & & \pi_1(Y,g(a)) \end{tikzcd}$$

Ciò implica alcuni fatti interessanti:

(a) se f è omotopa ad una funzione costante, allora f_* è nulla;

(b) se $f \sim Id_X$, allora f_* è un isomorfismo di gruppi;

(c) se f è un'equivalenza omotopica, sostituendo nel diagramma con la funzione g con quella della definizione di equivalenza, abbiamo che f_* è un isomorfismo;

(d) se f è omotopa ad un omeomorfismo, in particolare è un'equivalenza omotopica e di conseguenza f_* è un isomorfismo.

Calcolare il π_1

Diamo degli strumenti per determinare il π_1 di uno spazio topologico dato.

Definizione 7.11 (Retratto)**.** Dato uno spazio topologico X e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme, questo si definisce *retratto* se esiste un'applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r|_Y = Id_Y$. In particolare r si definisce *retrazione.*

Osservazione 7.2. Osserviamo che se Y è un retratto, l'applicazione di inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ è tale che i_* è iniettiva: infatti $r \circ i = Id_Y$ e di conseguenza $r_* \circ i_* = Id_{\pi_1(Y)}$. Dunque i_* deve essere iniettiva.

Definizione 7.12 (Retratto per deformazione)**.** Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Y si dice *retratto per deformazione* se esiste $R : X \times I \to Y$ continua tale che

1. $R(x,0) = x$ per ogni $x \in X$;
2. $R(x,1) \in Y$ per ogni $x \in X$;
3. $R(y,t) = y$ per ogni $y \in Y$ e per ogni $t \in [0,1]$.

In particolare è una retrazione.

Lemma 7.3. *Se Y è un retratto per deformazione di uno spazio topologico X, allora*

$$\pi_1(X) = \pi_1(Y).$$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che i_* è un isomorfismo. È iniettiva in quanto $r = R(x,1)$ è una retrazione. Ma in particolare $i \circ r \sim Id_X$ e dunque i_* è surgettiva. □

Esempio 7.2. Dato $X = \mathbb{R}^n - \{ 0 \}$, un suo retratto per deformazione è S^{n-1}. Ricordiamo la definizione

$$S^{n-1} = \left\{ v = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \right\}.$$

La retrazione per deformazione è $F : X \times I \to X$ tale che

$$(x,t) \longmapsto (1-t)x + t\frac{x}{||x||}$$

l'applicazione che 'manda tutto nel versore corrispondente'. Ne segue che hanno lo stesso π_1. Per calcolarlo abbiamo bisogno del seguente risultato:

Teorema 7.4 (di Van Kampen)**.** *Sia X uno spazio topologico e A, B due suoi aperti connessi per archi tali che $A \cap B$ è connesso per archi. Fissato $x_0 \in A \cap B$, se indichiamo $F : A \hookrightarrow X$ e $G : B \hookrightarrow X$, allora $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $F_*(\pi_1(A, x_0))$ e $G_*(\pi_1(B, x_0))$.*

Corollario 7.5. *Nelle stesse ipotesi, se A e B sono semplicemente connessi, allora lo è anche X.*

Facciamo alcuni esempi.

Esempio 7.3 (Gruppo fondamentale della sfera)**.** $\pi_1(S^n) = \{ 0 \}$ per $n \geq 2$. Per $n = 1$ lo vedremo in seguito.

Grazie alla proiezione stereografica, sappiamo che $S^n - \{ v \} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Siano P e Q due punti distinti di S^n. Definiamo $A = S^n - \{ P \}$ e $B = S^n - \{ Q \}$, sappiamo che sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ e di conseguenza sono semplicemente connessi. Ora $A \cap B = S^n - \{ P, Q \}$ e dunque è omeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{ p.to \}$ e dunque connesso per archi. Perciò possiamo concludere che $\pi_1(S^n)$ è banale.

Esempio 7.4 (Gruppo fondamentale dello spazio proiettivo complesso.)**.** Calcoliamo $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ e proviamo che è banale.

Dimostriamolo per induzione su n. Ricordiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1}/\sim$ e dunque se $n = 0$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{ x \}$ e di conseguenza il suo gruppo fondamentale è banale.

Sia vero per $n-1$. Proviamolo per n. Cerchiamo due aperti la cui intersezione è connessa per archi su cui usare Van Kampen. Un aperto lo definiamo nel modo seguente, date le coordinate omogenee $v = [x_0, \dots, x_n]$ è il primo sotto-spazio fondamentale

$$A = \{ v \mid x_0 \neq 0 \} \cong \mathbb{C}^n.$$

Sappiamo che $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e di conseguenza è semplicemente connesso. Il secondo aperto lo definiamo in modo tale da utilizzare l'ipotesi induttiva, in particolare vogliamo che ammetta un retratto per deformazione omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Definiamo

$$B = \{ [1, 0, \dots, 0] \}^C .$$

In particolare $A \cap B = A - B^C = A - \{ [1, 0, \dots, 0] \}$, dunque è omeomorfo a $\mathbb{R}^{2n} - \{ p.to \}$ e perciò connesso. Resta da provare che B ammette un retratto per deformazione semplicemente connesso. SIa

$$B_1 = \{ v \in B \mid x_0 = 0 \} .$$

La retrazione che spacca il problema è $F : B \times I \to B$ tale che

$$v = [x_0, x_1, \dots, x_n] \longmapsto [(1-t)x_0, x_1, \dots, x_n].$$

B_1 è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ tramite la proiezione sulle ultime n coordinate. Dunque per Van Kampen abbiamo la tesi.

Osserviamo che non è possibile replicare la stessa dimostrazione per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, in quanto $\mathbb{R}^n - \{ p.to \}$ è sconnesso per $n = 1$.

Esercizio 7.1. *Provare che $\mathbb{R}^n - V$, dove $n \geq 3$ e V è un sottospazio di dimensione k: $0 \leq k \leq n-3$, è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Possiamo riscrivere $\mathbb{R}^n - V$ come segue:

$$\mathbb{R}^k - (\mathbb{R}^{n-k} \{ 0 \})$$

cosicché le uniche n-uple mancanti sono quelle con $n-k$ zeri in coda, cioè gli elementi di V. Ma ora $\pi_1(\mathbb{R}^n - V) \cong \pi_1(\mathbb{R}^k) \times \pi_1(\mathbb{R}^{n-k} - \{ 0 \})$ Dunque per quanto visto precedentemente, cioè che $\mathbb{R}^k$ è semplicemente connesso per ogni k concludiamo che

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - V) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n-k} - \{ 0 \}).$$

Ma ora per ipotesi $n-k \geq 3$ e dunque è semplicemente connesso. □

Esercizio 7.2. *Provare che $\mathbb{R}^n$ meno un numero finito di punti, per $n \geq 3$ è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione. Per $k = 1$, $\mathbb{R}^n - \{ \, p.to \, \}$ è semplicemente connesso. Proviamolo. Possiamo supporre a meno di omeomorfismo che $p.to = 0$, proviamo che S^{n-1} è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^n - Set0$: esprimiamo $x \in \mathbb{R}^n$ come $x = ||x|| \cdot \dfrac{x}{||x||}$ e poniamo $v = \dfrac{x}{||x||} \in S^{n-1}$ e $\rho = ||x|| \in \mathbb{R}$, allora la deformazione è $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$x = \rho \cdot v \mapsto (1-t) \cdot x + t \cdot v.$$

In effetti è una retrazione che lascia fissa la sfera due-dimensionale che dato l'esempio 7.3 sappiamo essere semplicemente connesso.

Assumiamo ora che $\mathbb{R}^n - \{ \, k-1 \text{ p.ti} \, \}$ sia semplicemente connesso. Proviamo che togliendo un ulteriore punto resta semplicemente connesso.

A meno di omeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ possiamo supporre che $k-1$ punti siano dentro la sfera S^{n-1} e che uno solo, p, resti al di fuori.

Consideriamo H il piano dei punti equidistanti dal versore $\dfrac{p}{||p||}$ e da p.

Consideriamo i due seguenti aperti:

$$I = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid d_{S^n}(x) > d_{\{\, p \,\}}(x) \, \right\}$$

e

$$J = \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid d_{S^n}(x) < d_{\{\, p \,\}}(x) \, \right\}.$$

Sono aperti in quanto contro-immagini rispetto alla funzione $d_{S^n} - d_{\{\, p \,\}}$, che sappiamo essere continua in quanto lo è d_X $\forall X \subset \mathbb{R}^n$, delle semirette $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$. Ingrossandoli un po', possiamo dire che $I \cup J = \mathbb{R}^n$ e che la loro intersezione è connessa per archi e retraibile per deformazione ad H. Inoltre sia I che J sono connessi per archi. Di conseguenza per Van Kampen, sappiamo che se $x_0 \in I \cap J$, $\pi_1(X)$ è generato da $i_*(\pi_1(I, x_0))$ e $j_*(\pi_1(J, x_0))$ dove i e j sono le banali inclusioni. Tuttavia I e J sono semplicemente connessi, per ipotesi induttiva dunque $\pi_1(X)$ è banale. □

Concludiamo con la caratterizzazione dei gruppi fondamentali di alcuni gruppi topologici. Ricordiamo la definizione.

Definizione 7.13 (Gruppo topologico)**.** Definiamo *gruppo topologico* un gruppo G dotato di una topologia tale per cui le applicazioni di moltiplicazione e inversione sono continue.

Esempio 7.5. Alcuni esempi sono $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ e $SO(n,\mathbb{R})$ e gli analoghi su $\mathbb{C}$ $U(n)$ e $SU(n,\mathbb{R})$ con la topologia indotta dall'isomorfismo con $\mathbb{R}^{n^2}$. Gli unici non connessi sono $GL(n,\mathbb{R})$ e $O(n)$, basta vedere le controimmagini di $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$ rispetto all'applicazione determinante.

Teorema 7.6. *Se $(G,\cdot)$ è un gruppo topologico, allora $\pi_1(G)$ è abeliano.*

Dimostrazione. Siano $\alpha,\beta \in \Omega(G,e,e)$, dobbiamo provare che $[\alpha*\beta]=[\beta*\alpha]$. Consideriamo $\Phi : I\times I \to G$ tale che $(t,s)\mapsto \alpha(t)\cdot\beta(s)$, cioè stiamo 'stendendo' i cammini α e β sul quadrato I^2. Se definiamo $c_1 : I \to I^2$ e $c_2 : I \to I^2$ tali che

$$c_1 : t \mapsto \begin{cases} (2t,0) & \text{se } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ (1,2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}, \quad c_2 : t \mapsto \begin{cases} (0,2t) & \text{se } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ (2t-1,1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

abbiamo che $\Phi\circ c_1 = \alpha*\beta$ e $\Phi\circ c_2=\beta*\alpha$. Cerchiamo un'omotopia F tra c_1 e c_2, in questo modo avremo che $\Phi\circ F$ sarà un'omotopia fra $\Phi\circ c_1$ e $\Phi\circ c_2$, cioè tra $\alpha*\beta$ e $\beta*\alpha$, da cui la tesi.

Sia $F : I\times I \to I^2$ tale che

$$F(t,s) = (1-s)\cdot c_2(t) + s\cdot c_1(t).$$

Questa verifica le proprietà richieste. □

Corollario 7.7. *I gruppi fondamentali dei gruppi topologici dell'esempio 7.5 sono abeliani.*

Capitolo 8

Omeomorfismi locali e rivestimenti

Definizione 8.1 (Omeomorfismo locale)**.** Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici. Si definisce *omeomorfismo locale* se $\forall x \in X$ $\exists U \in \tau_X$ intorno di x e $V \in \tau_Y$ intorno di $f(x)$ tale che

$$f|_U : U \to V$$

è un omeomorfismo.

Esempio 8.1. Un esempio di omeomorfismo locale è l'applicazione $p : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $t \mapsto e^{i \cdot t}$. Infatti dati $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $|a - b| \leq 2\pi$, allora $p|_{(a,b)}$ è un omeomorfismo fra (a, b) e la sua immagine.

Lemma 8.1. *Se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo locale, allora f è aperta.*

Dimostrazione. Sia $U \in \tau_X$, proviamo che $f(U)$ è aperto in Y. Per ogni $x \in X$ sappiamo che $\exists U_x \in \tau_X$ tale che $f(U_x) = V_x$ è aperto e $U_x \cong V_x$ tramite f. Allora

$$f(U) = f(\bigcup_{x \in U} U_x \cap A) = \bigcup_{x \in U} f(U_x \cap A).$$

Ora essendo A e U_x aperti, $A \cap U_x$ è aperto e di conseguenza è aperta la sua immagine in $f(U_x) = V_x$ e quindi in Y. Dunque $f(U)$ è unione di aperti e perciò aperto. $\square$

Richiamiamo un risultato di analisi 2 utile per riconoscere omeomorfismi locali:

Proposizione 8.2. *Siano U, V aperti di $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to V$ bigettiva di classe C^1. Se $\forall x \in V$ la matrice $J_f(x)$ è non singolare, allora f è un omeomorfismo locale e di conseguenza è aperta.*

Dimostrazione. Se $\forall x \in U$ $J_f(x)$ è invertibile, allora per il teorema del Dini, in opportuni intorni di x e $f(x)$ esiste f^1 di classe C^1, cioè continua. Allora f è un omeomorfismo ristretto a tali intorni e di conseguenza f è un omeomorfismo locale. □

Questi risultati possono essere usati per dimostrare che una data applicazione è aperta.

Nota bene: d'ora in poi tutti gli spazi saranno localmente connessi per archi, ovvero

Definizione 8.2 (Localmente connesso per archi)**.** Uno spazio topologico X si dice localmente connesso per archi se $\forall x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni di x connessi per archi. In altre parole, se $\forall U \in \mathcal{I}(x)$ esiste $V \in \mathcal{I}(x)$ connesso per archi tale che $V \subseteq U$.

Osserviamo che uno spazio localmente connesso per archi è connesso se e solo se è connesso per archi. Senza l'ipotesi di locale connessione, vale solo $\Rightarrow$.

Definizione 8.3 (Rivestimento)**.** Sia X uno spazio topologico connesso. Un'applicazione continua $p : E \to X$ si dice *rivestimento* se

- è surgettiva;
- $\forall x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ è un omeomorfismo tra ogni componente connessa di $p^{-1}(U)$ e U.

Con un abuso di linguaggio, chiameremo rivestimento lo stesso spazio E. Definiamo E *spazio totale* e X *spazio base* del rivestimento. Ogni aperto che induce un omeomorfismo con le componenti connesse della sua controimmagine viene detto *aperto banalizzante*.

Esempio 8.2 (Rivestimento banale)**.** Se X è uno spazio connesso ed $E = X \times \{ 0, 1 \}$, allora $p : E \to X$, proiezione su X, è un rivestimento. Solitamente si denota *rivestimento banale*. Infatti$\forall x \in X$, dato $V \in \mathcal{I}(x)$ la sua controimmagine è data dall'unione, disgiunta, di $V \times \{ 0 \}$ e $V \times \{ 1 \}$. Banalmente sono omeomorfi a V.

In generale se definiamo su F la topologia discreta $p : F \times X \to X$ proiezione su X è sempre un rivestimento.

Osserviamo che se V è un aperto banalizzante, cioè $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ è un omeomorfismo se ristretto ad una componente connessa di $p^{-1}(V)$, allora

$$p^{-1}(V) \cong V \times \pi_0(p^{-1}(V))$$

dove $\pi_0(X)$ denota la famiglia delle componenti connesse di uno spazio X.

Esempio 8.3 (Elica su S^1, omeomorfismo locale e rivestimento)**.** Sia $p : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $x \mapsto e^{i \cdot x} = cos(x) + isin(x)$, l'applicazione definita nell'esempio 8.1. Avevamo detto che è un omeomorfismo locale, ma in particolare è un rivestimento. Infatti dato $x_0 \in S^1$ e $p_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(p_0) = e^{i \cdot p_0} = x_0$, sappiamo che $-x_0 = e^{i \cdot (p_0 + \pi)}$. Il candidato aperto banalizzante è $V = S^1 - \{ -x_0 \}$. $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{R}} U_k$ dove $U_k = (p_0 - \pi + 2k\pi, p_0 + \pi + 2k\pi)$ è la decomposizione di $p^{-1}(V)$ nelle sue componenti connesse e la restrizione a ciascuna di esse è un omeomorfismo.

Esempio 8.4 (Funzione argomento principale)**.** Definiamo ora $q : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} - \{ 0 \}$ tale che $(\rho, \vartheta) \mapsto \rho \cdot e^{i \cdot \vartheta}$. Questa applicazione è un rivestimento, proviamolo facendo vedere che è composizione di un omeomorfismo con un rivestimento. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "(id,p)"'] & & \mathbb{C} - \{ 0 \} \\
& \mathbb{R}^+ \times S^1 \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^+ \times S^1 \to \mathbb{C} - \{ 0 \}$ è tale che $\varphi^{-1} : z \mapsto (||z||, \frac{z}{||z||})$ e dunque un omeomorfismo. Essendo (id, p) un rivestimento, in quanto lo è sulle componenti, anche $q = \phi \circ (id, p)$ lo è.

Osserviamo che $q|_{\mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi]} : \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{C} - \{ 0 \}$ è bigettiva e quindi invertibile, ma non è un omeomorfismo: non è aperta. La sua inversa è $f : \mathbb{C} - \{ 0 \} \to \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi]$ tale che

$$z \mapsto (||z||, Arg(z)),$$

dove $Arg(z)$ è l'*argomento principale* di z, ovvero l'unico numero $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = ||z|| \cdot e^{i \cdot \vartheta}$. Possiamo di conseguenza definire la *funzione argomento principale*, $Arg : \mathbb{C} - \{ 0 \} \to (-\pi, \pi]$ tale che $z \mapsto Arg(z)$. Questa non è continua sulla semiretta

$$H = \{ z \in \mathbb{C} - \{ 0 \} \mid Re(z) < 0,\ Im(z) = 0 \}$$

e di conseguenza non lo è f.

Vediamo ora alcune proprietà dei rivestimenti.

Proposizione 8.3. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Allora*

1. *p è un omeomorfismo locale;*
2. *esiste k tale che $\forall y \in X$ $p^{-1}(\{ y \})$ ha cardinalità k.*

Dimostrazione. 1) Sia $e \in E$. Proviamo che ammette un intorno aperto U tale che $p|_U : U \to f(U)$ è un omeomorfismo. In quanto rivestimento, per $x = p(e)$ esiste un aperto banalizzante V tale che ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ è omeomorfa a V. Sia U la componente connessa contenente e: abbiamo che $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo. Proviamo che U è aperto. Sappiamo che è una componente connessa di $p^{-1}(V)$, aperto di E in quanto contro-immagine di un aperto. Per lo stesso motivo è localmente connesso per archi, perciò le componenti connesse di $p^{-1}(V)$ sono aperte[1].

2) Sia $x \in X$ e $V \in \mathcal{I}(x)$ un aperto banalizzante. Sappiamo che ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ ammette uno e un solo elemento della fibra di x e perciò c'è una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} \pi_0(p^{-1}(V)) &\longleftrightarrow p^{-1}(x) \\ U &\longleftrightarrow U \cap p^{-1}(x) \end{aligned}$$

Allora se x e y appartengono al medesimo aperto banalizzante, abbiamo che $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$. Dato $x_0 \in X$, definiamo

$$A = \left\{ x \in X \mid | p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| \right\}.$$

Osserviamo che sia A che il suo complementare sono aperti, in quanto unione di aperti banalizzanti, dunque $A = X$ o $A = \emptyset$ poiché X è connesso. Ma $x_0 \in A$ e dunque $A = X$. □

Definizione 8.4 (Grado del rivestimento)**.** Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Definiamo *numero di fogli*, o grado del rivestimento il numero $|p^{-1}(x)|$ dove $x \in X$.

Esempio 8.5 (Omeomorfismo locale, non rivestimento)**.** Facciamo un esempio di un omeomorfismo locale che non è un rivestimento. Abbiamo visto che il viceversa è sempre vero.

Data la definizione data nell'esercizio 8.1, consideriamo $U = (0, 6\pi)$ e $p|_U : U \to S^1$. Questo è omeomorfismo locale, in quanto restrizione di un omeomorfismo locale, ma non è più un rivestimento. Infatti se consideriamo un intorno

[1] Poco chiaro, si rimanda al Manetti

di $(0,0) \in S^1$, ad esempio U abbastanza piccolo, la sua controimmagine avrà le componenti connesse contenenti 0 e 6π non omeomorfe a U, ma solo a metà di U.

Esempio 8.6 (Rivestimento di grado n)**.** Un esempio di rivestimento di grado n, ovvero tale che $\forall x \in X\ |p^{-1}(x) = n$ è

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} - \{\, 0 \,\} &\to \mathbb{C} - \{\, 0 \,\} \text{ tale che} \\ z &\mapsto z^n. \end{aligned}$$

Sfruttando l'omeomorfismo fra $\mathbb{C} - \{\, 0 \,\}$ e $\mathbb{R}^+ \times S^1$ consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\rho \cdot e^{i\vartheta} \arrow[d, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto, "p_n"] & \in & \mathbb{C} - \{\, 0 \,\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{C} - \{\, 0 \,\} \arrow[d, "\cong"'] & \ni & \rho^n \cdot e^{in\vartheta} \arrow[d, mapsto] \\
(\rho, e^{i\vartheta}) \arrow[rrrr, bend right, mapsto, "q_n=(q^n, m_n)"'] & \in & \mathbb{R}^+ \times S^1 \arrow[r] & \mathbb{R}^+ \times S^1 & \ni & (\rho^n, e^{in\vartheta})
\end{tikzcd}$$

Proviamo $q = (q^n, m_n)$ è un rivestimento. q^n è un rivestimento, resta da provare che lo è anche $m_n : S^1 \to S^1$ tale che $e^{i\vartheta} \mapsto e^{in\vartheta}$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\vartheta \arrow[d, mapsto] \arrow[rrrr, bend left, mapsto, "\times n"] & \in & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d] & \ni & n\vartheta \arrow[d, mapsto] \\
e^{i\vartheta} \arrow[rrrr, bend right, mapsto, "m_n"'] & \in & S^1 \arrow[r] & S^1 & \ni & e^{in\vartheta}
\end{tikzcd}$$

Vogliamo provare che m_n è un rivestimento, ovvero che è una mappa surgettiva e tale che ogni punto di S^1 ammette un aperto banalizzante, ovvero un intorno aperto omeomorfo a ciascuna componente connessa della sua contro-immagine. Cerchiamo di determinare le componenti connesse di $m_n^{-1}(V)$ con V aperto opportuno.

Sia $x \neq -1 \in \mathbb{C} \cap S^1$, allora $V' = (-\pi, \pi)$ è tale che $p(V') = V \ni x$, dove p è l'applicazione dell'esempio 8.1, l'elica. Vogliamo mostrare che questo aperto, banalizzante per il rivestimento p, lo è anche per m_n, che dunque è un rivestimento. Osserviamo che al variare di $k = 0, \dots, n-1$ gli aperti $U'_k = (\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n})$ sono tali per cui le loro immagini $U_k = p(U'_k)$ tagliano in n 'fette' la circonferenza S^1. Ogni fetta è centrata in una radice n-esima dell'unità, che nel momento in cui andremo ad applicarci m_n verrà mandata in 1 e la 'fetta' ricoprirà tutto S^1 a meno del punto -1. Proviamo che

$$m_n^{-1}(V) = \bigcup_{k=0}^{n-1} U_k.$$

$\supseteq$) Sia $x \in U_k$, mostriamo che $m_n(x) \in V$: basta provare che $m_n(x) \neq -1$, per quanto detto sopra. Se $x \in U_k$, esiste $z \in U'_k$ tale che $x = p(z)$, cioè $z \in (\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n})$ e dunque $x = p(z) \in \left\{ e^{i\vartheta} \mid \vartheta \in (\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}) \right\}$. Allora $m_n(x) = m_n(p(z)) \in \left\{ e^{in\vartheta} \mid n\vartheta \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi) \right\}$, cioè $e^{in\vartheta} \neq -1$.
$\subseteq$) Se $x \in m_n^{-1}(V)$, $x = e^{i\vartheta} \in S^1$ e $m_n(x) = e^{in\vartheta} \in V$, dunque $n\vartheta \neq \pm\pi$, dunque sarà del tipo

$$n\vartheta = \zeta + 2k\pi \text{ con } \zeta \in (-\pi, \pi).$$

Una volta provato che k è compreso fra 0 e $n-1$, si avrà che

$$\vartheta = \frac{\zeta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \in U'_k, \text{ dunque } e^{i\vartheta} \in U_k.$$

Possiamo supporre che sia compreso in quell'intervallo poiché se $k = k_1 + k_2 n$ con k_1 in quell'intervallo, allora avrei che x si scriverebbe come

$$e^{i(\frac{\zeta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} + e^{i(\frac{\zeta}{n} + \frac{2k_1\pi + 2k_2 n\pi}{n})} = e^{i(\frac{\zeta}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + 2k_2 n\pi)} = e^{i(\frac{\zeta}{n} + \frac{2k_1\pi}{n})}.$$

Gli U_k sono banalmente tutti disgiunti e connessi, dunque sono le componenti connesse di $m_n^{-1}(V)$. Proviamo che ciascuna di queste è omeomorfa a V, cioè

$$\forall k \quad m_n|_{U_k} : U_k \to V \text{ è un omeomorfismo:}$$

$$\begin{tikzcd} U'_k \arrow[r, "\times n|_{U'_k}"] \arrow[d, "p|_{U'_k}"'] & V'_k \arrow[d, "p|_{V'}"] \\ U_k \arrow[r, "m_n|_{U_k}"'] & V \end{tikzcd}$$

dove $V'_k = (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, aperti banalizzanti per p. È dunque equivalente provare che il diagramma commuta, cioè

$$m_n|_{U_k} = p|_{V'} \circ \times n|_{U'_k} \circ p|_{U'_k}^{-1}$$

e che è composizione di omeomorfismi. Questo segue dalla definizione degli U' e di p; inoltre gli U' sono aperti in quanto p è aperta (i rivestimenti sono omeomorfismi locali e dunque mappe aperte).

Esempio 8.7 (Esponenziale complesso e funzione logaritmo principale)**.** Definiamo $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{ 0 \}$ tale che $z \mapsto e^z$, cioè se $z = x + iy$ allora $e^z = e^x(cos(y) + isin(y))$.

Proviamo che un rivestimento con un infinito numero di fogli. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{C} - \{ 0 \} \arrow[d, "\cong"'] \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "(\phi,p)"'] & \mathbb{R}^+ \times S^1 \end{tikzcd}$$

dove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è l'omeomorfismo tale che $t \mapsto e^t$ e $p : \mathbb{R} \to S^1$ è il rivestimento dell'elica 8.1.

Di conseguenza q è un rivestimento.

Osserviamo ora che il sottoinsieme

$$\mathbb{C} \supset S = \{ z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \in (-\pi, \pi] \}$$

cioè la striscia di piano semi-aperta, determina una restrizione

$$q|_S : S \to \mathbb{C} - \{ 0 \} \text{ tale che } z \mapsto e^z$$

bigettiva. Definiamo la sua inversa *funzione logaritmo principale*

$$Log : \mathbb{C} - \{ 0 \} \to S \text{ tale che } z \mapsto log(||z||) + i \cdot Arg(z).$$

Tale funzione non è continua (e in effetti non lo è nemmeno Arg) e questo ci permette di dire che $q|_S$ e Log non sono omeomorfismi. Infatti se guardiamo le immagini dei punti sull'asse x e quelli poco sotto, hanno immagini lontanissime: i primi stanno sulla retta π, i secondi quasi sulla retta $-\pi$.

Azioni e rivestimenti

Sia E uno spazio localmente connesso per archi e $G \subset Omeo(E)$ un sottogruppo tale che E/G è connesso.

Ci chiediamo in quali casi la proiezione $\pi : E \to E/G$ sia un rivestimento. Abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Definizione 8.5 (Azione propriamente discontinua)**.** Sia E uno spazio topologico e $G \subset Omeo(E)$. Diremo che G *agisce in modo propriamente discontinuo* se $\forall e \in E$ $\exists U \in \mathcal{I}(e)$ tale che $\forall g \in G - \{ 1 \}$ si ha

$$U \cap g(U) = \emptyset.$$

Un esempio è l'azione del gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}$ secondo numeri interi, che sappiamo essere isomorfo a $\mathbb{Z}$, su $\mathbb{R}$. Infatti per ogni punto basta prendere un intervallo di ampiezza < 1.

Teorema 8.4. *Consideriamo E spazio topologico localmente connesso per archi e $G \subset Omeo(E)$ tale che E/G è connesso. Se G agisce in modo propriamente discontinuo su E, allora $\pi : E \to E/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Sappiamo innanzitutto che π, in quanto proiezione, è aperta. Sia $x \in E/G$ ed $e \in E$ tale che $\pi(e) = x$. Per ipotesi sappiamo che ammette un intorno U tale che $\forall g \in G$ $g(U) \cap U = \emptyset$. Per locale connessione di E, U ammette un intorno di e connesso W tale che $W \subset U$. Sia A un aperto contenente e incluso in W, da definizione di intorno. Proviamo che $V = \pi(A)$ è l'aperto banalizzante cercato.

Per apertura di π, V è aperto; resta da dimostrare che $\pi^{-1}(V)$ ha le componenti connesse tutte omeomorfe a V. Sappiamo che

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(V) &= \pi^{-1}(\pi(A)) = \\ &= \bigcup_{g \in G} g(A).\end{aligned}$$

Dato che A è connesso e i g sono omeomorfismi, anche i $g(A)$ sono connessi. Inoltre dato che $A \subset U$, $\forall g \neq id$, si ha che $g(A) \cap A = \emptyset$, di conseguenza sono tutti disgiunti: cioè i $g(A)$ sono le componenti connesse di $\pi^{-1}(V)$. Proviamo che sono omeomorfe a V: infatti

$$\begin{tikzcd} g(A) \arrow[rr, "p|_{g(A)}"] \arrow[dr, "g^{-1}"'] & & V \\ & A \arrow[ur, "p|_A"'] & \end{tikzcd}$$

Per come abbiamo scelto A $p|_A$ è un omeomorfismo, infatti è aperta, surgettiva e iniettiva data la costruzione di A, e di conseguenza lo è anche $p|_{g(A)} = p|_A \circ g^{-1}$. □

Esempio 8.8 (Esponenziale tagliata)**.** Definiamo

$$\not{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ tale che } t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Tale applicazione è un rivestimento in quanto coincide con l'applicazione di proiezione sul quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Z}$ è il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}$ che agisce in modo propriamente discontinuo. Possiamo inoltre vedere $\notin$ come composizione

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\times 2\pi"] \arrow[rr, bend right, "\notin"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Infatti $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

Possiamo generalizzare questo esempio in dimensione n: sia $\mathbb{Z}^n \subset Omeo(\mathbb{R}^n)$, le traslazione per n-uple di numeri interi. Anche in questo caso tale sottogruppo agisce in modo propriamente discontinuo e dunque $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ è un rivestimento. Vale inoltre

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}},$$

che visto in $n = 2$ è molto più intuitivo.

Esempio 8.9 (Moltiplicazione per 2)**.** Consideriamo $\mathbb{Z}$ come sottogruppo di $Omeo(\mathbb{R}^n - \{ 0 \})$, il sottogruppo generato dalla moltiplicazione per 2. Dato che $\mathbb{R} - \{ 0 \} \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$, infatti se v è un versore possiamo scrivere

$$r = e^t \cdot v \mapsto (t, v).$$

Cerchiamo di capire come agisce 2 su $\mathbb{R} \times S^1$ sapendo che

$$2(e^t \cdot v) = e^{t+log2} \cdot v$$

cioè $2 : (t, v) \mapsto (t + log2, v)$. Ciò vuol dire che su S^1 agisce come l'identità, mentre su $\mathbb{R}$ come le traslazioni per multipli di $log2$, dunque come $\mathbb{Z}$ in modo propriamente discontinuo. Allora

$$\pi : \mathbb{R}^n - \{ 0 \} \to (\mathbb{R}^n - \{ 0 \})\Big/\mathbb{Z} \;\cong\; (\mathbb{R} \times S^{n-1})\Big/(\mathbb{Z} \times \{Id\}) \;\cong\; S^1 \times S^{n-1}.$$

Esempio 8.10 (Antipodi, rivestimento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$)**.** Consideriamo $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1 \}$ e $< -1 >\subset Omeo(S^n)$ il sottogruppo generato dall'omeomorfismo tale che

$$-1 : v \mapsto -v.$$

È propriamente discontinua, in quanto intuitivamente basta prendere l' 'emisfero' su cui si trova il punto in questione, in generale va bene $U = \{ y \in S^n \mid < x, y >> 0 \}$.

Di conseguenza $\pi : S^n \to S^n/ < -1 >$ è un rivestimento e per quanto fatto precedentemente sappiamo che $S^n/ < -1 > \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Capitolo 9

Sollevamenti e monodromia

Sollevamenti di applicazioni e cammini

Definizione 9.1 (Sollevamento di un'applicazione)**.** Sia $f : Y \to X$ un'applicazione fra spazi topologici continua e sia $p : E \to X$ un rivestimento. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

L'applicazione $g : Y \to E$ si dice *sollevamento di f se E* se rende il diagramma commutativo, cioè $f = p \circ g$.

Osservazione 9.1. Non esistono sempre sollevamenti di date applicazioni continue. Ad esempio, consideriamo

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\not e"] \\ S^1 \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "Id"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Se esistesse un sollevamento, $g : S^1 \to S^1$ sarebbe tale che $Id = \not e \circ g$, cioè sarebbe iniettivo, ma ciò è assurdo in quanto non esistono funzioni iniettive da S^1 in $\mathbb{R}$.

Teorema 9.2 (Unicità del sollevamento)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $f : Y \to X$ con Y connesso. Supponiamo esistano $g, h : Y \to E$ sollevamenti di f su E, allora coincidono se e solo*

$$\exists y \in Y \text{ tale che } g(y) = h(y).$$

In altre parole, coincidono se e solo se coincidono su un punto.

Dimostrazione. $\Rightarrow$) È banalmente vero.
$\Leftarrow$) Sia $A = \{\, y \in Y \mid h(y) = g(y) \,\}$. L'obiettivo è dimostrare che è aperto e chiuso e di conseguenza, vista la connessione di Y e il fatto che per ipotesi A non è vuoto, $A = Y$, cioè h e g coincidono. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[d, "p"] & \ni g(y_0), h(y_0) \\
y_0 \in & Y \arrow[ur, dashed, bend left, "h"] \arrow[ur, dashed, "g"'] \arrow[r, "f"'] & X & \ni x = f(y_0)
\end{tikzcd}$$

Sia V un aperto banalizzante di x_0 rispetto a p: sappiamo allora che le componenti connesse di $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{k \in p^{-1}(x_0)} U_k$ sono omeomorfe a V. Siano U_g e U_h le componenti connesse di $p^{-1}(V)$ contenenti, rispettivamente, $g(y_0)$ e $h(y_0)$ (dato che il diagramma è commutativo $x_0 = p(g(y_0)) = p(h(y_0))$).

Se $y_0 \in A$, allora $U_g = U_h = U$. Possiamo allora considerare l'aperto di Y $W = g^{-1}(U) \cap h^{-1}(U) \ni y_0$ (aperto in quanto intersezione di contro-immagini di aperti, infatti U è omeomorfo a V e dunque aperto). Proviamo che è tutto contenuto in A. Se $z \in W$, allora $f(z) = p(g(z)) = p(h(z))$. Ma $p(z)$ e $h(z) \in U$ e dunque la restrizione ad U di p è iniettiva, dunque $g(z) = h(z)$, cioè Aè aperto.

Invece, se $y_0 \notin A$, si ha che $g^{-1}(U_g) \neq h^{-1}(U_h)$: infatti $p(h(y_0)) = p(g(y_0))$ e $h(y_0), g(y_0) \in p^{-1}(x_0)$, ma sono distinti e la fibra interseca ogni componente connessa in al più un punto. Perciò $U_h \cap U_g = \emptyset$ e $h(z) \neq g(z)$ $\forall z \in W$, cioè $W \subset Y - A$, cioè A è chiuso- □

Abbiamo allora dimostrato il seguente risultato:

Corollario 9.3. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $f : Y \to X$ un'applicazione di spazi topologici continua con Y connesso. Allora $\forall y \in Y$ e $\forall e \in p^{-1}(f(y))$ esiste al più un sollevamento g di f su E tale che $g(y) = e$.*

Vediamo se è possibile sollevare cammini e omotopie di cammini.

Teorema 9.4 (Sollevamento di cammini)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $\alpha : I \to X$ un cammino continuo. Allora $\forall e_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ $\exists! \tilde{\alpha} : I \to E$ cammino che solleva α, cioè $\tilde{\alpha} = p \circ \alpha$ e $\tilde{\alpha}(0) = e_0$.*

Dimostrazione. L'unicità è data dal teorema 9.2. Proviamo l'esistenza. Inizialmente proviamo un caso particolare, poi lo useremo per dimostrare il teorema nella sua generalità.

Supponiamo $\alpha(I) \subset V$ aperto banalizzante. Per definizione, ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$, U, è omeomorfa a V: dunque possiamo invertire $p|_U$ e costruire

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "p|_U"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & V \arrow[u, bend right=60, "p|_U^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

ponendo semplicemente $\tilde{\alpha} = p|_U^{-1} \circ \alpha$.

Nel caso generale, dato $\mathbb{A}$ un ricoprimento di X fatto di aperti banalizzanti, possiamo definire $\alpha : I \to X$ a tratti sfruttando il lemma di Lebesgue. Infatti poiché I è metrico e compatto, per il teorema del numero di Lebesgue, $\exists n \geq 1$ e n aperti $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$\alpha_j = \alpha|_{[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]} : I_j \to V_j \qquad \forall 1 \leq j \leq n$$

Su queste restrizioni possiamo applicare il caso particolare. Solleviamo il primo cammino α_1 usando come p.to iniziale e_0 e otteniamo un unico $\tilde{\alpha}_1$. Il sollevamento di α_2 è univocamente determinato con p.to iniziale $\tilde{\alpha}_1(1)$ e così via. $\square$

Lemma 9.5. *Consideriamo $p : E \to X$ un rivestimento, $F : I^2 \to X$ continua, $L = \{ (t, s) \in I^2 \mid ts = 0 \}$ e $i : L \hookrightarrow I^2$ l'inclusione. Allora dato $f : L \to E$ un sollevamento di $F|_L$ (cioè $F \circ i = p \circ f$), esiste un unico sollevamento di F su E, $g : I^2 \to E$ ($p \circ g = F$) e che estende f ($g \circ i = f$).*

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} L = \llcorner \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^2 = \square \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

Se esiste è unico, in quanto tutti i suoi punti sono fissati.

Anche qui per dimostrarne l'esistenza partiamo da un caso particolare: $F(I^2) \subset V$ aperto banalizzante di X. Dato che L è connesso, allora $f(L) \subset U$ è contenuto interamente in una componente connessa di $p^{-1}(V)$, U. Possiamo allora considerare, come prima, il diagramma

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & U \arrow[d, "p|_U"] \\ I^2 \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "F"'] & V \arrow[u, bend right=60, "p|_U^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

e costruire, vista l'invertibilità di $p|_U$,

$$g = F \circ p|_U^{-1}.$$

Proviamo che estende f, ovvero che $g \circ i = f$. Ma ciò vuol dire che $p|_U \circ g \circ i = F \circ i = p|_U \circ f$ e dunque siccome $p|_U$ è suriettiva, $g \circ i = f$.

Nel caso generale si procede per quadrati. Sempre per il teorema del numero di Lebesgue possiamo scomporre il quadrato in aperti del tipo $V_{k,j}$ con $1 \leq k, j \leq n$ tali che

$$F_{k,j} = F|_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]} : I_{k,j} \to V_{k,j}$$

Abbiamo diviso l'intervallo in n^2 intervalli. In ciascuno di questi possiamo, partendo da quello in basso a sinistra, applicare il caso particolare fino ad arrivare all'angolo in alto a destra. □

Teorema 9.6 (Sollevamento di omotopie di cammini)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $F : I^2 \to X$ un'applicazione continua. Sia $\tilde{\alpha} : I \to E$ tale che $p \circ \tilde{\alpha}(t) = F(t, 0) = \alpha(t)$, ovvero $\tilde{\alpha}$ solleva α in E. Allora esiste un'unica applicazione $G : I^2 \to E$ che solleva F, cioè $p \circ G = F$, e che estende $\tilde{\alpha}$, cioè $G(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$.*

In altre parole, fissato un cammino possiamo sollevare le omotopie.

Dimostrazione. Vorremmo applicare il lemma precedente, così da applicarlo in questo caso. Dato I^2 il quadrato in cui abbiamo 'steso' il cammino α sul bordo inferiore.

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, hook', "i"'] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dd, bend left=60, "\alpha"] \\
L \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
I^2 \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & X
\end{tikzcd}$$

Vogliamo applicare il lemma, dunque abbiamo bisogno di costruire una $f : L \to E$ che rispetti le condizioni del lemma, cioè costituisca un sollevamento di $F|_L = F \circ i$. Dato il cammino $\beta : I \to X$ tale che $\beta(s) = F(s, 0)$, sappiamo per il teorema del sollevamento di cammini 9.4 che fissato un punto nella fibra di $\beta(0)$ esiste unico il sollevamento $\tilde{\beta} : I \to E$ tale che $p \circ \tilde{\beta} = \beta$. Scegliamo come punto iniziale $e_0 \in p^{-1}(\beta(0)) = p^{-1}(F(0, 0))$ tale che $e_0 = \tilde{\alpha}(0)$.

A questo punto definiamo $f : L \to E$ tale che

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(s) \\ \tilde{\beta}(t) \end{cases}.$$

Verifichiamo che $F \circ i = p \circ f$: sia $(t,s) \in L$,

$$p \circ f(t,s) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(s) \\ \tilde{\beta}(t) \end{cases} = \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(s)) \\ p(\tilde{\beta}(t)) \end{cases} = \begin{cases} \alpha(s) \\ \beta(t) \end{cases} = F(t,s),$$

dove $ts = 0$. Dunque le condizioni sono soddisfatte, allora per il lemma esiste $G : I^2 \to E$ che estende f, e di conseguenza $\tilde{\alpha}$, e che solleva F. □

Corollario 9.7 (Sollevamento di quadrati)**.** *Sia $p : E \to X$ e $F : I^2 \to X$ un'applicazione continua, allora $\forall y_0 \in I^2$ e $\forall e_0 \in p^{-1}(F(y_0))$ esiste unica l'applicazione $G : I^2 \to E$ tale che $F = p \circ G$ e che $G(y_0) = e_0$.*

Dimostrazione. Sappiamo che parametrizzando i segmenti congiungenti y_0 ai lati del quadrato e componendo con F, abbiamo quattro applicazioni α,β, γ, $\delta : I \to X$. Possiamo sollevare ciascuna di queste fissando il punto iniziale e_0. La garanzia che i lati del quadrato si ricompongano viene dall'unicità di ciascuno dei quattro sollevamenti. □

Corollario 9.8 (Sollevamento dalla sfera)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $f : S^2 \to X$ un'applicazione continua. Allora $\forall y_0 \in S^2$ e $\forall e_0 \in p^{-1}(f(y_0))$ esiste un'unica applicazione $g : S^2 \to E$ che solleva f e tale che $g(y_0) = e_0$.*

Dimostrazione. A meno di omeomorfismi di S^2 possiamo supporre che $y_0 = (1,0,0)$. Consideriamo ora I^2: sappiamo che se contraiamo il bordo ad un punto otteniamo qualcosa di omeomorfo a S^2, cioè

$$I^2 \Big/ \partial I^2 \cong S^2.$$

Sia $q : I^2 \to S^2$ l'identificazione chiusa prodotta da tale relazione, cioè un omeomorfismo se ristretta da $I^2 - \partial I^2$ su $S^2 - \{y_0\}$ (a meno di omeomorfismi). Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Vogliamo provare che esiste ed è unica g che fa commutare il diagramma. Per il corollario precedente, se definiamo $F = f \circ q$, sappiamo che esiste ed è unica l'applicazione $G : I^2 \to E$ tale che $G(0,0) = e_0$. Osserviamo che tale condizione è sufficiente affinché $G(\partial I^2) = \{e_0\}$, infatti essendo ∂I^2 un connesso, anche l'immagine tramite G lo deve essere. Ma ora $F(0,0) =$

$f \circ q(0,0) = f(y_0)$, dunque $(0,0) \in p^{-1}(f(x_0))$. Essendo tale fibra discreta, l'immagine del bordo deve essere costante. Abbiamo allora che G è costante sulle fibre di q.

Per proprietà fondamentale delle identificazioni, sappiamo allora che esiste un'unica $g : g \circ q = G$. Resta da provare che tale g solleva f. Sappiamo che

$$F = p \circ G \Leftrightarrow f \circ q = p \circ g \circ q \Leftrightarrow f = p \circ g$$

per surgettività di q. □

Teorema 9.9 (di Borsuk)**.** *Non esistono funzioni continue da S^2 in S^1 dispari.*

Dimostrazione. Supponiamo esista $f : S^2 \to S^1$ dispari, ovvero tale che $\forall x \in S^2$ valga $f(-x) = -f(x)$. Consideriamo il rivestimento $\not{e} : \mathbb{R} \to S^1$. Allora per il corollario 9.8 sappiamo che $\exists g : S^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f = \not{e} \circ g$.

Supponiamo che g , in quanto applicazione da S^2 in $\mathbb{R}$, ammetta un x_0 tale che $g(x_0) = g(-x_0)$. Allora abbiamo che $\not{e}(g(x_0)) = \not{e}(g(-x_0))$, cioè $f(x_0) = f(-x_0)$.

Tuttavia dato che $0 \notin S^1$, $\forall y \in S^1$ si ha che $y \neq -y$, dunque $f(x_0) \neq -f(x_0)$. Ma questo vuol dire che $-f(x_0) \neq f(-x_0)$. Assurdo.

Resta da mostrare che ogni applicazione continua $g : S^2 \to \mathbb{R}$ ammette $x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = g(-x_0)$. Studiamo allora la funzione $h : S^2 \to \mathbb{R}$ tale che $x \mapsto g(x) - g(-x)$. Se non ammette uno zero, allora possiamo scrivere l'immagine come unione di due insiemi disgiunti non vuoti:

$$h(S^2) = (h(S^2) \cap (-\infty, 0)) \cup (h(S^2) \cap (0, +\infty))$$

Infatti se $h(x) > 0$, $-h(x) < 0$, ma S^2 è connesso, dunque assurdo. □

Corollario 9.10. *Sia $h : S^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua di spazi topologici. Allora $\exists x \in S^2$ tale che $h(x) = h(-x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non esista. Possiamo perciò definire $g : S^2 \to S^1$ tale che

$$x \mapsto \frac{h(x) - h(-x)}{||h(x) - h(-x)||}.$$

Tale funzione è continua e dispari, ma questo è assurdo per Borsuk 9.9.

Corollario 9.11 (Invarianza dimensionale)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, con $n \geq 3$. Allora non può esistere $f : A \to \mathbb{R}^2$ continua e iniettiva.*

Dimostrazione. Se esistesse, la restrizione da un aperto omeomorfo a S^2 contenuto in A (esiste in quanto A è aperto) in $\mathbb{R}^2$ sarebbe continua e iniettiva. Assurdo. $\square$

Lemma 9.12. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Siano α, $\beta \in \Omega(X, a, b)$ due cammini. Fissato $e \in p^{-1}(\alpha)$, se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sono gli unici sollevamenti di α e β con punto iniziale e, allora*

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \end{cases} .$$

Dimostrazione. $\Leftarrow$) Se $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, sia $\tilde{F}$ un'omotopia fra loro. Verifichiamo che $F = p \circ \tilde{F}$ è un omotopia fra α e β. Infatti

- $F(t, 0) = p \circ \tilde{F}(t, 0) = p \circ \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t)$ e analogamente per β;
- $F(0, s) = p \circ \tilde{F}(0, s) = p(e) = \alpha(0) = \beta(0)$, analogo per 1.

$\Rightarrow$) Sia $F : I^2 \to X$ un'omotopia fra α e β. Troviamo un'omotopia fra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$. Sappiamo che dovrà soddisfare le seguenti condizioni:

1. $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$;
2. $\tilde{F}(0, s) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ $\forall s \in I$;
3. $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$;
4. $\tilde{F}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ $\forall s \in I$.

Per il teorema di sollevamento di omotopie, fissato un cammino α e un suo sollevamento con punto iniziale e_0 e un'applicazione F (quelle che abbiamo per ipotesi), esiste un unico sollevamento di F su E che chiameremo $\tilde{F}$ tale che $p \circ \tilde{F} = F$ e che estende $\tilde{\alpha}$, cioè $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$. Abbiamo così una candidata omotopia fra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ che rispetta 1.

Proviamo 2. Sappiamo che $\{ (0, s) \mid s \in I \}$ è omeomorfo a I, dunque è connesso. Di conseguenza la sua immagine tramite $\tilde{F}$ è connessa. Tuttavia è tutta contenuta in $p^{-1}(a)$, infatti essendo F un' omotopia fra α e β

$$p \circ \tilde{F}(0, s) = F(0, s) = a$$

Sappiamo che le fibre di p sono tutte discrete, dunque $\tilde{F}(0, s)$ è connesso solo se è costante, dunque $\forall s \in I$ vale $\tilde{F}(0, s) = \tilde{F}(0, 0) = \tilde{\alpha}(0) = e_0 = \tilde{\beta}(0)$.

Proviamo 3. Lo faremo sfruttando l'unicità del sollevamento di un cammino fissato il punto iniziale: cioè proviamo che $\tilde{F}(t, 1)$ solleva β e che ha lo stesso punto iniziale di $\tilde{\beta}$, di conseguenza $\tilde{F}$ e $\tilde{\beta}$ devono coincidere. Sappiamo che $p \circ \tilde{F}(t, 1) = F(t, 1) = \beta(t)$ quindi solleva, inoltre hanno lo stesso punto iniziale per il punto 2.

Proviamo 4. Per lo stesso motivo del punto 2, $\tilde{F}(1, s)$ è costante e sappiamo che $\tilde{F}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\beta}(1)$ e dunque abbiamo finito. $\square$

Monodromia

Richiamiamo alcune definizioni e risultati sulle azioni.

Dato un gruppo G e un insieme X abbiamo definito *azione destra* di G su X un'applicazione tale che $X \times G \to S$ e $(x, g) \mapsto s \cdot g$ in modo tale che

1. $\forall x \in X\ (1_G, x) \mapsto x$;
2. $\forall g_1, g_2 \in G\ \forall x \in X\ s \cdot (g_1 g_2) = (s \cdot g_1) \cdot g_2$.

Lo denotiamo $X \circlearrowleft G$.

Vengono inoltre definiti, dato $x \in X$, gli insiemi

- l'*orbita* di x, $Orb(x) = \{\, y \in X \mid \exists g \in G : \ g(x) = y \,\}$;
- lo *stabilizzatore* di x, $Stab(x) = \{\, g \in G \mid g(x) = x \,\}$.

Un'azione viene detta *transitiva* se $\forall x, y \in X$ esiste un elemento $g \in G$ tale che $g(x) = y$, ovvero $Orb(x) = X$. Ricordiamo alcuni risultati:

Proposizione 9.13. *Data un'azione destra $X \circlearrowleft G$ e $x \in X$, allora*

- *esiste una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dell'orbita di x e le classi laterali dello stabilizzatore di x;*
- *$\forall g \in G\ g^{-1} Stab(x) g = Stab(x \cdot g)$.*

Torniamo alle cose importanti.

Definizione 9.2 (Monodromia)**.** Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $x, y \in X$. Definiamo *monodromia* l'applicazione

$$Mon : p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \to p^{-1}(y) \text{ tale che } (e, \alpha) \mapsto \alpha_e(1),$$

dove α_e denota l'unico sollevamento di α con punto iniziale e.

Vediamone alcune proprietà:

1. commuta con la giunzione, cioè se $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e $\beta \in Omega(X, y, z)$, allora
$$Mon(e, \alpha * \beta) = Mon(Mon(e, \alpha), \beta);$$
2. è invariante per omotopia, ovvero se $\alpha_1 \sim \alpha_2$,
$$Mon(e, \alpha_1) = Mon(e, \alpha_2);$$
3. $Mon(e, \alpha * i(\alpha)) = Mon(e, 1_x) = 1_e(e) = e$;
4. dato $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, l'applicazione
$$Mon_\alpha : p^{-1}(x) \to p^{-1}(y) \text{ tale che } e \mapsto Mon(e, \alpha)$$
è bigettiva e ha inversa $Mon_{i(\alpha)}$.

In particolare essendo invariante per omotopia tale applicazione passa al quoziente, cioè al π_1. Denotiamo

$$\bullet : p^{-1}(x) \to \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x) \text{ tale che } (e, [\alpha]) \mapsto e \bullet [\alpha] = Mon(e, \alpha).$$

Questa è un'azione destra di π_1 su $p^{-1}(x)$.

Osserviamo che se E è connesso[1], l'azione di monodromia è transitiva. Infatti se $e, u \in p^{-1}(x)$, esiste $\gamma : I \to E$ tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(u) = 1$. Allora $p \circ \gamma \in \Omega(X, x)$ ed è tale che $u = e \bullet [p \circ \gamma]$.

Teorema 9.14. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento con E connesso. Fissiamo $x \in X$ ed $e \in p^{-1}(x)$. Allora*

1. *$p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, x)$ è un omomorfismo iniettivo e*
$$p_*(\pi_1(E, e)) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid e \bullet [\alpha] = e \}^2;$$
2. *esiste una corrispondenza biunivoca fra $p^{-1}(x)$ e $\pi_1(X, x) \big/ p_*(\pi_1(E, e))$;*
3. *$\forall \alpha \in \pi_1(X, x)$ si ha $[\alpha]^{-1}(p_*(\pi_1(E, e)))[\alpha] = p_*(\pi_1(E, [\alpha] \bullet e))$, ovvero i gruppi $p_*(\pi_1(E, u))$ con $u \in p^{-1}(x)$, sono tutti e soli i coniugati di $p_*(\pi_1(E, e))$.*

[1]Ricordiamoci che stiamo lavorando in spazi localmente connessi per archi, tali per cui connesso ⇔ connesso per archi.

[2]La definizione di p_* si trova in 2.

Dimostrazione. 1) Provare che è un omomorfismo ben definito segue dalle proprietà di p_*. Per definizione

$$ker(p_*) = \{ [\alpha] \in \pi_1(E, e) \mid p_*([\alpha]) = [p \circ \alpha] = [1_x] \} .$$

Sia $[\gamma] \in ker(p_*)$, allora $[p \circ \gamma] = [1_x]$, per il lemma 9.12 sappiamo allora che $\tilde{1_x} \sim p \,\tilde{\circ}\, \gamma$, cioè $1_e \sim \gamma$, in quanto γ è l'unico sollevamento di $p \circ \gamma$ con punto iniziale e. Dunque $[\gamma] = [1_e]$.

Proviamo l'uguaglianza mediante doppio contenimento.
$\subseteq$) Se $\alpha \in ({}_*p)(\pi_1(E, e)) \subset \pi_1(X, x)$, allora esiste $\beta \in \pi_1(E, e)$ tale che $[p \circ \beta] = [\alpha]$. Dunque gli unici sollevamenti di $p \circ \beta$ e α con punto iniziale e sono omotopi, cioè $\beta \sim \tilde{\alpha}$ e hanno uguale punto finale, ma ciò vuol dire che $e = \beta(1) = \tilde{\alpha}(1) = e \cdot [\alpha]$.
$\supseteq$) Viceversa, se $\alpha \in \pi_1(X, x)$ è tale che $e \cdot [\alpha] = e$, cioè $\alpha_e(1) \in \pi_1(E, e)$ ed è tale che $[p \circ \alpha_e] = [\alpha]$.

2) Osserviamo che se E è connesso, l'azione di monodromia sulle fibre è transitiva. Di conseguenza $orb(e) = p^{-1}(x)$ e sappiamo per risultati di teoria dei gruppi che è in corrispondenza biunivoca con le classi laterali dello stabilizzatore, cioè con $\pi_1(X, x)\big/ p_*(\pi_1(E, e))$. 3) è analogo. □

Corollario 9.15. *Se X è semplicemente connesso, dato $p : E \to X$ rivestimento, allora p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sappiamo per il teorema precedente che un rivestimento è surgettivo e aperto, in quanto è un omeomorfismo locale. Proviamo che è iniettivo e dunque bigettivo per concludere.

Sappiamo che $\forall x \in X$ $p^{-1}(x)$ è in corrispondenza biunivoca con

$$\pi_1(X, x)\big/ p_*(\pi_1(E, e)) \cong \{ 0 \}$$

poiché X è semplicemente connesso. Dunque le fibre hanno cardinalità 1. □

Corollario 9.16 (Gruppo fondamentale della sfera uno-dimensionale)**.** *Il gruppo fondamentale della sfera è infinito numerabile.*

Dimostrazione. Proponiamo due diverse dimostrazioni.

1) Proviamo che esistono almeno $\aleph_0$ cammini chiusi in S^1 non omotopicamente equivalenti. Definiamo $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Omega(S^1, 1, 1) \ni \alpha_n : I \to S^1 \text{ tale che } t \mapsto e^{2\pi nit}.$$

Consideriamo il rivestimento $\not p : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $t \mapsto e^{2\pi t}$. Osserviamo che ogni α_n viene sollevato dalla moltiplicazione per n, in modo unico se scegliamo $\tilde{\alpha}(0) = 0 \in \not p^{-1}(1)$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\not p"] \\ I \arrow[ur, "\times n"] \arrow[r, "\alpha_n"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Se $m \neq n$, sappiamo allora che $Mon(0, \alpha_n) = \times n(1) = n$, ma $Mon(0, \alpha_m) = \times m(1) = m$. Dunque α_n e α_m non sono omotopi. Questo ci dice che $|\pi_1(S^1)| \geq \aleph_0$.

Proviamo che ogni cammino chiuso su S^1 è omotopicamente equivalente a un opportuno α_n. Sia $\mathbb{Z} \ni n = Mon(0, \alpha)$, dato che $Mon(0, \alpha) \in \not p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Proviamo che $\alpha_n \sim \alpha$. Proviamo che i sollevamenti con punto iniziale 0 sono omotopi e che hanno il medesimo punto finale. Sappiamo $\tilde{\alpha_n} = \times n$ e che $\times n(1) = n$, inoltre per costruzione questo coincide con $Mon(0, \alpha) = \tilde{(\alpha)}(1)$, il sollevamento che abbiamo scelto. Costruiamo $\tilde{F} : I^2 \to \mathbb{R}$ omotopia fra $\tilde{\alpha}$ e $\times n$: definita così va bene

$$\tilde{F}(t, s) = (1 - s) \cdot \tilde{\alpha}(t) + s \cdot \times n(t).$$

Dunque sono proprio $\aleph_0$.

2) Sfruttiamo la corrispondenza biunivoca fra le fibre dei punti di S^1 secondo $\not p$ e le classi laterali di $\not p_*(\pi_1(\mathbb{R}, r))$.

Dato $x \in S^1$ e $r \in \not p^{-1}(x)$, sappiamo che

$$\not p^{-1}(x) \longleftrightarrow \pi_1(S^1, x) \Big/ \not p(\pi_1(\mathbb{R}, r)) \cong \pi_1(S^1, x)$$

dato che $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso. Sappiamo che $\not p^{-1}(x)$ ha cardinalità numerabile e dunque abbiamo chiuso. □

Teorema 9.17 (del punto fisso di Brower)**.** *Una funzione continua $f : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\forall x \in D^2 \ f(x) \neq x$. Possiamo di conseguenza considerare l'intersezione fra ∂D^2 e la retta passante per x e $f(x)$. Più precisamente, sia $r : D^2 \to S^1$ tale che

$$r : x \mapsto ! \ y \in S^1 \cap \{ (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot x \mid t > 0 \}.$$

Questa è continua e se $x \in S^1$, $r(x) = x$, dunque è una retrazione di D^2 al disco. Allora per 7.2 si avrebbe che $\pi_1(S^1)$ si immerge in $\pi_1(D^2) = \{ 0 \}$, ma questo è assurdo perché $\pi_1(S^1)$ è infinito numerabile. □

Teorema 9.18 (Fondamentale dell'algebra)**.** *Un polinomio a coefficienti complessi di grado positivo ammette una radice complessa.*

Dimostrazione. A meno di moltiplicazioni per un invertibile, possiamo supporre che $p(x)$ sia monico. Sia per assurdo $p(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}$. Possiamo allora definire la seguente applicazione $\alpha_r : I \to S^1$ tale che

$$t \mapsto \frac{p(r \cdot e^{2\pi i t})}{||p(r \cdot e^{2\pi i t})||} \cdot \frac{||p(r)||}{p(r)}.$$

Osserviamo che $\forall r$ $\alpha_r \in \Omega(S^1, 1, 1)$ e che sono tutti omotopicamente equivalenti mediante l'omotopia $F(t, s) = \alpha_z(t)$ con $z = (1 - s)r + sq$. Quindi osservando che per $r = 0$, α_0 è il cammino banale, abbiamo che tutti questi cammini sono omotopicamente banali.

Scriviamo ora $p(x) = x^n + q(x)$, isolando cioè il leading term. Sappiamo che a $+\infty$, questo domina: cioè $\exists R \gg 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{C}$ per cui $||x|| \geq R$ sia ha

$$||x^n|| > ||q(x)||.$$

Possiamo quindi definire $P : I \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che

$$(s, x) \mapsto x^n + s \cdot q(x).$$

Si può annullare solo per valori di x minori in norma di R. Consideriamo la seguente omotopia

$$G : I^2 \to S^1 \text{ tale che } \frac{P(s, Re^{2\pi i t})}{||P(s, Re^{2\pi i t})||} \cdot \frac{||P(s, R)||}{P(s, R)}.$$

$G(t, 0) = e^{2\pi i n t}$, cioè il cammino non omotopicamente banale che gira attorno alla circonferenza n volte; inoltre $G(0, s) = G(1, s) = 1$ e $G(t, 1) = \alpha_R(t)$. Tuttavia $\alpha_R \sim \alpha_n$ e dunque è omotopicamente banale, quindi abbiamo un assurdo. □

Lo scopo dei prossimi risultati è fornirci un teorema di struttura, basato sulla corrispondenza fra la fibra e le classi laterali della fibra. Richiamiamo però prima alcune definizioni sulle azioni di gruppi.

Dato X un insieme e un gruppo G, parliamo di *azione sinistra* se abbiamo una applicazione $G \times X \to X$ tale che $(g, x) \mapsto g \bullet x$ tale che

1. $\forall x \in X$ $(1_G, x) \mapsto x$;

2. $\forall g_1, g_2 \in G \ \forall x \in X \ (g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x)$.

Un esempio banale di azione sinistra è quella degli omeomorfismi di uno spazio topologico sullo spazio.

La definiamo *libera* se $\forall g \neq 1_G \ g \bullet x \neq x$. In particolare se una azione agisce in modo propriamente discontinuo è libera; il viceversa no. Se l'azione è libera e transitiva, allora $\forall x, y \in X \ \exists! \ g \in G$ tale che $g \bullet x = y$.

Sia X un insieme e G, H gruppi che agiscono rispettivamente a sinistra e destra su X. Le due azioni si dicono *compatibili* $\forall g \in G$ e $\forall h \in H$

$$g \bullet (x \bullet h) = (g \bullet x) \bullet h.$$

In questo caso possiamo definire l'azione come

$$G \times X \times H \to X \text{ tale che } (g, x, h) \mapsto g \bullet x \bullet h.$$

Nota bene: d'ora in poi, con una abuso di linguaggio, identificheremo il gruppo con l'azione che determina.

Un esempio di azioni compatibili sono le azioni di $G = H = GL(n, \mathbb{R})$ su $X = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ lineari} \}$.

Osserviamo che se abbiamo due azioni compatibili $G \circlearrowright X \circlearrowleft H$ in cui quella di G e libera e transitiva, allora $\forall e \in X$ è ben definita la seguente applicazione

$$\vartheta_e : H \to G \text{ tale che } h \mapsto g : \ g \bullet e = e \bullet h.$$

Vediamone alcune proprietà:

Proposizione 9.19. *1. ϑ_e è un omomorfismo di gruppi;*

2. ϑ_e è surgettivo $\Leftrightarrow$ H è libera e transitiva;

3. $Ker(\vartheta_e) = \{ h \in H \mid e \bullet h = e \} = Stab_H(e)$.

Dimostrazione. 1) Siano $h, k \in H$: proviamo che $\vartheta_e(hk) = \vartheta_e(h)\vartheta(k)$. Mostriamo che agiscono allo stesso modo su un elemento, poi per libertà dell'azione di G concluderemo che sono uguali. Sia $e \in X$

$$\begin{aligned}\vartheta(hk) \bullet e = e \bullet hk = (e \bullet h) \bullet k = \\ = (\vartheta_e(h) \bullet e) \bullet k = \vartheta_e(h) \bullet (e \bullet k) = \\ = \vartheta_e(h) \bullet (\vartheta_e(k) \bullet e) = \vartheta_e(h)\vartheta_e(k) \bullet e.\end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ Sappiamo che $\forall g \in G$ esiste un elemento $h \in H$ tale che $\vartheta_e(h) = g$. Allora $\forall x, y \in X$ dato che G induce un'azione libera e transitiva, abbiamo dimostrato che esiste un unico $g \in G$ tale che $g \bullet x = y$, di conseguenza se $h \in H$ è tale che $\vartheta_e(h) = g$ abbiamo che $\vartheta_e(h) \bullet x = x \bullet h = y$. $\Leftarrow$ Viceversa, se H è libera e transitiva e $g \bullet e = y$, abbiamo che esiste $h \in H$ tale che $e \bullet h = y$ e dunque $g \bullet e = e \bullet h$, cioè $g = \vartheta_e(h)$.

3) Banalmente

$$\begin{aligned} ker(\vartheta_e) &= \{\, h \in H \mid \vartheta_e(h) = id_G \,\} = \\ &= \{\, h \in H \mid e \bullet h = id_G \bullet e = e \,\} = \\ &= Stab_H(e). \end{aligned}$$

□

Contestualizziamo le relazioni provate al nostro caso. Dato E uno spazio topologico e $G < Omeo(E)$ che agisce in modo propriamente discontinuo, sappiamo che $p : E \to E/G$ è un rivestimento del quoziente $X = E/G$. Fissato $x \in X$, definiamo due azioni:

$$G \times p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$$

una sinistra, semplicemente restringendo quella di G alla fibra di x: sappiamo che è libera in quanto propriamente discontinua (è solo una restrizione) e anche transitiva in quanto $p^{-1}(x)$ non è altro che un'orbita di $G \times E \to E$;

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$$

una destra, quella di monodromia che sappiamo per le proprietà descritte precedentemente che è transitiva se e solo se E è connesso.

Lemma 9.20. *Le due azioni definite sopra sono compatibili.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\forall e \in p^{-1}(x)$, $\forall g \in G$ e $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x)$ vale

$$g(e \bullet [\alpha]) = (g(e)) \bullet [\alpha].$$

Osserviamo che ciò equivale a dimostrare che

$$g(Mon(e, \alpha)) = Mon(g(e), \alpha) \Leftrightarrow g(\alpha_e(1)) = \alpha_{g(e)}(1).$$

Proviamo qualcosa di più: cioè che le applicazioni da I in X, $g(\alpha_e(t))$ e $\alpha_{g(e)}(t)$ coincidono. Lo facciamo provando che entrambe sollevano α con lo stesso punto iniziale.

Proviamo che $p \circ g \circ \alpha_e = \alpha$, cioè che coincidono punto a punto. Dato che p è la proiezione al quoziente rispetto a G, abbiamo che $\forall t \in I$ vale $g \circ \alpha_e(t) \in orb(\alpha_e(t))$, dunque

$$\begin{aligned} p \circ g \circ \alpha_e(t) &= p \circ \alpha_e(t) \\ &= \alpha(t). \end{aligned}$$

Inoltre hanno entrambe punto iniziale $g(e)$, dunque coincidono e le azioni sono compatibili. □

Corollario 9.21. *Dato $G < Omeo(E)$ che agisce in modo propriamente discontinuo e il rivestimento $p : E \to E/G$, dato $x \in X = E/G$ ed $e \in p^{-1}(x)$, esiste un omomorfismo di gruppi $\vartheta_e : \pi_1(X) \to G$ tale che*

$$[\alpha] \mapsto g : \; g(e) = \alpha_e(1).$$

Dimostrazione. Segue per la proposizione 9.19, dato che le due azioni sono compatibili. □

Osservazione 9.22. Sappiamo anche che

$$ker(\vartheta_e) = Stab_{\pi_1(X)}(e) = p_*(\pi_1(E, e)),$$

rimettendo insieme un po' di risultati dimostrati.

Dunque abbiamo che ϑ_e definisce un'iniezione di $\pi_1(E) \big/ p_*(\pi_1(E, e))$ in G, per primo teorema di omomorfismo. Possiamo identificare l'applicazione ϑ_e con quest'ultima iniezione. Abbiamo che se E è connesso, l'azione del $\pi_1(X)$ sulla fibra $p^{-1}(x)$ è transitiva, inoltre è libera in quanto lo è G. Dunque ϑ_e è surgettiva e quindi abbiamo un omeomorfismo fra $\pi_1(X) \big/ p_*(\pi_1(E, e))$ e G.

In particolare se E fosse semplicemente connesso, avremo proprio una bigezione fra $\pi_1(X)$ e G.

L'inversa di questa bigezione è $\vartheta_e^{-1} : G \to \pi_1(X, x) \big/ \pi_1(E, e)_*$ tale che

$$g \mapsto [p \circ \gamma] \text{ dove } \gamma \in \Omega(X, e, g(e)).$$

Ne abbiamo ricavato un vero e proprio teorema di struttura.

Facciamo alcuni esempi.

Esempio 9.1 (e tagliata)**.** Sia $\not{e} : \mathbb{R} \to S^1 \cong \mathbb{R}\big/\mathbb{Z}$. Sappiamo che E è connesso e quindi abbiamo un omeomorfismo fra $\pi_1(S^1)\big/\not{e}_*(\pi_1(\mathbb{R}))$ e $\mathbb{Z}$. In particolare $\pi_1(\mathbb{R})$ è banale, dunque abbiamo

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Proviamo a determinare chi è l'inversa $\vartheta_e^{-1} : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$. Al solito stiamo ponendo $x = 1$ e $e \in \not{e}^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Allora $\vartheta_e^{-1}(1) = [\not{e} \circ \gamma]$ dove γ è il cammino su S^1 che parte da 1, fa un giro e torna in 1.

Esempio 9.2 (Spazio proiettivo reale)**.** Consideriamo il rivestimento $p : S^n \to S^n\big/ < \pm 1 > \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, come nell'esempio 8.10 per $n \geq 2$.

Consideriamo la mappa

$$\vartheta_e : \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\big/p_*(\pi_1(S^n)) \to \mathbb{Z}_2 =< \pm 1 > .$$

Sappiamo che S^n per $n \geq 2$ è semplicemente connesso, quindi

$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\big/p_*(\pi_1(S^n)) \cong \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})).$$

Inoltre $ker(\vartheta_e) = Stab_{\pi_1(S^n)}(e) = p_*(\pi_1(S^n)) = \{ 0 \}$, dunque è iniettiva.

Infine dato che S^n è connesso, l'azione di $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ è libera e transitiva, dunque la mappa è surgettiva.

Dunque $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$.

Esempio 9.3 (Spazio lenticolare)**.** Consideriamo $E = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ e la seguente azione: dato $m \in Zeta$

$$\mathbb{Z}_n \times S^3 \to S^3 \text{ tale che } (h, v = (x, y)) \mapsto (e^{\frac{2\pi i h}{n}} \cdot x, e^{\frac{2\pi i m h}{n}} \cdot y).$$

Definiamo il quoziente per questa azione *spazio lenticolare* e denotiamo $S^3\big/\mathbb{Z}_n = L(n, m)$.

Se $(m, n) = 1$, l'azione è propriamente discontinua, in tale caso vale che $\pi_1(L(n, m)) \cong \mathbb{Z}_n$.

Esempio 9.4 (Gruppo fondamentale non abeliano, bouquet di due circonferenze)**.** Dopo.

Richiami sui gruppi liberi, si rimanda alle dispense del corso di Algebra 1, tenuto da Gaiffi nel primo semestre dell'a.a. 2016/2017.

Teorema 9.23 (Bouquet di n-circoferenze)**.** *Il gruppo fondamentale del bouquet di n-circonferenze è isomorfo al gruppo libero su n generatori.*

Dimostrazione. A lezione lo abbiamo visto per $n = 2$. Dopo. □

Esercizio 9.1. *Dimostrare che $E = \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ non è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Sia $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il sottogruppo di $Omeo(E)$ costituito dalle traslazioni intere. Abbiamo che $X = E/G$ è omeomorfo al bouquet di 2-circonferenze, dunque è connesso. Inoltre l'azione è propriamente discontinua, quindi la proiezione al quoziente $p : E \to X$ è un rivestimento.

Vogliamo applicare l'applicazione ϑ_e per caratterizzare $\pi_1(E)$. Poniamo $e = (0, 0)$.

Osserviamo che abbiamo l'azione di $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e quella di $\pi_1(X)$ su E e che tali azioni sono compatibili, dunque è ben definito l'omomorfismo di gruppi:

$$\vartheta_e : \pi_1(X) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Tale applicazione è surgettiva, dato che per connessione di E l'azione del $\pi_1(X)$ è transitiva. Inoltre $ker(\vartheta_e) = p_*(\pi_1(E))$. Abbiamo allora per il primo teorema di omomorfismo che

$$\pi_1(X)\Big/p_*(\pi_1(E)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Ora X è omeomorfo al bouquet di 2 circonferenze, dunque il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, allora

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}\Big/p_*(\pi_1(E)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Ne segue che $\pi_1(E)$ non può essere banale. □

Richiamiamo la definizione di prodotto libero.

Teorema 9.24 (di Van Kampen, 2)**.** *Sia X uno spazio topologico e A, B due aperti tali che $X = A \cup B$. Supponiamo che A, B e $A \cap B$ siano connessi per archi e consideriamo $x_0 \in A \cap B$. Date i e j le inclusione canoniche,* *consideriamo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A \cap B) \arrow[dl, "j_*"'] \arrow[dr, "i_*"] & \\
\pi_1(A) \arrow[dr] & & \pi_1(B) \arrow[dl] \\
 & \pi_1(X) &
\end{tikzcd}$$

dunque si ha che $\pi_1(X, x_0) \cong \dfrac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B; x_0)}{N}$ *dove* N *è il più piccolo sottogruppo normale contenente gli elementi della forma* $i_*([\alpha])(j_*)^{-1}([\alpha])$ *con* $[\alpha] \in \pi_1(A \cap B)$.

Dimostrazione. □

Corollario 9.25. *Se* $A \cap B$ *è semplicemente connesso,* $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) * \pi_1(B)$.

Dimostrazione. Il sottogruppo N è banale. □

Esempio 9.5. Un esempio in cui applicarlo è il bouquet di 2 circonferenze, il cui gruppo fondamentale sappiamo essere $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Questo può essere usato come passo base per dimostrare tramite Van Kampen che il bouquet di n circonferenze è $\underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$.

Esercizio 9.2. *Calcolare il gruppo fondamentale di* $\mathbb{R}^2 - \{ n \text{ p.ti} \}$.

Dimostrazione. Proviamo per induzione su n che

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{ n\text{n p.ti} \}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}.$$

Se $n = 1$, possiamo a meno di omeomorfismo supporre che $p = (0, 0)$ e retrarre per deformazione $\mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \}$ a S^1 tramite la deformazione: se $x = ||x|| \cdot \dfrac{x}{||x||} = \rho \cdot v$, $F : \mathbb{R}^2 - \{ (0, 0) \} \times I \to reali^2 - \{ (0, 0) \}$ è tale che

$$F(x, t) = (1 - t) \cdot x + t \cdot v.$$

Dunque $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{ p \}) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Sia vero per $n-1$. Ora consideriamo H una retta che sconnette $\mathbb{R}^2$ individuano due sezioni di piano A e B contenenti rispettivamente $n-1$ punti e p, punti che togli. Ingrassandoli un po', abbiamo che sono ancora connessi per archi, così come la loro intersezione. Inoltre la loro intersezione si retrae per deformazione ad H, dunque è semplicemente connessa. Abbiamo quindi che

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(A) * \pi_1(B) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ volte}} * \mathbb{Z},$$

applicando l'ipotesi induttiva. □

Esercizio 9.3. *Calcolare il gruppo fondamentale del toro.*

Dimostrazione. Sappiamo che il toro è omeomorfo a $S^1 \times S^1$. Dunque il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

Esercizio 9.4. *Calcolare il gruppo fondamentale del toro senza un punto.*

Dimostrazione. Usiamo la definizione del toro come quoziente di I^2, in cui si identificano a 2 a 2 i lati. Possiamo supporre che il punto che togliamo non appartenga ad uno dei bordi di I^2.

Lavoriamo sul quadrato senza un punto. Tale quadrato è retrabile al bordo: supponendo (a meno di omeomorfismo) che il punto tolto sia quello di coordinate $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ possiamo definire $r : I^2 - \{ p \} \times I \to I^2 - \{ p \}$ tale che $F(x,t) = (1-t) \cdot x + t \cdot x_0$ dove x_0 è l'intersezione col bordo della semiretta con origine in p e passante per x.

Essendo però i lati identificati, abbiamo che tale oggetto diventa il bouquet di 2 circonferenze e dunque con gruppo fondamentale omeomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

Rivestimenti universali

Proposizione 9.26 (Sollevamento di applicazioni qualsiasi)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $f : Y \to X$ un'applicazione continua con Y connesso. Siano $y_0 \in Y$ ed $e_0 \in p^{-1}(f(y_0))$. Allora esiste un sollevamento ad E di f $g : Y \to E$ tale che $g(y_0) = e_0$ se e solo se*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Dimostrazione. Abbiamo il solito diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

□

Definizione 9.3 (Rivestimento universale)**.** Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Lo definiamo *rivestimento universale* se E è semplicemente connesso.

Alcuni esempi di rivestimenti universali sono

- $p : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $t \mapsto e^{it}$, oppure $\not{e} : \mathbb{R} \to S^1$. In seguito vedremo in che relazione sono due rivestimenti universali;
- $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $n \geq 2$;
- $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $z \mapsto z^n$.

Tale definizione deriva dal fatto che godano di una proprietà 'universale', appunto, cioè possono essere sollevati su qualsiasi altro rivestimento e tale sollevamento, fissata l'immagine di un solo punto, è unico.

Proposizione 9.27 (Proprietà universale del rivestimento universale)**.** *Sia $p : E \to X$ un rivestimento universale e $q : F \to X$ un rivestimento. Allora $\forall f_0 \in F$ e $e_0 \in E$ tale che $p(e_0) = q(f_0)$*

$$\exists!\ \varphi : E \to F \text{ tale che } q \circ \varphi = p \text{ e } \varphi(e_0) = f_0,$$

cioè φ solleva p ad F.

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Osserviamo che i sollevamenti trovati nella dimostrazione tra E e F non sono solo omeomorfismi fra gli spazi totali come spazi topologici, ma rispettano le fibre dei rivestimenti p e q. Caratterizziamo meglio tali omeomorfismi.

Definizione 9.4 (Automorfismo di un rivestimento)**.** Dato un rivestimento $p : E \to X$ definiamo *automorfismo* di p una mappa $\varphi \in Omeo(E)$ tale che $p \circ \varphi = p$, ovvero rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & X \end{tikzcd}$$

Denotiamo $Aut(E, p)$ il gruppo degli automorfismi del rivestimento p. Questo chiarisce il fatto che parlassimo di 'rivestimenti' omeomorfi, con qualche abuso di linguaggio, quando invece, più propriamente, lo sono i loro spazi totali.

Esercizio 9.5. *Dato il rivestimento $\notin : \mathbb{R} \to S^1$. Classificare i suoi automorfismi.*

Dimostrazione. Proviamo che $Aut(\mathbb{R}, \notin) = \{\, x \mapsto x + k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$.

$\supseteq$) Ogni traslazione intera rispetta le fibre, di conseguenza rende il diagramma commutativo.
$\subseteq$) Sia $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $t \in Aut(\mathbb{R}, \notin)$, di conseguenza $\notin = \notin \circ t$.

Sia $k = t(0)$, proviamo che allora t coincide con la traslazione intera $x \mapsto x+k$. Infatti sappiamo che la traslazione solleva $\notin$ e $0 \mapsto k$; ma così anche t e dunque coincidono. □

Osserviamo che dato $p : E \to X$ rivestimento, allora il gruppo $Aut(E, p)$ agisce sulle fibre di p. Di conseguenza, per la proprietà fondamentale delle identificazioni esiste un'unica mappa che fa commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\
E \big/ Aut(E, p) \arrow[ur, "\tilde{p}"'] &
\end{tikzcd}$$

dove q è la proiezione al quoziente, che sappiamo essere un'identificazione. Inoltre p è aperta, di conseguenza lo è anche $\tilde{p}$. Analogo per la surgettività.

Proposizione 9.28. *Nelle notazioni precedenti, se $p : E \to X$ è un rivestimento universale, allora $\tilde{p}$ è un omeomorfismo e $\pi_1(X) \cong Aut(E, p)$.*

Dimostrazione. Lo farò. □

Ma sotto quali ipotesi esiste un rivestimento universale? Diamo alcune definizioni.

Definizione 9.5 (Semi-localmente semplicemente connesso)**.** Uno spazio topologico X si dice *semi.localmente semplicemente connesso* se ogni punto punto ammette un intorno semplicemente connesso.

Banalmente se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni semplicemente connessi, si dice *localmente semplicemente connesso.* Uno spazio del genere è semi-localmente semplicemente connesso, a non vale il viceversa.

Esempio 9.6 (Orecchino hawaiano)**.** Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$C_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - \frac{2x}{n} = 0 \right\}.$$

L'unione $C = \bigcup_{\mathbb{N}} C_n$ è detto orecchino hawaiano.

È localmente connesso per archi e connesso, tuttavia non è semi-localmente semplicemente connesso: infatti $(0,0)$ ammette un intorno non semplicemente connesso se questo contiene un C_n. Definiamo allora $Y \subset \mathbb{R}^3$ il cono di vertice $v = (x,y,z)$ tale che $z \neq 0$ su C.

Tale insieme è contrattile a v e dunque semplicemente connesso. In particolare è semi-localmente semplicemente connesso, ma non localmente semplicemente connesso.

Esercizio 9.6. *Sia* $X = \mathbb{R}^2 - \left\{ (\frac{1}{2^n}, 0) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$*. Provare che è connesso e localmente connesso per archi, ma non semi-localmente semplicemente connesso.*

Teorema 9.29 (Esistenza del rivestimento universale)**.** *Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora X ammette un rivestimento universale se e solo se X è semi-localmente semplicemente connesso.*

Dimostrazione. □

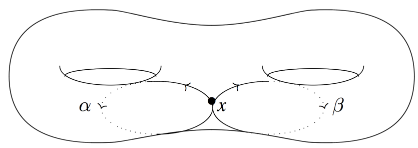
Esercizio 9.7. *Classificare a meno di omeomorfismi di rivestimento tutti i rivestimenti di S^1.*

Teorema 9.30. *Se X è uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi e semi-localmente semplicemente. Allora $\forall H < \pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $p_H : E_H \to X$ tale che $p_{H*}(\pi_1(E, e_0)) = H$, dove $x_0 \in X$ ed $e_0 \in p_H^{-1}(e_0)$.*

Capitolo 10

Altri esercizi svolti

Esercizio 10.1. *Calcolare il gruppo fondamentale della ciambella con due buchi.*



Dimostrazione. Chiamiamo X tale figura. Vogliamo usare Van Kampen, ma vedere le cose su questa figura è piuttosto complicata, quindi cerchiamo di vederla come un quoziente. Formando un ottagono con i due quadrati (aperti) il cui quoziente ci dava un toro, vediamo che se identifichiamo opportunamente i lati abbiamo quella figura.

Ora i due aperti su cui applichiamo Van Kampen sono A: l'ottagono meno un punto centrale, retraibile al bordo, e B un disco aperto che non interseca il bordo centrato nel punto tolto prima. Ora B è semplicemente connesso, quindi dobbiamo capire chi è $\pi_1(A)$. Questo è omeomorfo al bouquet di 4 circonferenze e perciò abbiamo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Per Van Kampen dobbiamo quozientare per $i_*([\alpha])j_*([\alpha])^{-1}$, così che fare un giro nell'intersezione divenga un cammino omotopicamente banale in X. Nell'ottagono è piuttosto semplice. Viene circa fuori

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \Big/ < aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} > .$$

$\square$

Esercizio 10.2. *Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3$ senza i tre assi.*

Dimostrazione. Sia $X = \mathbb{R}^3 - \{ \text{ asse } x, \text{ asse } y, \text{ asse } z \}$. Osserviamo che se denotiamo i punti nel seguente modo $x = ||x|| \cdot \frac{x}{||x||} = \rho \cdot v$, l'applicazione $r : X \times I \to X$ tale che

$$(x, t) \mapsto (1 - t) \cdot x + t \cdot v$$

è una deformazione di X su $S^2 - \{ 6 \text{ p.ti} \}$.

Dato che $S^2 - \{ \text{p.to} \} \cong \mathbb{R}^2$, abbiamo che $S^2 - \{ 6 \text{ p.ti} \} \cong \mathbb{R}^2 - \{ 5 \text{ p.ti} \}$. Ma abbiamo dimostrato a lezione che questo è omeomorfo al bouquet di 5 circonferenze e dunque ha gruppo fondamentale isomorfo a

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

□

Esercizio 10.3. *Sia* $X = \{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \}$ *dove*

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 100)((x - 10)^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Calcolare il suo gruppo fondamentale.

Dimostrazione. Tale sottoinsieme è il luogo degli zeri del polinomio: $f(x, y, z)$. Ma

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0 \\ \vee \\ (x - 10)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Dunque è l'unione dei luoghi di zeri di $p_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100$ e $p_2(x, y, z) = (x - 10)^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Sappiamo che il primo è la sfera di raggio $r_1 = 10$ e centro nell'origine, mentre il secondo è la sfera di raggio $r_2 = 1$ e centro in $(10, 0, 0)$.

In questo modo si calcola anche il gruppo fondamentale della borsetta, solo che ha un attaccamento in meno.

Esercizio 10.4. *Consideriamo* $f : S^1 \to S^1$. *Dire se è vero o falso:*

- f *ammette un punto fisso;*
- $f \sim$ *costante, allora* f *ammette un punto fisso;*
- *se* f *ammette un punto fisso, allora* $f \sim$ *costante.*

Dimostrazione. 1 e 3 sono banalmente falsi, nel primo caso basta considerare $-Id_{S^1}$, nel terzo Id_{S^1}. Il punto 2 invece è più eleborato. Sfruttando l'omotopia con la costante, possiamo considerare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} S^1 \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \hookrightarrow D^2 \\ S^1 \times I \big/ S^1 \times \{ 1 \} \cong D^2 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Poiché F è costante sulle fibre di π, abbiamo che esiste unica g che rende il diagramma commutativo. Ma allora possiamo immergere iniettivamente S^1 in D^2 e sappiamo che per il teorema di Brower 9.17 ammette un punto fisso. Poiché l'immagine è contenuta in S^1, cioè sul bordo di D^2, abbiamo che se (identificando un po' male) $x \in S^1 \times I \big/ S^1 \times \{ 1 \} = x \in D^2$, allora $F^{-1}(x) = (x', 0)$. Ma questo vuol dire che Mf ha un punto fisso. (Boh) □

Esercizio 10.5. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento, allora se X è $T2$ lo è anche E.*

Dimostrazione. Siano $e, u \in E$. Consideriamo $p(e), p(u) \in X$. Se sono uguali, gli aperti cercati sono le componenti connesse della fibra discreta di $a = p(e) = p(u)$. Se sono distinti, allora esiste $U \in \mathcal{I}(p(u))$, $V \in \mathcal{I}(p(e))$ tali che $U \cap V = \emptyset$. A questo punto dati A e B aperti banalizzanti, so che $A \cap U$ e $B \cap V$ sono aperti che contengono rispettivamente $p(u)$ e $p(e)$, dunque la controimmagine contiene u ed e ed è aperta. Ma $p^{-1}(U \cap A) \cap p^{-1}(B \cap V) = p^{-1}(U \cap A \cap B \cap V) \subseteq p^{-1}(U \cap V) = \emptyset$. □

Esercizio 10.6 (Manetti 10.14)**.** *Provare che in uno spazio $T2$ ogni retratto è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ un retratto di X, ovvero un sottoinsieme tale per cui esiste $r : X \to Y$ continua e tale che $r(y) = y \ \forall y \in Y$. Consideriamo le seguenti composizioni:

$$X \xrightarrow{(id,r)} X \times Y \xrightarrow{i} X \times X$$

$$x \longmapsto (x, r(x)) \longmapsto (x, r(x))$$

Poiché X è $T2$ sappiamo che $\Delta = \{ (x, x) \mid X \times X \}$ è chiusa, dunque lo è $D = i^{-1}(\Delta)$ e $Y' = (id, r)^{-1}(D)$ in X. Proviamo che $Y' = Y$. Banalmente

$Y \subset Y'$, infatti $i \circ (id, r)(Y) = \{ (y, y) \mid Y \times Y \} \subset \Delta$. Il viceversa, invece: se $(x, y) \in Y'$ allora $(x, y) = (x, r(x)) \in \Delta$, ma $x = r(x) \in Y$. □

Esercizio 10.7 (Manetti 10.15)**.** *Mostrare che il bicchiere vuoto è un retratto del bicchiere pieno.*

Dimostrazione. Definiamo bicchiere pieno $D^2 \times I$ e il bicchiere vuoto $D^2 \times \{ 0 \} \cup S^1 \times I$ come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

È una cosa brutta quindi non la scrivo. □

Parte III

Analisi Complessa

Capitolo 11

Prime definizioni

Serie

Definizione 11.1 (Serie)**.** Data $\{ z_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi, indichiamo con S_n la somma parziale fino all'n-esimo termine. La successione delle somme parziali è detta *serie* in n e si indica come

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Se tale successione converge, allora il numero complesso $\mathbb{C} \ni S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è detto *somma della serie.*

Osservazione 11.1 (Condizione necessaria)**.** Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, allora $z_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 11.1. Dato $z \in \mathbb{C}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ha somma $< \infty$ se e solo se $||z|| < 1$. Infatti se $||z|| > 1$, $||z||^n \geq 1$ e di conseguenza ha limite $\neq 0$, quindi non ha somma finita. Invece se $||z|| < 1$ sappiamo che

$$(1 - z^{n+1}) = S^n(1 - z) \Rightarrow S^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z} \to 0.$$

Definizione 11.2 (Convergenza assoluta)**.** Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge assolutamente* se $\sum_{n=0}^{\infty} ||z_n||$ converge.

Proposizione 11.2. *Una serie assolutamente convergente converge.*

Dimostrazione. Se $\sum_{n=0}^{\infty} ||z_n||$, allora poiché $||z||_\infty < ||z||$ convergono assolutamente (e quindi semplicemente) anche le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} Re(z_n) \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} Im(z_n).$$

Di conseguenza

$$\lim ||S_m|| = \lim ||\sum_{n=0}^{m} z_n|| \leq \lim \sum_{n=0}^{m} ||z_n|| < \infty.$$

□

Esempio 11.2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2 i}$ converge assolutamente. Procediamo per confronto sapendo che $||n + n^2 i|| \geq n^2 = ||Im(n + n^2 i)||$.
Vale anche per le serie

$$\sum^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sin z \text{ e } \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z.$$

Ad esempio (vale anche per le altre due) $\sum^{\infty} \frac{||z||^n}{n!} < \infty$ per il criterio del rapporto:

$$\frac{||z||^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{||z||^n} = \frac{||z||}{n+1} \to 0.$$

Teorema 11.3 (Moltiplicazione di Cauchy)**.** *Se* $\sum^{\infty} a_n$ *e* $\sum^{\infty} b_n$ *convergono assolutamente, allora*

$$\sum^{\infty} a_n \sum^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}).$$

Questo teorema ha un'utile conseguenza:

Corollario 11.4. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $e^{z+w} = e^z e^w$.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
e^{z+w} &= \sum^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \\
&= (\sum^{\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum^{\infty} \frac{w^m}{n!}) = e^z e^w.
\end{aligned}
$$

□

Infatti $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Derivata complessa e differenziabilità

Definizione 11.3 (Differenziabilità in un punto)**.** Sia $z \in \mathbb{C}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{I}(z)$, allora $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ si dice *differenziabile* nel punto z se esiste

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

In tal caso definiamo *derivata* di f in z il limite e lo denotiamo $f'(z)$.

Ad esempio $f(z) = z$ è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C}$ con derivata 1.

Osservazione 11.5. A volte, possiamo scrivere $f = u + iv$ e in tal caso vale $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$. Tuttavia, il fatto che $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siano C^∞ non implica necessariamente che f sia differenziabile come funzione complessa. Ad esempio, $f(z) = \bar{z}$, infatti

$$\frac{f(z+\lambda) - f(\lambda)}{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = e^{-2i\vartheta}, \quad \text{se } \lambda = \rho e^{i\vartheta}.$$

Teorema 11.6. *Se f è differenziabile in $z \in \mathbb{C}$, allora è continua in z.*

Ricordiamo alcune proprietà delle funzioni differenziabili:

- se f, g sono funzioni differenziabili in $z \in \mathbb{C}$, allora $f \pm g$ è differenziabile in z con $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$;
- se f, g sono funzioni differenziabili in $z \in \mathbb{C}$, allora fg è differenziabile in z con $(fg)'(z) = f'(z)g(z) \pm f(z)g'(z)$;
- se f è una funzione differenziabile in $z \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è differenziabile in z con $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$.

In particolare ogni funzione polinomiale è differenziabile.

Teorema 11.7 (Differenziabilità del prodotto)**.** *Se g è differenziabile in z e f lo è in $g(z)$, allora $f \circ g$ è differenziabile in z.*

Dimostrazione. Da chiarire. $\square$

Ricordiamo che $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile in z se esiste $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f(z) - f(a) = A(z - a) + o(||z - a||)$. In particolare se tale A esiste, è unica e la matrice che la induce è la Jacobiana.

Proposizione 11.8. *Dato $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{I}(a)$ aperto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *f è $\mathbb{C}$-differenziabile in a;*
2. *$f : (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è $\mathbb{R}$-differenziabile in $(Re(a), Im(a))$ e l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associata a*
$$J_{(f,a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$
è la moltiplicazione per il numero complesso $f'(a)$.

Dimostrazione. Segue dalle definizioni.

Ci chiediamo allora come deve essere fatta la matrice associata ad A affinché esprima la moltiplicazione per un numero. Dato $l = a + ib$, vogliamo che $\forall z \in \mathbb{C}\ Az = lz$. Lavorando in coordinate rispetto alla base canonica $\{ 1, i \}$ ciò vuol dire che $A \cdot 1 = l$ e $A \cdot i = -b + ia$, cioè
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$
Questa condizione è necessaria e sufficiente. Abbiamo allora dimostrato il

Teorema 11.9 (Caratterizzazione delle funzioni $\mathbb{C}$-differenziabili)**.** *Dato $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{I}(a)$ aperto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, allora sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *f è $\mathbb{C}$-differenziabile in a;*
2. *$f : (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è $\mathbb{R}$-differenziabile e vale che $J_{(f,a)}$ è come sopra, ovvero*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{11.1}$$
Inoltre vale che $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

Le equazioni 11.1 sono dette *equazioni di Cauchy-Riemann.* Ricordiamo infine che una condizione sufficiente per la differenziabilità in un punto è l'esistenza delle derivate parziali in un intorno.

Esempio 11.3 (Differenziabilità dell'esponenziale, seno e coseno)**.** Date $f(z) = e^z$, $f(z) = \sin z$ e $f(z) = \cos z$, queste differenziabili in ogni punto di $\mathbb{C}$, rispettano infatti le condizioni di Cauchy-Riemann. Se $z = x + iy$,

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y,$$

allora $u(x + iy) = e^x \cos y$ e $v(x + iy) = e^x \sin y$, allora le derivate parziali sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x+iy) &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x+iy) &= -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x+iy) &= e^x \sin y & \frac{\partial y}{\partial y}(x+iy) &= e^x \cos y \end{aligned}$$

e rispettano le equazioni di Cauchy-Riemann. Inoltre $u(z)$ e $v(z)$ sono continue e differenziabili su $\mathbb{R}^2$, dunque e^z lo è su $\mathbb{C}$.

Di conseguenza lo sono $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ e $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Vedremo che queste formule seguono anche dalla definizione delle funzioni come somme di serie.

Corollario 11.10 (Caratterizzazione delle funzioni costanti)**.** *Sia $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funzione continua con $\mathcal{U}$ aperto connesso. Allora f è costante su $\mathcal{U}$ se e solo se $\forall u \in \mathcal{U}$ f è differenziabile in u e $f'(z) = 0$. In particolare se Re(z) (o $Im(z)$) sono costanti, allora f se differenziabile è costante.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ è ovvia. $\Leftarrow$ Sappiamo che f rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann, dunque

$$0 = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

Allora vista la lineare indipendenza di 1 e i, $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(z)$ e $\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z)$, dunque f è $\mathbb{C}$-differenziabile. $\square$

Esempio 11.4. La funzione $f(z) = Re(z)$ non è differenziabile in alcun punto, altrimenti per il corollario precedente sarebbe costante.

Corollario 11.11 (Teorema della funzione implicita)**.** *Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funzione $\mathbb{C}$-differenziabile, allora*

1. *se $f'(z) \neq 0$, allora esiste un intorno aperto di z, U_1, tale che $f| : U_1$ è iniettiva;*

2. *se f è iniettiva e $f'(z) \neq 0\ \forall z \in \mathcal{U}$, allora $f(\mathcal{U})$ è aperto in $\mathbb{C}$ e ammette un'inversa differenziabile in ogni punto di $f(\mathcal{U})$*

$$f^{-1} : f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \quad \textit{tale che} \quad f^{-1}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema della funzione implicita per funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: proviamo che $det(J_{(f,z)}) = 0$. Infatti essendo f differenziabile

$$det(J_{(f,z)}) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} = (\frac{\partial u}{\partial x}(z))^2 + (frac\partial u\partial y(z))^2 = ||f'(z)||^2.$$

Ora $||f'(z)||^2 = 0$ se e solo se $f'(z) = 0$. Dunque la Jacobiana è invertibile per ogni punto di $\mathcal{U}$. □

Definizione 11.4 (Funzione olomorfa)**.** Definiamo *olomorfa* una funzione $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ differenziabile in ogni punto di $\mathcal{U}$.

Esempio 11.5. Sappiamo che e^z è iniettiva se ristretta a

$$S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid -\pi < Re(z) \leq \pi \,\}.$$

Se S fosse aperto, per quanto visto precedentemente, potremmo dire che la sua inversa *Log* è olomorfa, ma questo è assurdo poiché non è continua.

Possiamo dirlo per S°: infatti

$$f|_{S^\circ} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \mathbb{R}^- \text{ tale che } z \mapsto e^z$$

per il corollario precedente ammette un'inversa olomorfa

$$Log|_{\mathbb{C}-\mathbb{R}^-} : \mathbb{C} - \mathbb{R}^- \to \mathbb{C} \text{ tale che } Log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Definizione 11.5 (Funzione armonica)**.** Sia $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ con $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ aperto, una funzione di classe C^2. La definiamo *armonica* se soddisfa $\forall (x, y) \in \mathcal{U}$:

$$\Delta u(x, y) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x, y) = 0.$$

Δ è detto *Laplaciano.*

Teorema 11.12. *Sia $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ con $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aperto, una funzione olomorfa tale che $f = u + iv$ con $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Allora u e v sono armoniche.*

Dimostrazione. Applicando Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Facendo la stessa cosa a partire da v, otteniamo la tesi. □

Sotto ipotesi di semplice connessione, vale anche il viceversa: se $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e $\mathcal{U}$ è semplicemente connesso, allora $u = Re(f)$ per una funzione f olomorfa. Lo dimostreremo più avanti.

Esempio 11.6. La funzione $log(|z|)$ è armonica su $\mathbb{C} - \{ 0 \}$: è $Re(Log)$, cioè

$$Log(z) = log(|z|) + iArg(|z|).$$

Log è olomorfa su $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, quindi log è armonica su tale spazio. Proviamo che lo è anche su $\mathbb{R}^-$ semplicemente usando altri rami del logaritmo scegliendo un diverso insieme S di definizione. Sia $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq Im(z) < 2\pi \}$. Allora Log è olomorfa su $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.

Differenziale totale

Data una funzione di variabile complessa, definiamo il *differenziale totale* di f come

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Posto $z = x + iy$, definiamo $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$. Ricordiamo che

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}.$$

Quindi, sapendo che $i \cdot (-i) = 1$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\bar{z}) - i\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\bar{z})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z}f\,dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}f\,d\bar{z}, \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.
In questo modo le equazioni di Cauchy-Riemann diventano

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \tag{11.2}$$

e la derivata è espressa da

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

In questa notazione il Laplaciano diventa

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{4\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

che è nullo per 11.2.

Capitolo 12

Integrazione e forme differenziali

Integrazione complessa

Definizione 12.1 (Funzione integrabile)**.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$ una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ è *integrabile* se sono integrabili $Re(f)$ e $Im(f)$ come funzioni reali. In tal caso vale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f(x))dx + i\int_a^b Im(f(x))dx.$$

Valgono alcune proprietà:

1. è $\mathbb{C}$-lineare;
2. $\forall c \in (a, b)$ si ha che $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
3. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$;
4. se f è continua, allora è integrabile;
5. (teorema fondamentale del calcolo integrale) se $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ è una funzione tale che $F' = f$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;
6. (formula di sostituzione) se $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, allora

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

.

Definizione 12.2 (Curva regolare, regolare a tratti)**.** Un'applicazione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ è una *curva regolare* se entrambe le sue componenti, reale e immaginaria, sono funzioni di classe C^1.

SI dice invece *regolare a tratti* se è possibile individuare una partizione $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ tale che $\forall i = 1, \ldots, n$ $\gamma_i = \gamma : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{C}$ è una curva regolare.

Osserviamo che una curva regolare è continua, poiché lo è sulle componenti.

Definizione 12.3 (Forma differenziale)**.** Dato $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme aperto, definiamo *forma differenziale* un'espressione del tipo $\omega = f(z)dx$, dove $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ è un'applicazione continua.

Definizione 12.4 (Integrale curvilineo)**.** Data $\omega = f(z)dz$ definita su un aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ e una curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathcal{U}$, definiamo *integrale di* ω *lungo la curva* γ

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Se γ è una curva regolare a tratti $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, allora poniamo

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega.$$

Osservazione 12.1. Osserviamo che fissata l'orientazione della curva, l'integrale di una forma differenziale è indipendente dalla parametrizzazione scelta della curva lungo cui calcoliamo l'integrale. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ è una curva regolare e $t : [a_1, b_1] \to [a, b]$ è un'applicazione crescente tale che $t(a_1) = a$ e $t(b_1) = b$, $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ è una curva che parametrizza in modo diverso la stessa curva descritta da γ e infatti vale $\gamma_1 = \gamma \circ t$.

Consideriamo una forma $\omega : f(z)dz$ definita su un sottoinsieme aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ e supponiamo che $Im(\gamma), Im(\gamma_1) \subset \mathcal{U}$, allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_{t(a)}^{t(b)} f(\gamma(t(s)))(\gamma \circ t)'(s)ds \\ &= \int_{t(a)}^{t(b)} f(\gamma(t(s)))\gamma'(t(s))t'(s)ds \quad \text{sostituendo } t = t(s) \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma \omega.\end{aligned}$$

Esempio 12.1. Consideriamo la forma differenziale $\omega = \frac{1}{z}dz$ e la curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tale che $t \mapsto e^{2\pi i t}$, ovvero il cammino chiuso che percorre una volta in senso antiorario la circonferenza unitaria. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi it}} 2\pi i e^{2\pi it} dt = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i.$$

Se consideriamo invece il cammino $\eta : [0,1] \to$ *complessi* tale che $t \mapsto e^{-2\pi it}$, questo percorre la circonferenza unitaria in senso orario, cioè inverte l'orientazione del cammino γ. Infatti

$$\int_\eta \omega = -\int_0^1 \frac{1}{e^{-2\pi it}} 2\pi i e^{-2\pi it} dt = -\int_0^1 2\pi i dt = -2\pi i = -\int_\gamma \omega.$$

Definizione 12.5 (Lunghezza)**.** Data una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiamo *lunghezza* della curva γ la quantità

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Diamo alcune proprietà dell'integrale curvilineo:

1. l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ è $\mathbb{C}$-lineare;
2. se $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, allora
$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega;$$
3. se $\omega = f(z)dx$ ed esiste una costante C tale che $|f(z)| < C \ \forall z \in Im(\gamma)$, allora
$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq C \cdot l(\gamma);$$
4. se $\omega = f(z)dx$ è una forma differenziale definita nell'aperto $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ed esiste $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\omega = dF$ (differenziale totale di F) cioè $\omega = F'(z)dz$, allora
$$\int_\gamma \omega = F(\gamma)(b) - F(\gamma)(a).$$

Sarà di notevole interesse per noi studiare quelle forme che si possono scrivere come differenziali totali di particolari funzioni olomorfe.

Definizione 12.6 (Forma differenziale esatta)**.** Una forma differenziale $\omega = f(z)dz$ in $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ si dice *esatta* se $\omega = dF$ con $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $F = f'$, cioè $\omega = F'(z)dz$.

Una condizione equivalente è che per ogni curva chiusa γ tale che $\gamma \subset \mathcal{U}$, valga

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Una forma differenziale *chiusa* è una forma differenziale localmente esatta.

Definizione 12.7 (Primitiva lungo una curva)**.** Data una forma differenziale chiusa $\omega \subset \mathcal{U}$ aperto di $\mathbb{C}$ e $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ continua, una *primitiva* di ω lungo γ è una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tale che $\forall t_0 \in [a,b]$ esiste un intorno aperto $\mathcal{U} \supset U_0 \ni f(t_0)$ e F primitiva di $\omega|_{U_0}$ tale che $\forall t \in \gamma^{-1}(U_0)$ vale

$$f(t) = F(\gamma(t)).$$

Possiamo richiedere che $U_0 = \mathcal{B}(t, \gamma(t_0))$.

Lemma 12.2. *Se ω è chiusa, allora data una curva continua γ esiste sempre ed è unica (a meno di costanti additive) la primitiva di ω lungo γ.*

Dimostrazione. □

Capitolo 13

Serie formali

Si fa riferimento a Cartan, "Elementary Theory of Analytic Functions" [1].

Definizioni

Definizione 13.1 (Serie formale)**.** Una *serie formale* nella variabile complessa x è un'espressione del tipo

$$\sum_{k\geq 0} a_k x^k \text{ con } a_k \in \mathbb{C}.$$

Definiamo le operazioni:

- addizione: $(\sum a_k x^k) + (\sum b_k x^k) := \sum (a_k + b_k) x^k$.
  L'elemento neutro è $0 = \sum a_k x^k$ tale che $\forall k \geq 0$ $a_k = 0$.

- moltiplicazione: $(\sum a_k x^k) \cdot (\sum b_k x^k) := \sum c_k x^k$ tale che $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_k b_{k-i}$.
  L'elemento neutro è $1 = \sum a_k x^k$ tale che $a_0 = 1$ e $a_k = 0$ $\forall k \geq 1$.

L'insieme delle serie formali $\mathbb{C}[[x]]$ dotato delle operazioni di addizione e moltiplicazione è un'algebra e i polinomi $\mathbb{C}[x]$ ne rappresentano una sottoalgebra. In particolare $\mathbb{C}[[x]]$ è un dominio di integrità e gli elementi invertibili sono della forma

$$S(x) = \sum a_x^k \text{ tale che } a_0 \in \mathbb{C}^*.$$

Ad esempio $1 - x$ è invertibile in $\mathbb{C}[[x]]$ e la sua inversa è

$$S(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{k \geq 0} x^k.$$

Definizione 13.2 (Serie di Laurent meromorfa)**.** Il campo dei quozienti di $\mathbb{C}[[x]]$ si denota $\mathbb{C}((x))$ e i suoi elementi si definiscono *serie di Laurent formali nella variabile* x, o anche serie di Laurent meromorfe.

Lemma 13.1. *Ogni elemento di* $\mathbb{C}((x))$ *si può scrivere in modo unico nella forma*

$$S(x) = X^{\gamma}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

con $\gamma \in \mathbb{Z}$ *e* $a_0 \in \mathbb{C}^*$*, cioè come prodotto di un monomio di grado intero e di una serie formale invertibile.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$S(x) = \frac{\sum\limits_{k \geq 0} b_k x^k}{\sum\limits_{k \geq 0} c_k x^k}.$$

Sia $h = min\,\{\, k \mid c_k \neq 0 \,\}$, allora $\sum c_k x^k = x^h(\sum\limits_{k \geq h} c_k x^{k-h})$ e questo secondo termine è invertibile, dunque

$$S(x) = x^{-h}(\sum_{k \geq 0} b_k x^k) \cdot (\sum_{k \geq h} c_k x^{k-h})^{-1}.$$

Sia ora $l = min\,\{\, k \mid b_k \neq 0 \,\}$, allora analogamente possiamo scrivere

$$S(x) = x^{l-h}(\sum_{k \geq l} b_k x^{k-l})^{-1}(\sum_{k \geq h} c_k x^{k-h})^{-1}.$$

□

In particolare osserviamo che possiamo scrivere ogni serie di Laurent meromorfa come sommatoria di monomi in modo tale che abbia solo un numero finito di monomi di grado negativo:

$$S(x) = a_{-m}x^{-m} + a_{-m+1}x^{-m+1} + \ldots + a_{-1}x^{-1} + P(x).$$

Definizione 13.3 (Parte principale, ordine)**.** Nelle notazioni precedenti, $P(x)$ viene detta *parte principale* di $S(x)$ e l'intero γ *ordine* di $S(x)$.

Denotiamo l'ordine della serie $S(x)$ come $o(S(x))$. Si pone $o(0) = +\infty$.

Valgono alcune proprietà:

- $o(S(x) \cdot T(x)) = o(S(x)) + o(T(x))$;
- $o(S(x) + T(x)) \leq min \{ \, o(S(x)), o(T(x)) \, \}$, dove vale l'uguaglianza se $o(S(x)) \neq o(T(x))$;
- $S(x) \in \mathbb{C}[[x]] \Leftrightarrow o(S(x)) \geq 0$;
- $o(S(x)^{-1}) = -o(S(x))$.

Definizione 13.4 (Composizione)**.** Siano $S(x) = \sum a_k x^k$ e $T(x) = \sum b_h x^h \in \mathbb{C}[[x]]$ con $o(T(x)) \geq 1$. Definiamo *composizione* di S con T la serie formale

$$(S \circ T)(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (T(x))^k = \sum_{k \geq 0} a_k (\sum_{h \geq 1} b_h x^h)^k.$$

Poiché $\forall k \geq 0 \; o(T(x))K \geq k$, la composizione è ben definita e il coefficiente di x^k è somma di un numero finito di termini.

Definizione 13.5 (Derivata formale)**.** Data $S(x) = \sum a_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ definiamo la sua *derivata formale* come la serie formale

$$S'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

Osserviamo che derivando k volte otteniamo $k! a_k +$ termini di grado positivo, perciò

$$a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

Successioni di serie di funzioni

Consideriamo un sottoinsieme del piano complesso $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. Definiamo

$$||f|| = \sup_{\mathcal{U}} ||f(x)||.$$

Se f e g sono due funzioni di $\mathcal{U}$ limitate, allora

- $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \; ||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||$.

Possiamo allora definire a successione nello spazio delle funzioni limitate da $\mathcal{U}$ in $\mathbb{C}$. Richiamiamo alcune definizioni.

Definizione 13.6 (Convergenza uniforme per successioni)**.** Una successione di funzioni $\{ f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* in $\mathcal{U}$ se esiste $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \gg 0 \text{ tale che } ||f_n - f|| < \varepsilon \ \forall n \geq N.$$

In particolare il limite uniforme di funzioni continue è continuo.

Definizione 13.7 (Convergenza per serie)**.** Data successione di funzioni $\{ f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \}_{n\in\mathbb{N}}$, si dice che la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge uniformemente* se la successione delle somme parziali converge uniformemente.

In particolare se $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} ||f_n(x)||$ converge, si dice che la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge totalmente.*

Proposizione 13.2. *Se la serie converge totalmente, allora la serie converge assolutamente e la successione converge uniformemente.*

Teorema 13.3 (del raggio di convergenza)**.** *Sia* $S(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k \in \mathbb{C}[[x]]$, *allora esiste* $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{ +\infty \}$ *tale che:*

1. *se* $S(z)$ *converge totalmente in* $\overline{\mathcal{B}(0,r)}$ $\forall r < \rho$, *allora la serie converge assolutamente nella palla aperta di raggio* ρ*;*

2. $S(z)$ *non converge al di fuori di* $\mathcal{B}(0,\rho)$.

Teorema 13.4 (Formula di Hadamard)**.**

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{a_k}} \tag{13.1}$$

Dimostrazione. Sia $t = \limsup \sqrt[k]{a_k}$. Proviamo che $\rho \geq \frac{1}{t}$, per il teorema 13.3 del raggio di convergenza è sufficiente trovare $z \in \mathcal{B}(0, \frac{1}{t})$ tale che $S(z)$ converga. Osserviamo che dato $\varepsilon > 0$ per k sufficientemente grande $|a_k| < (t+\varepsilon)^k$.

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $||z|| < \frac{1}{t}$, dato che è minore stretto esiste ε tale che $||z|| < \frac{1}{t+\varepsilon}$. Allora $(t+\varepsilon) \cdot ||z|| < 1$. Per quanto visto nei capitoli precedenti, sappiamo allora che se $c = (t + varepsilon) \cdot ||z|| < 1$ $\sum c^k$ converge. Ma allora

$$\sum c^k = \sum ((t+\varepsilon) \cdot ||z||)^k = \sum (t+\varepsilon)^k ||z||^k \geq \sum |a_k| \cdot ||z||^k = \sum |a_k z^k| \geq 0,$$

cioè la serie di $S(z)$ converge assolutamente, quindi converge e $\rho \geq \frac{1}{t}$.

Viceversa, cerchiamo z di modulo maggiore di $\frac{1}{t}$ tale che $S(z)$ non converga, di conseguenza $\rho \leq \frac{1}{t}$. Per definizione di $\limsup$ vale frequentemente $\sqrt[k]{a_k} \geq t-\varepsilon$, scegliamo allora z tale che $||z|| = \frac{1}{t-\varepsilon} > \frac{1}{t}$. Ora

$$1 = (t-\varepsilon)^k \cdot ||z||^k \leq |a_k| \cdot ||z||^k,$$

ma allora $\sum |a_k z^k|$ non converge, dunque abbiamo la tesi. □

Esempio 13.1 (Alcune serie e loro raggi di convergenza)**.** La serie $S(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^2}$ ha raggio $\rho = 1$ e converge sul bordo della circonferenza unitaria, invece $T(z) = \sum z^k$ pur avendo raggio $\rho = 1$, non converge sul bordo.

Infatti la prima serie si scrive anche

$$S(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \dots.$$

Per la formula di Hadamard dobbiamo calcolare

$$\limsup \sqrt[k]{a_k} = \limsup \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}},$$

tuttavia tale limite è uguale a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

dunque $\rho = 1$.

Invece $T(z)$ converge se e solo se $||z|| < 1$, infatti $\limsup \sqrt[k]{a_k} = \limsup 1 = 1$.

Proposizione 13.5. *Siano $A(x)$ e $B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ due serie formali. Allora se entrambe hanno raggio di convergenza $\geq \rho$*

- *$S(x) = A(x) + B(x)$ e $P(x) = A(x)B(x)$ hanno raggio di convergenza $\geq \rho$;*
- *se $||z|| < \rho$, allora $S(z) = A(z) + B(z)$ e $P(z) = A(z)B(z)$.*

Dimostrazione. □

Teorema 13.6.

Corollario 13.7.

Teorema 13.8.

Osserviamo che il rapporto incrementale ha senso poiché la palla è aperta.

Corollario 13.9.

Elenchiamo alcune proprietà:

-

Proposizione 13.10.

Bibliografia

[1] H. Cartan. *Elementary Theory of Analytic Functions of One Or Several Complex Variables*. Dover Publications, 1995.

[2] Rolf Busam Eberhard Freitag. *Complex analysis*. Universitext. Springer, 2nd ed. edition, 2009.

[3] Marco Manetti. *Topologia*. Springer Milan, Imprint: Springer, Milano, 2008.