Appunti di Geometria Affine

Indice

Questi appunti sono frutto di una rielaborazione (ma neanche troppo) delle dispense di Geometria affine fornite dalla professoressa Fortuna, integrate con argomenti tratti dagli Appunti di GAAL di Mezzedimi (che trovate qui) ed esercizi svolti durante il corso tenuto nell'anno 2014/2015.
Per proporre correzioni, segnalare imprecisioni o richieste di chiarimenti mandate una mail a `pistolato[at]mail.dm.unipi.it`

Parte 1. Geometria Affine Euclidea in $\mathbb{R}^n$

Notazione: $\forall S$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, W_S denota la sua giacitura.
$X \cdot Y$ denota il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ t.c. $\forall X,\ Y \in \mathbb{R}^n$
$X \cdot Y = {}^tXY$

1. Ortogonalità

Definizione 1.1 (Vettore ortogonale a un sottospazio affine). $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale al sottospazio affine S se $v \in {W_S}^{\perp}$.

Notazione: $v \perp S$

Esempio: Se H è l'iperpiano di equazione $B \cdot X + d = 0$, allora $B \perp H$.

Definizione 1.2 (Sottospazi affini ortogonali). S, S' sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali $\Leftrightarrow W_S \subseteq {W_{S'}}^{\perp} \Leftrightarrow W_{S'} \subseteq {W_S}^{\perp}$

Notazione: $S \perp S'$

Esempi:

(1) Date le rette $r = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } X = At + c, t \in \mathbb{R}\}$, $r' = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } X = A't + c', t \in \mathbb{R}\}$, hanno rispettivamente giacitura $W_r = Span(A)$ e $W_{r'} = Span(A')$, quindi $r \perp r' \Leftrightarrow W_r \subseteq {W_{r'}}^{\perp} \Leftrightarrow A \in (Span(A'))^{\perp} \Leftrightarrow A \cdot A' = 0$
(2) Data la retta $r = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } X = At+c, t \in \mathbb{R}\}$ di giacitura $W_r = Span(A)$ e l'iperpiano $H = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } B \cdot X + d = 0\}$ di giacitura $W_H = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } B \cdot X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } {}^tBX = 0\}$, notiamo che ${W_H}^{\perp} = Span(B) \Rightarrow r \perp H \Leftrightarrow A \parallel B$

Proposizione 1.3. *S sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, $dim(S) = k$. Allora:*

(1) Se $S' \perp S$, $dim(S') \leq n - k$
(2) $\forall d \in \{0, \dots, n-k\}$ $\exists S'$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} S' \perp S \\ dim(S') = d \end{cases}$$

(3) Tutti i sottospazi vettoriali S' di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\begin{cases} S' \perp S \\ dim(S') = n-k \end{cases}$$

sono paralleli fra loro e ciascuno interseca S in uno e un solo punto

(4) $\forall P \in \mathbb{R}^n\ \exists! S'$ *sottospazio affine tale che*

$$\begin{cases} S' \perp S \\ dim(S') = n - k \\ P \in S' \end{cases}$$

Dimostrazione. (1) $S' \perp S \Rightarrow W_{S'} \subseteq {W_S}^{\perp} \Rightarrow dim(S')= = dim(W_{S'}) \leq dim({W_S}^{\perp})=dim(\mathbb{R}^n) - dim(W_S) = dim(\mathbb{R}^n) - dim(S) = n - k$.

(2) Basta prendere un sottospazio affine S' di giacitura $W_{S'} \subseteq {W_S}^{\perp}$ di dimensione d.

(3) Basta notare che dato $S = R + W_S$ e $S' = Q + W_{S'}$, per perpendicolarità e dimensione $W_{S'} = {W_S}^{\perp}$, dunque tutti i sottospazi sono paralleli fra loro in quanto hanno tutti giacitura ${W_S}^{\perp}$.

Dato $\mathbb{R}^n = W_S \oplus {W_S}^{\perp}$, $\exists! v \in W_S$, $w \in {W_S}^{\perp}$ tali che $R - Q = v + w \Rightarrow R - v = Q + w = P_0 \in S \cap S'$, unico per unicità di v e w.

(4) Basta prendere $S' = P + {W_S}^{\perp}$.

□

Caso particolare: In $\mathbb{R}^3$, data una retta r e $P \in \mathbb{R}^3$, $\exists! H$ piano passante per P e ortogonale a r per punto 4. Inoltre tale piano interseca r in unico punto P_0 per punto 3.

Osservazione: Se $r = \{\, X \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } X = At + c, t \in \mathbb{R} \,\}$, abbiamo detto che $W_r = Span(A)$. Deve essere $W_r \subseteq {W_H}^{\perp}$ e quindi per dimensione $W_r = {W_H}^{\perp}$, cioè ${W_H}^{\perp} = Span(A)$. Allora

$$H = \{\, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } A \cdot X + d = 0 \,\} = \{\, X \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } A \cdot X = A \cdot P \,\}$$

Osservazione: Possiamo estendere la nozione di ortogonalità a due iperpiani in $\mathbb{R}^n$.

Se i sottospazi H e H' sono definiti nel seguente modo

$$H = \{\, X \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot X + d = 0 \,\};\ H' = \{\, X \in \mathbb{R}^n \mid B' \cdot X + d' = 0 \,\}$$

allora le giaciture

$$W_H = \{\, X \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot X = 0 \,\};\ W_{H'} = \{\, X \in \mathbb{R}^n \mid B' \cdot X = 0 \,\}$$

sono ortogonali ai vettori B e B'.

Definizione 1.4 (Iperpiani ortogonali fra loro). Diciamo che H e H' sono ortogonali fra loro, con la solita notazione, $\Leftrightarrow B \perp B' \Leftrightarrow B \cdot B' = 0$.

Esempio: si considerino due piani in $\mathbb{R}^3$.

2. Distanza

Definizione 1.5 (Distanza di un punto da un sottospazio affine). $d(P, S) = inf\ \{\ d(P, X) \text{ t.c. } X \in S\ \}$

Proposizione 1.6. $\exists P_0 \in S$ t.c. $d(P, S) = ||P - P_0||$, *cioè l'inf è un minimo.*

Dimostrazione. Sia $dim(S) = k$. Per la proposizione 1.3, sia S' l'unico sottospazio affine tale che

$$\begin{cases} S' \perp S \\ dim(S') = n - k \\ P \in S' \end{cases}$$

Allora $S \cap S' = \{\ P_0\ \}$.

Osserviamo preliminarmente che $(P - P_0) \perp S$ in quanto $P_0 \in S' = P + W_{S'} = P + W_S{}^{\perp} \Rightarrow P - P_0 = P - (P + v) = -v \in W_S{}^{\perp}$.

Proviamo che $d(P, S) = ||P - P_0||$ ossia che $\forall X \in S$, $X \neq P_0$, si ha $d(P, P_0) < d(P, X)$. Infatti

$$\begin{aligned} d(P, X)^2 &= ||P - X||^2 = ||P - P_0 + P - 0 - X||^2 = \\ &= ((P - P_0) + (P - 0 - X)) \cdot ((P - P_0) + (P - 0 - X)) = \\ &= d(P, P_0)^2 + d(P_0, X)^2 + 2(P_0 - X)(P - P_0) > d(P, P_0)^2 \end{aligned}$$

□

Caso particolare: Dato un punto $P \in \mathbb{R}^n$ e un iperpiano $H = \{\ X \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot X + d = 0\ \}$, allora

$$d(P, H) = \frac{|B \cdot P + d|}{||B||}$$

Infatti data $r = \{\ X \in \mathbb{R}^n \mid X = Bt + P, t \in \mathbb{R}\ \}$ l'unica retta ortogonale a H passante per P, dato $P_0 = r \cap H$, $d(P, H) = ||P - P_0||$.
Calcolo $P_0 \in r \cap H$: $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $P_0 = Bt_0 + P$ ed è tale che $B \cdot P_0 + d = B \cdot (Bt_0 + P) + d = 0$ cioè $t_0 = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B}$ ossia $P_0 = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B} + P$.
Allora $d(P, H) = ||P - P_0|| = ||\frac{B \cdot P + d}{B \cdot B} B|| = \frac{|B \cdot P + d|}{||B||^2} ||B|| = \frac{|B \cdot P + d|}{||B||}$.

Esercizio: in modo analogo si calcola la distanza di un punto da una retta.

Definizione 1.7 (Distanza fra due sottospazi affini).

$$d(S, S') = inf\ \{\ d(X, Y) \mid X \in S, Y \in S'\ \}$$

Casi particolari in $\mathbb{R}^3$:

(1) Distanza fra due piani H_1, H_2 di $\mathbb{R}^3$
Se $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, allora $d(H_1, H_2) = 0$
Se $H_1 \parallel H_2$, allora $d(H_1, H_2) = d(P, H_2) \forall P \in H_1$ e lo ricavo con la formula precedente

(2) Distanza tra una retta e un piano
Se $r \cap H \neq \emptyset$, allora $d(r, H) = 0$
Se $r \parallel H$, allora $d(r, H) = d(P, H) \forall P \in r$ e lo ricavo con la formula

(3) Distanza fra due rette
Se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$, allora $d(r_1, r_2) = 0$
Se $r_1 \parallel r_2$, allora $d(r_1, r_2) = d(P, r_2) \forall P \in r_1$ e lo ricavo con la formula
Se sono sghembe, data la retta l tale che $\begin{cases} l \cap r_1 = \{ P_1 \} \\ l \cap r_2 = \{ P_2 \} \\ l \perp r_1 \wedge l \perp r_2 \end{cases}$,
$d(r_1, r_2) = ||P_1 - P_2||$.

Resta da provare che l è unica. Definiamo le rette $r_1 = \{ X = A_1 t + c_1, t \in \mathbb{R} \}$ e $r_2 = \{ X = A_2 t + c_2, t \in \mathbb{R} \}$. Sia $P(t) = A_1 t + c_1$ un generico punto di r_1 e $Q(\vartheta) = A_2 \vartheta + c_2$ un generico punto di r_2. La retta l passante per $P(t)$ e $Q(\vartheta)$ è incidente r_1 e r_2.
Mostriamo che esistono t e ϑ tali che $l \perp r_1$ e $l \perp r_2$. Poichè $l \parallel P(t) - Q(\vartheta) = A_1 t + c_1 - A_2 \vartheta - c_2$, basta porre

$$\begin{cases} (A_1 t + c_1 - A_2 \vartheta - c_2) \cdot A_1 = 0 \\ (A_1 t + c_1 - A_2 \vartheta - c_2) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} A_1 \cdot A_1 t + A_1 \cdot c_1 - A_1 \cdot A_2 \vartheta - A_1 \cdot c_2 = 0 \\ A_2 \cdot A_1 t + A_2 \cdot c_1 - A_2 \cdot A_2 \vartheta - A_2 \cdot c_2 = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & -A_1 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_2 & -A_2 \cdot A_2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} t \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(c_2 - c_1) \\ A_2(c_2 - c_1) \end{pmatrix}$$

Posto $A_1 = \{ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \}$ e $A_2 = \{ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \}$, si ha che

$$\begin{aligned} det(M) &= -(A_1 \cdot A_1)(A_2 \cdot A_2) + (A_1 \cdot A_2)^2 = \\ &= -(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 - (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1)^2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 \end{aligned}$$

Se fosse $det(M) = 0$, allora i singoli termini sarebbero $= 0$ e quindi

$$\begin{pmatrix} -A_1- \\ -A_2- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

avrebbe rango 1, assurdo in quanto A_1 e A_2 sono linearmente indipendenti, visto che le rette sono sghembe cioè hanno intersezione vuota e giaciture la cui intersezione è banale.

Dunque $det(M) \neq 0$ e quindi il sistema ammette soluzione unica: sia $\{ t_0, \vartheta_0 \}$. I punti $P(t_0)$ e $Q(\vartheta_0)$ sono i punti cercati.

Parte 2. Struttura affine di uno spazio vettoriale

Notazione: V denota un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Chiamiamo punti, P gli elementi dell'insieme V e vettori, v gli elementi dello spazio vettoriale V.

Sia $F : V \times V \to V$ tale che $(P, Q) \mapsto v = Q - P$ (talvolta viene denotato $\overrightarrow{PQ}$).
Allora $\tau_v(P) = Q$, cioè F associa ai punti P e Q l'unica traslazione τ_v che manda P in Q.

Proposizione 2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\forall P \in V\ \forall v \in V\ \exists! Q \in V$ *tale che* $\overrightarrow{PQ} = v$*, ossia* $Q = P + v$.
2. *(Relazione di Charles)* $\forall P,\ Q,\ R \in V\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Fissato $P \in V$, denotiamo $F_P : V \to V$ tale che $Q \mapsto F((P, Q)) = \overrightarrow{PQ}$.
F_P è bigettiva e $F_P(P) = 0$. Inoltre $\forall v \in V\ {F_P}^{-1}(v) = P + v$, in quanto se ${F_P}^{-1}(v) = Q \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = v \Rightarrow Q = P + v$.

Poichè $F_P(P) = 0$, l'applicazione F_P trasforma il punto P nell'origine 0 dello spazio vettoriale V e può essere usata per "sollevare" sull'insieme V una struttura di spazio vettoriale con P come "punto privilegiato".

Definizione 2.2 (Spazio affine). Sia V uno spazio vettoriale. Un insieme A (anche vuoto) si definisce spazio affine se $\exists F : A \times A \to V$ che $\forall P,\ Q \in A\ (P, Q) \mapsto v = \overrightarrow{PQ}$ in modo tale che rispetti le proprietà della proposizione 2.1.

Si pone $dim(A) = dim(V)$ se $A \neq \emptyset$, altrimenti $dim(\emptyset) = -1$.

Osservazione: V è spazio affine su se stesso.

Definizione 2.3 (Sottospazio affine). $H \subseteq V$, $H \neq \emptyset$, si dice sottospazio affine di V se $\exists P_0 \in H$ e $\exists W$ sottospazio vettoriale di V tale che $H = P_0 + W = \{\ P_0 + w \mid w \in W\ \}$.

Si conviene di considerare anche l'insieme vuoto sottospazio affine.

Osservazione: Con la terminologia fissata: $H = {F_{P_0}}^{-1}(W)$.

Abbiamo inoltre già provato:

Proposizione 2.4. *Sia* $H = P_0 + W$ *un sottospazio affine di V. Allora*

1. $W = \{\ P - Q \mid P, Q \in H\ \}$ *(dunque* W *è univocamente determinato da* H *e sarà chiamato la giacitura di* H *e denotato* W_H*)*
2. $\forall P \in H\ H = P + W$

DEFINIZIONE 2.5. Se H è sottospazio affine di V, si pone $dim(H) = \begin{cases} dim(W_H) & \text{se } H \neq \emptyset \\ -1 & \text{se } H = \emptyset \end{cases}$. Di conseguenza H è detto

- retta affine se $dim(H) = 1$
- piano affine se $dim(H) = 2$
- iperpiano affine se $dim(H) = dim(V) - 1$

Osservazione: L'intersezione di due sottospazi affini è un sottospazio affine.
Infatti se H, L sono sottospazi affini di V e $H \cap L \neq \emptyset$, consideriamo $P \in H \cap L$. Allora $H = P + W_H$ e $L = P + W_L \Rightarrow H \cap L = P + (W_H \cap W_L)$ e in particolare $W_{H \cap L} = W_H \cap W_L$.

DEFINIZIONE 2.6. Due sottospazi affini H, L non vuoti si dicono

- incidenti se $H \cap L \neq \emptyset$
- paralleli se $W_H \subseteq W_L$ o viceversa

Osservazione: Il parallelismo non è una relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE 2.7 (Combinazione affine). Dati i punti $P_1, \ldots, P_k \in V$ e gli scalri $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ con $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, si chiama combinazione affine dei punti P_i con coefficienti $t_1, \ldots, t_k$, il punto $t_1 P_1 + \ldots + t_k P_k$.

Notazione: $Comb_a(P_1, \ldots, P_k) = \{$ comb. affini di $P_1, \ldots, P_k$ $\}$

Osservazione: Si pone la condizione $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ perchè il risultato seguente (che ometto perchè è una pippa) non dipenda dalla scelta del punto P. Questo permette anche di dare la

DEFINIZIONE 2.8 (Combinazione affine di punti in uno spazio affine A via F_P). Dati $P_1, \ldots, P_k \in A$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ con $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, si chiama combinazione affine dei punti P_i con coefficienti $t_1, \ldots, t_k$, il punto $P + \sum t_i \overrightarrow{PP_i}$.

Osservazione: Tale punto è ottenuto:

- prendendo le immagini dei punti via $F_P : A \to V$, ossia i vettori $\overrightarrow{PP_i}$
- considerando in V la combinazione lineare $\sum t_i \overrightarrow{PP_i}$
- rimontandola via F_P in $P + \sum t_i \overrightarrow{PP_i}$.

Esempio: Se P, $Q \in V$ e $char\mathbb{K} \neq 2$, il punto $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ è detto punto medio fra P e Q.

Esempio: $V = \mathbb{R}^n$. P_1 e P_2 punti distinti.

$$\begin{aligned} Comb_a(P_1, P_2) &= \{\, t_1P_1 + t_2P_2 \mid t_1 + t_2 = 1 \,\} \\ &= \{\, (1-t)P_1 + tP_2 \mid t \in \mathbb{R} \,\} \\ &= \{\, P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \end{aligned}$$

cioè la retta passante per i punti P_1 e P_2.

Osservazione: Dato $C = A + t(B - A)$, dove si trova C in base al valore di t?

A B

$t < 0$ $0 < t < 1$ $t > 0$

$t = 0$ $t = 1$

Esempio: $V = \mathbb{R}^n$. P_1, P_2 e P_3 punti non allineati. $Comb_a(P_1, P_2, P_3) =$ piano passante per i tre punti.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia $H \subseteq V$, $H \neq \emptyset$. Allora H è un sottospazio affine di $V \Leftrightarrow H$ è chiuso per comb. affini.*

DIMOSTRAZIONE. $\Rightarrow$) Sia $H = P_0 + W$ con W sottospazio vettoriale, $P_0 + w_1, \dots, P_0 + w_k$ punti di H e $t_1 + \ldots + t_k = 1$. Allora

$$\begin{aligned} t_1(P_0 + w_1) + \ldots + t_k(P_0 + w_k) &= \sum t_iP_0 + t_1w_1 + \ldots + t_kw_k = \\ &= P_0 + t_1w_1 + \ldots + t_kw_k \in P_0 + W = \\ &= H \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sia $H \neq \emptyset$, quindi consideriamo $P_0 \in H$.
Sia $W = \{\, w \in V \mid P_0 + w \in H \,\}$. In particolare $H = P_0 + W$, dunque basta mostrare che W è un sottospazio vettoriale.
Mostriamo che $\forall v_1,\ v_2 \in W$, $\forall \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{K}$ $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \in W$ cioè $P_0 + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \in H$.
Per ipotesi $Q_1 = P_0 + v_1$ e $Q_2 = P_0 + v_2$ stanno in H quindi $P_0 + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 = P_0 + \alpha_1(Q_1 - P_0) + \alpha_2(Q_2 - P_0) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)P_0 + \alpha_1Q_1 + \alpha_2Q_2 \in H$ in quanto combinazione affine di punti che appartengono ad H. □

PROPOSIZIONE 2.10. *$Comb_a(P_0, \dots, P_k) = P_0 + Span(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. $\subseteq$) Siano $t_0 + \ldots + t_k = 1$. $t_0P_0 + \ldots + t_kP_k = (1 - \sum_{i=1}^{k} t_i)P_0 + t_1P_1 + \ldots + t_kP_k = P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(P_i - P_0)$.
$\supseteq$) $P_0 + t_1(P_1 - P_0) + \ldots + t_k(P_k - P_0) = (1 - t_1 - \ldots - t_k)P_0 + t_1P_1 + \ldots + t_kP_k$. □

Osservazione: Ne segue che $Comb_a(P_0, \dots, P_k)$ è un sottospazio affine di giacitura $Span(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0)$. Tale sottospazio viene chiamato sottospazio affine generato da $P_0, \dots, P_k$. Per la proposizione 2.9, è il più piccolo sottospazio affine di V contenente $P_0, \dots, P_k$.

Osservazione:

$$dim(Comb_a(P_0, \dots, P_k)) = dim(Span(P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0))$$

Ritorna il fatto che la retta $Comb_a(P_1, P_2)$ ha giacitura $Span(P_2 - P - 1)$.

Parte 3. Affinità

3. Riferimenti affini

Definizione 3.1 (Indipendenza affine). I punti $P_0, \ldots, P_k \in V$ si dicono affinemente indipendenti se $dim(Comb_a(P_0, \ldots, P_k)) = k$, ossia se $dim(Span(P_1 - P_0, \ldots, P_k - P_0)) = k$.

Definizione 3.2 (Riferimento affine). Se $dim(V) = n$, si chiama riferimento affine di V ogni insieme ordinato $\mathcal{R} = \{ P_0, \ldots, P_n \}$ di n+1 punti di V affinemente indipendenti.

Osservazione: Essendo $\mathcal{R}$ ordinato, scelgo P_0 come punto base e $\{ P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0 \}$ sono una base di V come spazio vettoriale.

Viceversa se $\mathcal{B} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ è una base di V, allora $\forall P_0 \in V$ $\{ P_0 . P_0 + v_1, \ldots, P_0 + v_n \}$ è un riferimento affine.
Ad esempio $\{ 0, v_1, \ldots, v_n \}$ è un riferimento affine.

Se $V = \mathbb{R}^n$ $\{ 0, e_1, \ldots, e_n \}$ è detto <u>riferimento affine standard</u>.

Proposizione 3.3. *Se $\mathcal{R} = \{ P_0, P_1, \ldots, P_n \}$ è un riferimento affine di V, ogni punto $P \in V$ si scrive in modo unico come $P = a_0P_0 + \ldots + a_nP_n$ con $a_0 + \ldots + a_n = 1$.*

$(a_1, \ldots, a_n)$ sono dette le <u>coordinate affini</u> di P rispetto a $\mathcal{R}$ e denotate $[P]_{\mathcal{R}}$.

Dimostrazione. Per definizione di riferimento affine abbiamo che $Comb_a(P_0, \ldots, P_n) = V$, dunque basta provare l'unicità.

Siano $\sum a_i = 1$ e $\sum b_i =$ tali che $a_0P_0 + \ldots + a_nP_n = b_0P_0 + \ldots + b_nP_n$
$(1 - \sum_{i=0}^{n})P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_nP_n = (1 - \sum_{i=0}^{n})P_0 + b_1P_1 + \ldots + b_nP_n$
$P_0 + a_1(P_1 - P_0) + \ldots + a_n(P_n - P_0) = P_0 + b_1(P_1 - P_0) + \ldots + b_n(P_n - P_0)$
$a_1(P_1 - P_0) + \ldots + a_n(P_n - P_0) = b_1(P_1 - P_0) + \ldots + b_n(P_n - P_0)$
Per lineanre indipendenza dei $P_i - P_0$, $\forall i$ $\alpha_i = \beta_i$. □

Osservazione: Le coordinate affini $[P]_{\mathcal{R}}$ coincidono con le coordinate vettoriali di $P - P_0$ nella base $\{ P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0 \}$.
In $\mathbb{K}^n$ le coordinate affini $\{ 0, e_1, \ldots, e_n \}$ rispetto al riferimento affine standard, coincidono con quelle vettoriali, ossia con le componenti.

4. Trasformazioni affini

Notazione: V, W sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Definizione 3.4 (Trasformazione affine). $f : V \to W$ si dice trasformazione affine se f conserva le combinazioni affini.

Definizione 3.5 (Isomorfismo affine). Una trasformazione $f : V \to W$ si dice isomorfismo affine se è biunivoca.

Definizione 3.6 (Affinità). Un isomorfismo affine $f : V \to V$ si dice affinità.

Notazione: l'insieme delle affinità di V è denotato $Aff(V)$.

Esempi:

(1) Se $dim(V) = n$ e $\mathcal{R}$ è un suo riferimento affine, allora

$$[\quad]_{\mathcal{R}} : V \to \mathbb{K}^n$$
$$P \mapsto [P]_{\mathcal{R}}, \text{ cioè le coordinate affini di P}$$

è un isomorfismo affine, che trasforma i punti di $\mathcal{R}$ nel riferimento affine standard $\{ 0, e_1, \ldots, e_n \}$.
Quindi V e $\mathbb{K}^n$ sono affinemente isomorfi.

Resta da verificare che dati $P_1, \ldots, P_k \in V$ e $t_1 + \ldots + t_k = 1$, allora

$$[t_1P_1 + \ldots + t_kP_k]_{\mathcal{R}} = t_1[P_1]_{\mathcal{R}} + \ldots + t_k[P_k]_{\mathcal{R}}.$$

Sia $\mathcal{R} = \{ Q_0, \ldots, Q_n \}$. Dato $P_i \in V$ tale che $[P_i]_{\mathcal{R}} = (a_1, \ldots, a_n)$ allora $P_i - Q_0 = a_{i_1}(Q_1 - Q_0) + \ldots + a_{i_n}(Q_n - Q_0)$.
Ora

$$\begin{aligned}
t_1P_1 + \ldots + t_kP_k &= (1 - \sum t_i)Q_0 + t_1P_1 + \ldots + t_kP_k = \\
&= Q_0 + t_1(P_1 - Q_0) + \ldots + t_k(P_k - Q_0) = \\
&= Q_0 + t_1(a_{1_1}(Q_1 - Q_0) + \ldots + a_{1_n}(Q_n - Q_0)) + \ldots \\
&\ldots + t_k(a_{k_1}(Q_1 - Q_0) + \ldots + a_{k_n}(Q_n - Q_0)) = \\
&= Q_0 + (t_1a_{1_1} + \ldots + t_ka_{k_1})(Q_1 - Q_0) + \ldots \\
&\ldots + (t_1a_{1_n} + \ldots + t_ka_{k_n})(Q_n - Q_0).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
[t_1P_1 + \ldots + t_kP_k]_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} t_1a_{1_1} + \ldots + t_ka_{k_1} \\ \ldots \\ t_1a_{1_n} + \ldots + t_ka_{k_n} \end{pmatrix} \\
&= t_1[P_1]_{\mathcal{R}} + \ldots + t_k[P_k]_{\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

(2) Le traslazioni sono affinità.
Verifichiamo che $\forall P_1, \ldots, P_k \in V$ e $t_1 + \ldots + t_k = 1$

$$\tau_v(t_1P_1 + \ldots + t_kP_k) = t_1\tau_v(P_1) + \ldots + t_k\tau_v(P_k).$$

Ora

$$\begin{aligned}
\tau_v(t_1P_1 + \ldots + t_kP_k) &= t_1P_1 + \ldots + t_kP_k + v = \\
&= t_1P_1 + \ldots + t_kP_k + (\sum t_i)v =
\end{aligned}$$

$$= t_1(P_1 + v) + \ldots + t_k(P_k + v) =$$
$$= t_1\tau_v(P_1) + \ldots + t_k\tau_v(P_k).$$

(3) Gli isomorfismi lineari $V \to V$ sono affinità.
Dunque

$$T(V) \subseteq Aff(V)$$
$$GL(V) \subseteq Aff(V).$$

Inoltre dalla definizione segue subito che la composizione di affinità è ancora un'affinità, dunque

$$Q(V) = \{ \tau_v \circ g \mid g \in GL(V) \} \subseteq Aff(V)$$

Proposizione 3.7. *Se f è un'affinità e $f(0) = 0$, allora f è lineare.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2).$$

Infatti $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f((1 - \alpha_1 - \alpha_2)0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)f(0) + \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$. □

Osservazione: Di conseguenza $Aff(V) = \{ \tau_v \circ g \mid g \in GL(V) \} = Q(V)$.
Abbiamo anche dimostrato che $(Aff(V), \circ)$ è un gruppo.

In particolare se $V = \mathbb{K}^n$, allora

$$Aff(\mathbb{K}^n) = \{ X \to AX + B \mid A \in GL(n, \mathbb{K}), B \in \mathbb{K}^n \}$$

Corollario 3.8. *Sia $f \in Aff(V)$. Allora esistono $v \in V$, $g \in GL(V)$ tali che $f = \tau_v \circ g$.*

Dimostrazione. Sia $v = f(0)$. Allora $g = \tau_{-v} \circ f$ è lineare, in quanto $g(0) = 0$ e $f = \tau_v \circ g$. □

Proposizione 3.9. *Sia $dim(V) = n$ e $\{ P_0, \ldots, P_n \}$ e $\{ Q_0, \ldots, Q_n \}$ due $(n + 1)$-uple affinemente indipendenti. Allora esiste una e una sola affinità f tale che*

$$\forall i \in \{ 0, \ldots, n \} \qquad f(P_i) = Q_i.$$

Dimostrazione. Poichè $\{ P_0, \ldots, P_n \}$ è un riferimento affine, ogni $P \in V$ si scrive in modo unico come $P = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ con $\sum a_i = 1$.

Poniamo $f(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i$. In questo modo $f(P_i) = Q_i$.
Mostriamo che f è effettivamente un'affinità.
Consideriamo φ tale che $\forall i \in \{ 1, \ldots, n \}$ $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$, e dato

che trasforma una base di V in un'altra base di V $\varphi \in GL(V)$.
Ora

$$
\begin{aligned}
f(P) &= \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i = \\
&= Q_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (Q_i - Q_0) = \\
&= f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(P_i - P_0) = \\
&= f(P_0) + \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_i (P_i - P_0)) = \\
&= f(P_0) + \varphi(P - P_0).
\end{aligned}
$$

Dunque $f = \tau_{Q_0} \circ \varphi \circ \tau_{-P_0} \in Aff(V)$. □

Esercizio: Costruire un'affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\forall i \in \{\, 0, 1, 2 \,\} \qquad f(P_i) = Q_i$$

dove

$$
\begin{array}{lll}
P_0 = (0, 2), & P_1 = (1, 3), & P_2 = (-1, 2); \\
Q_0 = (1, 0), & Q_1 = (3, -1), & Q_2 = (1, 4).
\end{array}
$$

Innanzitutto $\{\, P_0, P_1, P_2 \,\}$ e $\{\, Q_0, Q_1, Q_2 \,\}$ sono affinemente indipendenti in quanto $P_1 - P_0 = (1, 1)$, $P_2 - P_0 = (-1, 0)$ e $Q_1 - Q_0 = (2, -1)$, $Q_2 - Q_0 = (0, 4)$ sono a due a due linearmente indipendenti.
Si può proseguire in due modi:

(1) Si considera $\varphi \in GL(\mathbb{R}^2)$ tale che $\varphi(P_1 - P_0) = Q_1 - Q_0$, cioè $\varphi(1, 1) = (2, -1)$ e $\varphi(P_2 - P_0) = Q_2 - Q_0$, cioè $\varphi(-1, 0) = (0, 4)$. Si trova che

$$\varphi(x, y) = (2y, 3y - 4x).$$

A questo punto $\forall P \in \mathbb{R}^2$ $f(P) = f(P_0) + \varphi(P - P_0)$, ossia

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= f(0, 2) + \varphi(x, y - 2) = \\
&= (1, 0) + (2y - 4, 3y - 4x - 6) = \\
&= (2y - 3, 3y - 4x - 6).
\end{aligned}
$$

(2) Si scrive $P = (x, y)$ come combinazione affine dei punti P_0, P_1, P_2: cioè si cercano t_0, t_1, t_2 tali che

$$
\begin{cases}
(x, y) = t_0(0, 2) + t_1(1, 3) + t_2(-1, 2) \\
t_0 + t_1 + t_2 = 1
\end{cases}
\quad \Rightarrow
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = x \\ 2t_0 + 3t_1 + 2t_2 = y \\ t_0 + t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} t_0 = x - 2y + 5 \\ t_1 = y - 2 \\ t_2 = y - x - 2 \end{cases}$$

Quindi impongo che

$$\begin{aligned} f(P) &= t_0 f(P_0) + t_1 f(P_1) + t_2 f(P_2) = \\ &= (x-2y+5)(1,0) + (y-2)(3,-1) + (y-x-2)(1,4) = \\ &= (2y-3, 3y-4x-6). \end{aligned}$$

Osservazione: $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = AX + B, A \in GL(2,\mathbb{R})$.

Osservazione: Un'affinità di $\mathbb{R}^n$ porta trasforma rette parallele in rette parallele.
Infatti sia $f(X) = AX + B$ un'affinità, quindi tale che $A \in GL(n,\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{R}^n$, e $r = \{\, Ct + P_0 \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ una retta di giacitura $Span(C)$. Allora

$$f(Ct + P_0) = ACt + AP_0 + B = (AC)t + f(P_0)$$

cioè una retta di giacitura $Span(AC)$ passante per $f(P_0)$.

5. $\mathbf{Aff}(\mathbb{K}^n)$

$Aff(\mathbb{K}^n) = \{\, X \to MX + N \mid M \in GL(n,\mathbb{K}), N \in \mathbb{K}^n \,\}$

Possiamo vederlo come un sottogruppo di $GL(n+1,\mathbb{K})$.

Sia $H = \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 1 \,\}$.
Ora H è sottospazio affine di giacitura $W_H = \{\, X \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \,\}$.

Sia $f : \mathbb{K}^n \to H$ tale che $X \in \mathbb{K}^n \mapsto \binom{X}{1} \in H$.
Poichè $\binom{X}{1} = \binom{X}{0} + \binom{0}{1}$, allora $f = \tau_{e_{n+1}} \circ \varphi$ dove $\varphi : \mathbb{K}^n \to W_H$ è un isomorfismo lineare tale che $X \mapsto \binom{X}{0}$.

Allora f è un isomorfismo lineare e $\mathbb{K}^n \cong H$.

Sia $g(H) = \{\, g \in GL(n+1,\mathbb{K}^n) \mid g(H) = H \,\}$, ci chiediamo come sono fatti tali isomorfismi.
Sia $g \in G(H)$, allora

$$\forall Y \in \mathbb{K}^{n+1} \quad g(Y) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline {}^tP & q \end{array}\right)$$

dove $M \in GL(n,\mathbb{K})$, $Y, P \in \mathbb{K}^n$ e $q \in \mathbb{K}$.
Se $Y \in H$, $\exists X \in \mathbb{K}^n$ t.c. $Y = \binom{X}{1}$, allora

$$g(Y) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline {}^tP & q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} * \\ \hline {}^tPX + q \end{array}\right)$$

allora $g(Y) \in H \Leftrightarrow^t PX + q = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ q = 1 \end{cases}$

Si ha allora $G(H) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \mid M \in GL(n, \mathbb{K}) \right\}$.

Denotiamo $\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \widetilde{M}_N$.

Ora $\left(\begin{array}{c|c} M_1 & N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M_2 & N_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M_1M_2 & M_1N_2 + N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$
Da ciò segue che

Proposizione 3.10. *$(G(H), \cdot)$ è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{K})$*

Proposizione 3.11. *$L : (Aff(\mathbb{K}^n), \circ) \to (G(H), \cdot)$ tale che $X \to MX + N \mapsto \widetilde{M}_N$ è un isomorfismo di gruppi, dunque $(Aff(\mathbb{K}^n), \circ)$ è isomorfo a un sottogruppo di $GL(n + 1, \mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Siano f_1, $f_2 \in Aff(\mathbb{K}^n)$ tali che $\forall X \in \mathbb{K}^n$ $f_1(X) = M_1X + N_1$ e $f_2(X) = M_2X + N_2$. Allora $f_1 \circ f_2(X) = f_1(M_2X + N_2) = (M_1M_2)X + (M_1N_2 + N_1)$. Quindi

$$\begin{aligned} L(f_1) \cdot L(f_2) &= \left(\begin{array}{c|c} M_1 & N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M_2 & N_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_1M_2 & M_1N_2 + N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \\ &= L(f_1 \circ f_2) \end{aligned}$$

Infine L è bigettiva. □

Parte 4. Equivalenza affine

Definizione 4.1 (G-equivalenza). Sia G un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{K}^n$. Due sottoinsiemi F_1, F_2 di $\mathbb{K}^n$ si dicono G-equivalenti se $\exists g \in G$ t.c. $g(F_1) = F_2$.

Definizione 4.2 (Equivalenza affine fra sottoinsiemi). F_1, $F_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ si dicono affinemente equivalenti se $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $g(F_1) = F_2$.

Viceversa si dicono equivalenti metricamente se $g \in Isom(\mathbb{K}^n)$.

Notazione: se F_1 e F_2 sono affinemente equivalente, denoteremo

$$F_1 \sim_{aff} F_2$$

Esempi: dato $A = \mathbb{K}^n$

(1) Siano $F_1 = \{ P_0, \ldots, P_k \}$ e $F_2 = \{ Q_0, \ldots, Q_k \}$ due (k+1)-uple di punti di $\mathbb{K}^n$ affinemente indipendenti. Abbiamo visto che $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n)$ tale che $\forall i = 0, \ldots, k$ $g(P_i) = Q_i$, e dunque $F_1 \sim_{aff} F_2$.
(2) Siano H_1 e H_2 iperpiani affini di A. Allora $\exists g \in Aff(\mathbb{K}^n)$ tale che $g(H_1) = H_2$. Infatti se $H_1 = Comb_a(P_0, \ldots, P_{n-1})$ e $H_2 = Comb_a(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$, allora scegliendo P_n e Q_n in modo tale che siano costituiscano un riferimento affine, so che $\exists! g \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $\forall i$ $g(P_i) = Q_i$, e dunque $g(H_1) = H_2$. Dunque $\{ iperpianiaffini \} /_{\sim_{aff}}$ ha una sola classe di equivalenza.

Definizione 4.3 (Luogo di zeri). $\forall g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, cioè l'anello dei polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, definiamo luogo di zeri di g l'insieme $V(g) = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid g(X) = 0 \}$.

Osservazione: L'applicazione $V : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}^n$ t.c. $g \mapsto V(g)$ non è iniettiva, infatti

- $V(\alpha g) = V(g)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{ 0 \}$
- $V(g^m) = V(g)$ $\forall m \in \mathbb{N}^+$
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e g_1, g_2 non contengono fattori multipli, allora $V(g_1) = V(g_2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ t.c. $g_2 = \alpha g_1$
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la proprietà precedente non vale.

Definizione 4.4 (Proporzionalità). Dati g_1, $g_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, diciamo che sono poroporzionali $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{ 0 \}$ t.c. $g_2 = \alpha g_1$.

Osservazione: Tale relazione è di equivalenza in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Definizione 4.5 (Ipersuperficie affine). Definiamo ipersuperficie affine (per semplicità, ipersuperficie) ogni classe di proporzionalità di polinomi di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado positivo.

Definizione 4.6 (Equazione, Supporto). Se $I = [g]$ è ipersuperfiie, $g(X) = 0$ è detta equazione di I e $V(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ è detto supporto di I e viene indicato come $Supp(I)$.

Definizione 4.7 (Grado). Se $I = [g]$ è ipersuperficie, definiamo grado di I, cioè $deg([g]) = deg(g)$.

Osservazione: É una buona definizione poichè se $g \sim g' \Rightarrow deg(g) = deg(g')$.

Denominazione di alcune ipersuperfici:

- se $n = 2$, è detta curva affine
- se $n = 3$, è detta superficie affine
- se $deg(I) = 2$, è detta quadrica. In particolare se $n = 2$, è detta conica.

Osservazione: Come visto, l'ipersuperficie determina il suo supporto, ma non vale il viceversa. É dunque improprio parlare di equivalenza affine solo per i supporti, in quanto due ipersuperfici possono avere lo stesso luogo di zeri.
Introduciamo quindi il concetto di equivalenza affine anche per le ipersuperfici, partendo dalle equazioni e non dai supporti.

Definizione 4.8 (Ipersuperficie rimontata). Sia $I = [g]$ un'ipersuperficie, $\psi(X) = MX + N \in Aff(\mathbb{K}^n)$. Definiamo ipersuperficie rimontata di I tramite ψ l'ipersuperficie $J = \psi^{-1}(I)$ di equazione $g(\psi(X)) = 0$.

Osservazione:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \supseteq V(g \circ \psi) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "g\circ\psi"'] & & V(g) \subseteq \mathbb{K}^n \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{K}^n &
\end{tikzcd}$$

Tale definizione è coerente con il fatto che ψ trasformi $Supp(J)$ in $Supp(I)$, infatti $x_0 = Supp(J) = V(g \circ \psi) \Leftrightarrow g(\psi(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \psi(x_0) \in V(g) = Supp(I)$.

Definizione 4.9 (Equivalenza affine fra ipersuperfici). Due ipersuperfici affini I e J si dicono affinemente equivalenti se $\exists \psi \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $I = \psi^{-1}(J)$. In altre parole, $I = [f]$ e $J = [g]$ sono affinemente equivalenti se $\exists \psi \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $f = g \circ \psi$.

Osservazione: Codice che non funzia $I \sim_{aff} J \Rightarrow Supp(I) \sim_{aff} Supp(J)$, ma il viceversa è falso.

Osservazione: $\sim_{aff}$ classifica dunque i polinomi (non i supporti) a meno di coordinate affini.

Osservazione: Sia $I = [g]$ un'ipersuperficie di grado 1, dunque tale che $V(g)$ è un iperpiano. Sia $g(X) = {}^tAX + b$ con $A \in \mathbb{K}^n \setminus \{ 0 \}$ e $b \in \mathbb{K}$. Sia $\psi(X) = MX + N \in Aff(\mathbb{K}^n)$. Allora $(g \circ \psi(X)) = g(MX + N) = {}^tA(MX + N) + b = {}^tAMX + {}^tAN + b$.

Dunque se $J = [f]$ è un'altra ipersuperficie con un iperpiano come supporto, tale che $f(X) = {}^tA'X + b'$, allora $I \sim_{aff} J$ se e solo se $\exists \alpha \neq 0$, $\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ e $\exists N \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\begin{cases} {}^tA' = \alpha {}^tAM \\ b' = \alpha({}^tAN + b) \end{cases}$$

Poichè tale sistema ha sempre soluzione, concludiamo che due qualsiasi iperpiani sono equivalenti affinemente anche come ipersuperfici, non solo come supporti.

Definizione 4.10 (Cono). Il supporto di un'ipersuperficie $I = [g]$ si dice cono se $\forall P \in V(g) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{K}\ tP \in V(g)$.

Osservazione: Ora invece prendiamo una quadrica $I = [g]$, che per definizione avrà grado 2. L'equazione generica della quadrica è

$g(X) = {}^tXAX + 2{}^tBX + c$, con $A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K}),\ A \neq 0,\ B \in \mathbb{K}^n,\ c \in \mathbb{K}$.

Ad esempio: se $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 + 4x_2 + 5$, allora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c = 5$.

Quindi se denoto l'equazione con $Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right)$, allora ponendo $\tilde{X} = \binom{X}{1}$

$$\begin{aligned} {}^t\tilde{X}Q\tilde{X} &= \left({}^tX \mid 1\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \left({}^tXA + {}^tB + {}^tXB + c\right) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= {}^tXAX + {}^tBX + {}^tXB + c = \\ &= {}^tXAX + 2{}^tBX + c = g(X) \end{aligned}$$

Dunque identifico $V(g)$ con $V({}^t\tilde{X}Q\tilde{X})$, anche se in realtà $V(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ e $V({}^t\tilde{X}Q\tilde{X}) \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$.

Osservazione: L'equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X}$ è omogenea di secondo grado, quindi $V({}^t\tilde{X}Q\tilde{X})$ è un cono (nel senso della definizione 4.10). Dunque posso vedere $V(g)$ come un cono in $\mathbb{K}^{n+1}$ intersecato con l'iperpiano $x_{n+1} = 1$. SAREBBE BELLO SAPER FARE LE IMMAGINI TIKZ

Osservazione: Sia I la quadrica di equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = 0$. Sia $\psi(X) = MX + N \in Aff(\mathbb{K}^n)$. Calcoliamoci l'equazione della quadrica $\mathcal{C}' =$

$\psi^{-1}(I)$.

Poniamo $\psi(\tilde{X}) = \tilde{M_N}\tilde{X} = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} \frac{X}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{MX+N}{1} \end{pmatrix}$ dunque $\psi^{-1}(I)$ ha equazione

$$^t(\psi(\tilde{X}))Q(\psi(\tilde{X})) = {}^t\tilde{X}{}^t\tilde{M_N}Q\tilde{M_N}\tilde{X} = 0$$

e matrice

$$Q' = {}^t\tilde{M_N}Q\tilde{M_N}.$$

Dunque studiare $\{ \text{ quadriche di } \mathbb{K}^n \} /_{\sim_{aff}}$ corrisponde a studiare

$$\left\{ Q = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & c \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \setminus \{ 0 \} \right\} \Big/_{\sim_{aff}}$$

dove $Q \sim_{aff} Q' \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{ 0 \}, \exists \tilde{M_N} \in Aff(\mathbb{K}^n)$ t.c. $Q' = \alpha{}^t\tilde{M_N}Q\tilde{M_N}$.

Il nostro scopo è dunque trovare dei **rappresentanti canonici** di equivalenza affine, cioè una famiglia $\{ F_1, \ldots, F_k \}$ di quadriche di $\mathbb{K}^n$ tali che:

- $\forall J$ quadrica di $\mathbb{K}^n$, $\exists i$ t.c. $J \sim_{aff} F_i$
- $F_i \nsim_{aff} F_j \Leftrightarrow i \neq j$

Definizione 4.11 (Forme canoniche). Gli elementi di una famiglia di rappresentanti che rispetta tali proprietà prendono il nome di forme canoniche.

Studieremo tali forme canoniche limitatamente al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

6. Coniche

Cominciamo lo studio dal caso $n = 2$, cioè dalle ipersuperfici di $\mathbb{K}^2$, le coniche (o anche le curve di grado 2).

6.1. Classificazione affine delle coniche. Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e a_{11}, a_{12}, a_{22} non tutti nulli.

Se $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, $C = a_{33}$ e $Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & C \end{array}\right)$, allora $\mathcal{C}$ ha equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = 0$.

Se $\psi(X') = MX' + N$, $\psi^{-1}(\mathcal{C})$ è una conica di equazione

$$^t\tilde{M}_N{}^t\tilde{X}'Q\tilde{M}_N\tilde{X}' = 0$$

Sia $Q' =^t \tilde{M}_N Q\tilde{M}_N = \left(\begin{array}{c|c} {}^tM & 0 \\ \hline {}^tN & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) =$
$= \left(\begin{array}{c|c} {}^tMA & {}^tMB \\ \hline {}^tNA +^t B & {}^tNB + C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) =$
$= \left(\begin{array}{c|c} {}^tMAM & {}^tMAN +^t MB \\ \hline {}^t({}^tMAN +^t MB) & {}^tNAN + 2^tNB + C \end{array}\right).$

Quindi $\begin{cases} A' =^t MAM \\ B' =^t M(AN + B) \\ c' = {}^tNAN + 2^tNB + c \end{cases}$

Osservazione: M invertibile e $A \neq 0 \Rightarrow A' \neq 0$, cioè l'affinità trasforma una conica in una conica.

Osservazione: Q e Q' sono congruenti, A e A' anche, dunque $rk(Q)$ e $rk(A)$ sono invarianti per equivalenza affine (non cambiano se Q è moltiplicato per $\alpha \neq 0$)).

Definizione 4.12 (Conica degenere). $\mathcal{C}$ è detta degenere se $det(Q) = 0$. Più precisamente, semplicemente degenere se $det(Q) = 2$, doppiamente degenere se $det(Q) = 1$.

Definizione 4.13 (Conica a centro). $\mathcal{C} = [g]$ è detta conica a centro se $\exists N \in \mathbb{K}^2$ tale che $\forall X \; g(X) = g(\sigma_N(X))$, dove σ_N è la simmetria centrale di centro N.

Osservazione: Dato $N = (0,0)$, $\sigma_N(x,y) = (-x,-y)$, quindi $(0,0)$ è centro per $\mathcal{C} = [g] \Leftrightarrow g(x,y)$ è pari e dunque non contiene monomi di primo grado, cioè $B = 0$.

Caratterizziamo il centro di una conica: se $N \in \mathbb{K}^2$ è centro per $\mathcal{C}$ e considero la traslazione τ_N tale che $X \mapsto X + N$, allora $\tau_N^{-1}(\mathcal{C})$ ha centro in $(0,0)$ e quindi $B' = AN + B = 0$.
Quindi N è soluzione del sistema lineare $AN = -B$.

Distinguiamo la "semplificazione" dell'equazione di $\mathcal{C}$ a seconda che $\mathcal{C}$ sia a centro o no.

6.1.1. *Coniche non a centro.*

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & C \end{array}\right)$$

Siamo nel caso in cui il sistema $AY = -B$ non ha soluzione, dunque $rk(A) = 1$. Allora $\exists M \in GL(2,\mathbb{K})$ tale che ${}^tMAM = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Con la trasformazione lineare $X \mapsto MX$, ossia $\tilde{M}_0$, ed eventualmente cambiando segno all'equazione, $Q \mapsto Q_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & d \end{array}\right)$. Poichè $\mathcal{C}$ non ha centri possiamo assumere che $b_2 \neq 0$ e quindi $rk(Q) = 3$. Vediamo che $\exists N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tale che $\tau_N(Q_1) = Q_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ \hline 0 & c_2 & 0 \end{array}\right)$, con $c_1 \neq 0$. Infatti impongo che $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + d = 0 \end{cases}$

ossia $\begin{cases} \alpha + b_1 = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha b_1 + 2\beta b_2 + d = 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} \alpha = -b_1 \\ 2\beta b_2 + d - b_1 = 0 \end{cases}$ che ha soluzione in quanto $b_2 \neq 0$.

Infine con la trasformazione $\begin{cases} X \mapsto X' \\ Y \mapsto -\frac{Y'}{2c_2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione $X'^2 - Y' = 0$, cioè

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{tipo } \mathcal{C}_1, \textit{parabola di equazione } x^2 - y = 0$$

6.1.2. *Coniche a centro.* Passo 1: eliminazione dei termini di primo grado tramite traslazione

$$\mathcal{C} \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & c \end{array}\right)$$

Se $c \neq 0$, posso dividere l'equazione e ricondurmi a $c = 1$, ossia posso supporre $c = 0$ o $c = 1$.

Passo 2: semplificazione di A tramite congruenza, quindi dipende dal campo in quanto si usano i risultati del teorema di Sylvester

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il rango di A è invariante completo per congruenza, quindi

: se $rk(A) = 2$, A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

: se $rk(A) = 1$, A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vediamo dunque come si semplifica l'equazione di $\mathcal{C}$ a seconda di $(rk(A), rk(Q))$.

I: $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 3, \text{ cioè } c = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi ha equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$

II: $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 2, \text{ cioè } c = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi ha equazione $x^2 + y^2 = 0$ (ossia $(x + iy)(x - iy) = 0 \Rightarrow$ il supporto è l'unione di due rette incidenti)

III: $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 2, \text{ cioè } c = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi ha equazione $x^2 + 1 = 0$, (ossia $(x + i)(x - i) = 0 \Rightarrow$ due rette parallele)

IV: $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 1, \text{ cioè } c = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi ha equazione $x^2 = 0$ (ossia una retta doppia)

Osservazione: Ricordiamo che nel caso delle coniche non a centro si aveva $rk(A) = 1$ e $rk(Q) = 3$.

Abbiamo così provato il

Teorema 4.14 (Classificazione affine delle coniche di $\mathbb{C}^2$). *Ogni conica di $\mathbb{C}^2$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti*

(1) $x^2 - y = 0$
(2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
(3) $x^2 + y^2 = 0$
(4) $x^2 + 1 = 0$
(5) $x^2 = 0$

La coppia $(rk(A), rk(Q))$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in $\mathbb{C}^2$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ora il rango non è più invariante completa per congruenza. La segnatura lo è, ma non è invariante per $\sim_{aff}$, in quanto sensibile alla moltiplicazione per scalari $\alpha < 0$.
Usiamo quindi l'indice di Witt.

Distinguiamo i casi a seconda dei valori di $(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q))$ e denominiamo ogni tipologia in base al suo supporto:

I: $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 3 \end{cases}$

tipo $\mathcal{C}_2$: se $w(A) = 0$ e $w(Q) = 0$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 + y^2 + 1 = 0$$

tale che $V(f) = \emptyset$, un'ellisse immaginaria.

tipo $\mathcal{C}_3$: se $w(A) = 0$ e $w(Q) = 1$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ossia } -x^2 - y^2 + 1 = 0, \text{ ossia } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

tale che $V(f) =$ è un'ellisse reale.

tipo $\mathcal{C}_4$: se $w(A) = 1$ e $w(Q) = 1$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 - y^2 + 1 = 0$$

tale che $V(f)$ è un'iperbole.

II: $\begin{cases} rk(A) = 2 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$

tipo $\mathcal{C}_5$: se $w(A) = 0$ e $w(Q) = 1$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 + y^2 = 0$$

tale che $V(f) = \{ (0,0) \}$ è l'unione di due rette complesse incidenti.

tipo $\mathcal{C}_6$: se $w(A) = 1$ e $w(Q) = 2$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 - y^2 = 0$$

tale che il supporto è l'unione di due rette reali incidenti.

III: $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 2 \end{cases}$

tipo $\mathcal{C}_7$: se $w(A) = 1$ e $w(Q) = 1$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 + 1 = 0$$

tale che $V(f) = \emptyset$ è l'unione di due rette complesse parallele.

tipo $\mathcal{C}_8$: se $w(A) = 1$ e $w(Q) = 2$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 - 1 = 0$$

tale che il supporto è l'unione di due rette reali parallele.

IV: $\begin{cases} rk(A) = 1 \\ rk(Q) = 1 \end{cases}$

tipo $\mathcal{C}_9$: e $w(A) = 1$ e $w(Q) = 2$,

$$Q \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ossia } x^2 = 0$$

tale che il supoporto indica una retta doppia.

Riassumendo:

Invarianti	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$	$\mathcal{C}_8$	$\mathcal{C}_9$
$rk(A)$	1	2	2	2	2	2	1	1	1
$rk(Q)$	3	3	3	3	2	2	2	2	1
$w(A)$	1	0	0	1	0	1	1	1	1
$w(Q)$	1	0	1	1	1	2	1	2	2

Abbiamo così dimostrato il

TEOREMA 4.15 (Classificazione delle coniche di $\mathbb{R}^2$). *Ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti*

(1) $x^2 - 2y = 0$ *parabola*
(2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *ellisse immaginaria*
(3) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *ellisse reale*
(4) $x^2 - y^2 + 1 = 0$ *iperbole*
(5) $x^2 + y^2 = 0$ *rette complesse incidenti*
(6) $x^2 - y^2 = 0$ *rette incidenti*
(7) $x^2 + 1 = 0$ *rette complesse parallele*
(8) $x^2 - 1 = 0$ *rette parallele*
(9) $x^2 = 0$ *retta doppia*

La quaterna $(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q))$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in $\mathbb{R}^2$.

Osservazione: La conica $\mathcal{C} = [g]$ di equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$ (iperbole) può essere vista come $\mathcal{C} = S \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}$, dove $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0 \right\}$.

Osservazione: Si possono classificare metricamente le coniche di $\mathbb{R}^2$ in modo simile al caso affine, diangonalizzando tramite teorema spettrale e non con Sylvester.
Se $M \in O(2)$, $det(\tilde{M_N}) = det \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = det(M) = \pm 1$, quindi

- $tr({}^tMAM) = tr(A)$
- $det({}^tMAM) = det(A)$
- $det({}^t\tilde{M_N}Q\tilde{M_N}) = det(Q)$

Se moltiplico l'equazione della conica per $\alpha \neq 0$, la matrice della conica diventa

$$\alpha Q = \begin{pmatrix} \alpha A & \alpha B \\ \alpha {}^tB & \alpha c \end{pmatrix}$$

dunque

- $det(\alpha Q) = \alpha^3 det(Q)$
- $det(\alpha A) = \alpha^2 det(A)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$

Quindi se $tr(A) \neq 0$ i numeri $\frac{det(A)}{tr(A)^2}$ e $\frac{det(Q)}{tr(A)^3}$ sono invarianti metrici.
Dunque se $\mathcal{C} \sim_{met} \mathcal{C}'$, $\exists \alpha \neq 0$ tale che $det(Q') = \alpha^3 det(Q)$ e $det(A') = \alpha^2 det(A)$. Non vale però il viceversa, dunque tali invarianti non sono un sistema completo di invarianti per equivalenza metrica.

7. Quadriche

Sia $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, un polinomio di grado 2.
Allora $f(X) = {}^tXAX + 2{}^tBX + c$ con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ e $c \in \mathbb{K}$.

Definizione 4.16 (Matrice della quadrica). Definiamo matrice della quadrica, data la notazione precedente, $[f]$

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array} \right) \in \mathcal{M}(n+1, \mathbb{K})$$

Definizione 4.17 (Degenere). Una quadrica $\mathcal{C}$ si dice degenere se $det(Q) = 0$.

Come al solito, con abuso di linguaggio chiamiamo quadrica anche il supporto di $\mathcal{C}$.

Definizione 4.18 (Cono). Una quadrica $\mathcal{C}$ si dice cono di vertice $P_0 \in \mathcal{C}$ se $\forall P \in \mathcal{C}$, $P \neq P_0$, tutta la retta congiungente P_0 e P è contenuta in $\mathcal{C}$.

Definizione 4.19 (Cilindro). Una quadrica $\mathcal{C}$ si dice cono se $\exists r$ retta di $\mathbb{K}^n$ tale che $\forall P \in \mathcal{C}$ la retta passante per P e parallela a r è contenuta in $\mathcal{C}$.

Osservazione: Un cilindro è un cono con centro "all'infinito" (geometria proiettiva).

Esempi:

(1) Se f è un polinomio omogeneo di secondo grado, $[f]$ è un cono di vertice l'origine;
(2) Se f è un polinomio di secondo grado in $x_1, \dots, x_n$ in cui non compare una variabile x_j, allora $[f]$ è un cilindro parallelo all'asse x_j;
(3) In $\mathbb{R}^3$, $x^2 - y^2 = 0$ (unione di due piani incidenti) è sia un cono di vertice $(0,0,0)$ sia un cilindro parallelo all'asse z.

Definizione 4.20 (Quadrica a centro). $Q = [g]$ è detta quadrica a centro se $\exists N \in K^n$ tale che $\forall X \in \mathbb{R}^n$ $g(X) = g(\sigma_N(X))$ dove σ_N denota la simmetria centrale rispetto a N.

Proposizione 4.21. *Sia Q una quadrica di $\mathbb{R}^n$ e R un centro di Q. Allora, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'affinità, $f(R)$ è un centro di $f(Q)$, cioè le affinità mantengono i centri.*
In altre parole, la proprietà di essere una quadrica a centro è una proprietà affine.

Dimostrazione. Setting: $f(Q) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right)$ quindi, data $\tilde{M}_f = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, $Q = f^{-1}(f(Q))$ cioè

$$Q = {}^t\tilde{M}_f f(Q) \tilde{M}_f = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMAM & {}^tMAN + {}^tMB \\ \hline {}^t({}^tMAN + {}^tMB) & {}^tNAN + 2{}^tNB + c \end{array}\right)$$

Ora è chiaro che R è centro per $Q \Leftrightarrow {}^tMAM \cdot R = -{}^tM(AN + B) \Leftrightarrow$ (in quanto affinità) $AMR = -AN - B \Leftrightarrow AMR + AN = -B \Leftrightarrow A(MR + N) = -B \Leftrightarrow A(f(R)) = -B \Leftrightarrow f(R)$ è centro per $f(Q)$. $\square$

Proposizione 4.22. *Data Q quadrica di equazione ${}^t\tilde{X}Q\tilde{X} = 0$ con $Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right)$, allora*

(1) $rk(Q) \leq rk(A) + 2$

(2) Q è a centro $\Leftrightarrow rk(Q) \leq rk(A) + 1$

Dimostrazione. Sia $A' = (A|B)$

(1) $\left.\begin{array}{l} rk(A) \leq rk(A') \leq rk(A) + 1 \\ rk(A') \leq rk(Q) \leq rk(A') + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow rk(Q) \leq rk(A) + 2$

(2) $\Rightarrow$) Se Q è a centro, allora il sistema $AX = -B$ ha soluzione, quindi $rk(A) = rk(A')$ e dunque $rk(Q) \leq rk(A) + 1$.
$\Leftarrow$) Supponiamo per assurdo che Q non abbia centri, per cui $rk(A') = rk(A)+1$. Allora l'ultima colonna è lin. indipendente dalle prime n colonne di A e analogamente in Q.
Poichè Q è simmetrica, la (n+1)-esima riga di Q è lin. indipendente dalle prime n righe di Q, cioè dalle righe di A'.
Allora $rk(Q) = rk(A') + 1 = rk(A) + 2$. $\perp$

□

Corollario 4.23. *Q non ha centro* $\Leftrightarrow rk(Q) = rk(A) + 2$.

Analogamente al caso delle coniche si prova

Teorema 4.24 (Classificazione affine delle quadriche). *Ogni quadrica di $\mathbb{K}^n$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti*

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: *(1)* $x_1{}^2 + \ldots + x_r{}^2 + d = 0$ *con* $d = 0, 1$ *(a centro)*
(2) $x_1{}^2 + \ldots + x_r{}^2 - x_n = 0$ *(paraboloide)*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: *(1)* $x_1{}^2 + \ldots + x_p{}^2 - x_{p+1}{}^2 - \ldots - x_r{}^2 + d = 0$ *con* $d = 0, 1$ *(a centro)*
(2) $x_1{}^2 + \ldots + x_p{}^2 - x_{p+1}{}^2 - \ldots - x_r{}^2 - x_n = 0$

Osservazione: Se $\mathcal{C}$ è a centro e nella forma canonica A è semidefinita positiva (o negativa), $\mathcal{C}$ si dice ellissoide (o iperboloide).

Riduzione a forma canonica affine di una quadrica non a centro (paraboloide)
. Sia Q quadrica di $\mathbb{C}^n$ tale che $det(A) = 0$ e $rk(A) = r < n$.

- Per il teorema di Sylvester e per mezzo di una trasformazione lineare ci si riduce a

$$Q \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & & B \\ \hline {}^tB & & c \end{array}\right)$$

Sia $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{pmatrix}$, con $B_1 \in \mathbb{C}^r$ e $B_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$.

- Mediante traslazione ci si riduce a $B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}$ e $c = 0$, quindi

$$Q \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ \hline 0 & {}^tB & 0 \end{array}\right) \quad \text{con } B_2 \neq 0.$$

- $\exists$ un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ invertibile tale che

$$\begin{cases} \varphi|_{\mathbb{C}^r = Span(e_1 \dots, e_n)} = id \\ \varphi(\mathbb{C}^{n-r}) \subseteq \mathbb{C}^{n-r} \\ \varphi(B) = e_n \end{cases}$$

Allora $\varphi(X) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ con $det(G) \neq 0$ e $G(B_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-r}$.

Allora $\varphi : Q \mapsto Q' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline {}^tB' & c' \end{array}\right)$ dove

: $c' = 0$ (senza traslazione)

: $A' = {}^tMAM = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & {}^tG \end{pmatrix} = A$

: $B' = {}^tMB = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ GB_2 \end{pmatrix} = e_n$

dunque $Q' = \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & \\ 0 & 0 & e_n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{{}^te_n} & 0 \end{array}\right)$

Osservazione: In $\mathbb{R}^n$ è lo stesso con $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{r-p} \end{pmatrix}$ al posto di I_r.

Lista dei modelli affini (o forme canoniche affini) per le quadriche di $\mathbb{R}^3$. Raggruppiamole come segue:

A centro:

Non degeneri: ($\Rightarrow d \neq 0$)

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ellissoide immaginario
(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ellissoide
(3) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ iperboloide a una falda
(4) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ iperboloide a due falde

Degeneri con $d = 0$: (coni)

(5) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ punto o cono immaginario
(6) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ cono reale
(7) $x^2 + y^2 = 0$ piani complessi incidenti
(8) $x^2 - y^2 = 0$ piani incidenti
(9) $x^2 = 0$ piano doppio

Degeneri con $d \neq 0$: (cilindri)

(10) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ cilindro immaginario
(11) $x^2 - y^2 + 1 = 0$ cilindro iperbolico
(12) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ cilindro ellittico
(13) $x^2 - 1 = 0$ piani paralleli
(14) $x^2 + 1 = 0$ piani complessi paralleli

Non a centro: (paraboloidi)

Non degeneri:

15.: $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloide ellittico
16.: $x^2 - y^2 - z = 0$ paraboloide iperbolico (o sella)

Degeneri:

17.: $x^2 - z = 0$ cilindro parabolico

Osservazione: L'iperboloide a una falda è spesso detto "rigato" perchè per ogni suo punto passano due rette incidenti completamente giacenti sull'iperboloide. Infatti:

$$x^2+y^2-z^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2-z^2 = 1-y^2 \Leftrightarrow (x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$$

Ci sono dunque due tipi di queste rette:

Tipo 1:: $\begin{cases} \lambda(x-z) = \mu(1-y) \\ \mu(x+z) = \lambda(1+y) \end{cases}$

Tipo 2:: $\begin{cases} \lambda(x-z) = \mu(1+y) \\ \mu(x+z) = \lambda(1-y) \end{cases}$

Elenco di $(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q))$ per le 17 forme canoniche affini di quadriche di $\mathbb{R}^3$.

Inv.	$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_2$	$\mathcal{Q}_3$	$\mathcal{Q}_4$	$\mathcal{Q}_5$	$\mathcal{Q}_6$	$\mathcal{Q}_7$	$\mathcal{Q}_8$	$\mathcal{Q}_9$	$\mathcal{Q}_{10}$	$\mathcal{Q}_{11}$	$\mathcal{Q}_{12}$	$\mathcal{Q}_{13}$	$\mathcal{Q}_{14}$	$\mathcal{Q}_{15}$	$\mathcal{Q}_{16}$	$\mathcal{Q}$
$rk(A)$	3	3	3	3	3	3	2	2	1	2	2	2	1	1	2	2	1
$rk(Q)$	4	4	4	4	3	3	2	2	1	3	3	3	2	2	4	4	3
$w(A)$	0	0	1	1	0	1	1	2	2	1	2	1	2	2	1	2	2
$w(Q)$	0	1	2	1	1	2	2	3	3	1	2	2	3	2	1	2	2

$(rk(A), rk(Q), w(A), w(Q))$ sono un sistema completo di invarianti di equivalenza affine per le quadriche di $\mathbb{R}^3$.

Parte 5. Esercizi svolti

Dispensa di esercizi svolti a lezione, in particolare durante le lezioni di Manfredini.

Richiamiamo un po' di notazione: con ssv e ssa ci riferiamo a sottospazi vettoriali e affini.

(1) Mostrare che E è un ssa $\Leftrightarrow$ E è chiuso per combinazione affine di 2 punti.

Svolgimento. Per proposizione 2.9, sappiamo che E è un ssa $\Leftrightarrow$ è chiuso per combinazioni affini di k punti. Ci riduciamo a dimostrare quindi che E è chiuso per comb. affini di k punti $\Leftrightarrow$ lo è per comb. affini di 2 punti.

$\Rightarrow$) è banale.

$\Leftarrow$) Procediamo per induzione. Ci limitiamo a mostrare il passo induttivo. Siano P_1, P_2, $P_3 \in E$ e λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\sum \lambda_i = 1$. Mostriamo che $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \in E$.

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \lambda_1 P_1 + (1-\lambda_1)\big(\frac{\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3}{1-\lambda_1}\big) =$$

Osserviamo che $\frac{\lambda_2+\lambda_3}{1-\lambda_1} = 1$, quindi

$$\big(\frac{\lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3}{1-\lambda_1}\big) = Q \in E$$

per ipotesi. Allora $= \lambda_1 P_1 + (1-\lambda_1)Q \in E$ sempre per ipotesi.

(2) Dati E, E' ssa di A, mostrare che

$$T = \left\{ \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \mid P \in E, Q \in E' \right\}$$

è un ssa di A e trovarne la giacitura.

Svolgimento. Per punto precedente, basta mostrare che T è chiuso per comb. affini di 2 elementi. Siano T_1, $T_2 \in T$ cioè $\exists P_1$, $P_2 \in E$, Q_1,$Q_2 \in E'$ tali che $T_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}Q_1$ e $T_2 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}Q_2$, mostriamo che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2 \in T$.

$$\begin{aligned}\lambda T_1 + (1-\lambda)T_2 &= \lambda\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}Q_1 + (1-\lambda)\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}Q_2 = \\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2\big) + \frac{1}{2}\big(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2\big) \in T\end{aligned}$$

Poniamo $W = Giac(E)$, $U = Giac(E')$. Mostriamo che $Giac(T) = W + U$ mediante doppio contenimento.

$\subseteq$) Sappiamo che $\forall T_1$, $T_2 \in T$, $T_2 - T_1 \in Giac(T)$. Ora

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{2}P_2 - \frac{1}{2}Q_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}(Q_2 - Q_1) \in W + U$$

Quindi $T \subseteq \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S + W + U$.

$\supseteq$) Mostriamo che $T \supseteq \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S + W + U$. Siano $w \in W$, $u \in U$. $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S + w + u = \left(\frac{1}{2}R + w\right) + \left(\frac{1}{2}S + u\right) = \frac{1}{2}\big(R + 2w\big) + \frac{1}{2}\big(S + 2u\big) \in T$.

Possiamo dunque fare una distinzione, sapendo che

$$E + E' = \begin{cases} R + (W + U) & \text{se } E \cap E' \neq \emptyset \\ R + (W + U) + Span(R - S) & \text{se } E \cap E' = \emptyset \end{cases}$$

Cioè se $E \cap E' \neq \emptyset$ $\exists P \in E \cap E'$ t.c. $E = P + W$ e $E' = P + U$, allora $T = P + (W + U) = E + E'$. Invece se $E \cap E' = \emptyset$, $T \cap E = \emptyset$ e $T \cap E' = \emptyset$. Se per assurdo $\exists P \in T \cap E$, $P = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}S \Rightarrow S \in E' \cap E$ $\perp$

Osservazione: Ricordiamo che dato $C = A + \lambda(B - A)$, C si trova in base al valore di λ:

A B

$\lambda < 0$ $0 < \lambda < 1$ $\lambda > 0$

$\lambda = 0$ $\lambda = 1$

Osservazione: Ricordiamo che quando si ha a che fare con particolari poligoni:

- un'affinità manda spigoli in spigoli, vertici in vertici, punti interni in punti interni, esterni in esterni in quanto un'affinità mantiene i rapporti fra le rette e dei punti sulle rette, le intersezioni e i parallelismi
- i punti interni sono le $Comb_a$ con coefficienti tutti positivi (vedi oss. precedente)
- se voglio mandare un poligono di n lati (senza proprietà particolari invarianti per affinità, come il parallelismo) in un poligono di n lati attraverso un'affinità ho $2n$ possibilità di scelta per l'affinità, in quanto è univocamente determinata da dove mando 3 vertici consecutivi (n scelte per il primo, 2 per posizionare quelli vicini)

(3) Dati T, T' triangoli di vertici rispettivamente $A = (1, 0)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 1)$ e $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$, $P_3 = (3, 4)$, ci chiediamo se esista un'affinità f tale che $f(T) = T'$.

Svolgimento. No, in quanto P_1, P_2, P_3 sono allineati, mentre A, B, C non lo sono. Vediamolo.
Sia per assurdo f affinità tale che $f(A) = P_1$, $f(B) = P_2$, $f(C) = P_3$. Essendo allineati, $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $P_3 = tP_1 + (1-t)P_2$ quindi per affinità $f^{-1}(P_3) = tf^{-1}(P_1) + (1-t)f^{-1}(P_2) \Rightarrow C = tA + (1-t)B$ $\perp$ in quanto A, B, C non sono allineati.

Sia invece T' di vertici $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 3)$ e $P_3 = (0, 0)$.
Osserviamo che $\{ A, B, C \}$ e $\{ P_1, P_2, P_3 \}$ sono riferimenti affini; inoltre per soddisfare $f(T) = T'$ basta mandare vertici in vertici (oss. precedente), quindi porre $f(A) = P_1$, $f(B) = P_2$, $f(C) = P_3$ determina univocamente un'affinità che rispetta la condizione voluta.
Ora cerchiamo $M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ e $N \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(X) = MX + N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Osserviamo che $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 0$, quindi sapendo che un'affinità mantiene i punti medi

$$b = f(0) = f(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

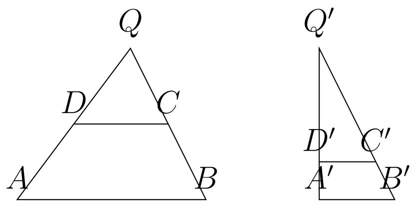
Invece

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = -2 \\ d = -3 \end{cases}$$

Quindi

$$f(X) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(4) Costruire un'affinità che mandi un trapezio in un trapezio.



Svolgimento. Sappiamo che lati paralleli devono andare in lati paralleli e che Q deve andare in Q' in quanto intersezione delle rette passanti per $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Inoltre la retta passante per $\overrightarrow{AB}$ deve necessariamente andare in quella passante per $\overrightarrow{A'B'}$, in quanto se si scambiassero Q' non starebbe più dalla stessa parte di D' rispetto ad A'. Siccome conserva anche i rapporti tra i punti sulle rette, $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DQ}} = \frac{f(\overrightarrow{AD})}{f(\overrightarrow{DQ})}$ e di conseguenza il rapporto tra le basi deve rimanere costante.

Quindi troviamo due diverse affinità:

$$f : \begin{cases} A \mapsto A' \\ B \mapsto B' \\ C \mapsto C' \\ D \mapsto D' \\ Q \mapsto Q' \end{cases} \quad \text{e } g : \begin{cases} A \mapsto B' \\ B \mapsto A' \\ C \mapsto D' \\ D \mapsto C' \\ Q \mapsto Q' \end{cases}$$

(5) Trovare il tipo affine delle coniche $\mathcal{C}_1$ di equazione $p_1(x,y) = y^2 - xy - y = 0$ e $\mathcal{C}_2$ di equazione $p_2(x,y) = x^2 + xy - 2x = 0$.

Svolgimento. Dall'equazione ci ricaviamo

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza $det(A) = -\frac{1}{4}$ e $rk(A) = 2$ e dai suoi autovalori ricaviamo che $w(A) = 1$. Invece, $det(Q) = 0$, quindi $w(Q) = 2$. Allora

$$M \sim_{aff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè alla conica di supporto due rette incidenti reali, di equazione $x^2 - y^2 = 0$.

Facendo le stesse considerazioni su $\mathcal{C}_2$ otteniamo gli stessi invarianti e dunque lo stesso tipo.

(6) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $\mathcal{C}_t$ di equazione $(tp_2 + p_1)(x,y) = 0$ (dove p_1 e p_2 sono quelli dell'esercizio precedente). Al variare di $t \in \mathbb{R}$, trovare quando $\mathcal{C}_t$ è a centro, studiare $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{C}_t$ e determinare il luogo dei centri di $\mathcal{C}_t$.

Svolgimento. Procediamo per punti:

(a) Trovare quando è a centro.

Dall'equazione $(tp_2 + p_1)(x,y) = 0$ ricaviamo che

$$M_t = \begin{pmatrix} t & \frac{t-1}{2} & -t \\ \frac{t-1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -t & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria sappiamo che $\mathcal{C}_t$ è a centro $\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\begin{pmatrix} t & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t-1}{2} & 1 \end{pmatrix} X = -\begin{pmatrix} -t \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se $det(A) \neq 0$, cioè $rk(A) = 2$, tale centro è unico; svolgendo i conti, avviene per $t \neq 3 \pm 2\sqrt{2}$. Invece

$det(M_t) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq o, -\frac{3}{2}$, allora ci siamo ridotti a questi invarianti:

Invarianti	$t = 3 \pm 2\sqrt{2}$	$t = 0$	$t = -\frac{3}{2}$
$rk(A)$	1	2	2
$rk(Q)$	3	2	2
$w(A)$	1	1	1
$w(Q)$	1	2	2

In quanto per $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $\mathcal{C}_t$ è non degenere e non a centro, dunque di tipo parabola. Invece per $t = 0, -\frac{3}{2}$ si tratta di rette incidenti.

(b) Studiare $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{C}_t$

Da definizione di $\mathcal{C}_t$, possiamo dire che

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{C}_t = \left\{ \, P \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } tp_2(P) + p_1(P) = 0 \, \right\}$$

Distinguiamo due casi: se $p_2(P) \neq 0$, allora $t = -\frac{p_1(P)}{p_2(P)}$, quindi $\exists! \mathcal{C}_t$ t.c. $P \in \mathcal{C}_t$; viceversa, se $p_2(P) = 0$, necessariamente $p_1(P) = 0$, quindi $P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ (dell'es. precedente), quindi

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{cases} x^2 + xy - 2x = 0 \\ y^2 - xy - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x + y - 2) = 0 \\ y(y - x - 1) = 0 \end{cases}$$

risolvendo, si ottengono quattro punti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{C}_t = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}_2 \cup \{ \, A, B, C, D \, \}$.

(c) Trovare il luogo dei centri

Al solito sappiamo che $X \in \mathbb{R}$ è centro $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} t & \frac{t-1}{2} \\ \frac{t-1}{2} & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t(x + \frac{1}{2}y - 1) = \frac{1}{2}y \\ tx = x - 2y + 1 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente a

$$\begin{cases} tx(x + \frac{1}{2}y - 1) = \frac{1}{2}y \\ tx = x - 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 2y + 1)(x + \frac{1}{2}y - 1) = \frac{1}{2}y$$

viene verificata da tutti i centri. Studiamola.

$$(x - 2y + 1)(x + \frac{1}{2}y - 1) = \frac{1}{2}y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xy - 2x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$$

Chiamiamo $\mathcal{C}_c$ la conica individuata da tale equazione. Studiandone gli invarianti emerge che si tratta di un'iperbole. Abbiamo così trovato che *luogo dei centri* $\subseteq \mathcal{C}_c$.
Ci chiediamo se valga il viceversa, cioè se $\forall P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_c$
$\exists t \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} tx_0(x_0 + \frac{1}{2}y_0 - 1) = \frac{1}{2}y_0 \\ tx_0 = x_0 - 2y_0 + 1 \end{cases}$
Se $x_0 \neq 0$, $t = \frac{x_0 - 2y_0 + 1}{x_0}$, altrimenti $x_0 = 0$ implica $y_0 = \frac{1}{2}$.
Vale dunque *luogo dei centri* $= \mathcal{C}_c$.

Osservazione: Ricordiamo che è più semplice lavorare con coniche degeneri (tipi $\mathcal{C}_i$ con $i = 5, 6, 7, 8, 9$), in quanto si tratta di rette le cui intersezioni sono sempre le stesse.

(7) Risolvere in $\mathbb{R}$ $x^4 - 4x^3 + 8x - 2 = 0$.
Svolgimento. É equivalente a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - 4xy + 8x - 2 = 0 \end{cases}$$

cioè studiare al variare di $t \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_t$ di equazione

$$t(x^2 - y) + y^2 - 4xy + 8x - 2 = 0.$$

Svolgendo i calcoli troviamo che ha matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} t & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -\frac{t}{2} \\ 4 & -\frac{t}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $det(A) = t - 4$ e $det(Q) = -\frac{1}{4}(t^3 - 24t + 32)$ e che $t = 4$ è radice anche di $det(Q)$, quindi la conica $\mathcal{C}_4$ è degenere e di invarianti $(1, 2, 1, 2)$, cioè due rette parallele. Ricondursi a studiare tale conica è più semplice in quanto degenere (vedi oss.). Sviscieriamone l'equazione:

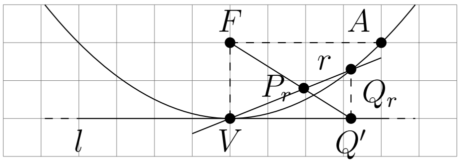
$$\begin{aligned} & t(x^2 - y) + y^2 - 4xy + 8x - 2 = \\ & = 4(x^2 - y) + y^2 - 4xy + 8x - 2 = \\ & = 4x^4 - 4y + y^2 - 4xy + 8x - 2 = \\ & = (4x^4 - 4xy + y^2) + (-4y + 8x) - 2 = \\ & = (2x - y)^2 + 4(2x - y) - 2 = \\ & = (2x - y + 2 - \sqrt{6})(2x - y + 2 + \sqrt{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y + 2 - \sqrt{6} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y + 2 + \sqrt{6} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 + \sqrt{6} = 0 \vee x^2 - 2x - 2 - \sqrt{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$$

(8) <u>Achtung! Alto livello di spasticismo! NCUC</u> Sia $\mathcal{P}$ tale parabola



dove $\begin{cases} 2\overline{FV} = \overline{FA} \\ r \text{ retta t.c. } V \in r \wedge F \notin r \\ l \cap \mathcal{P} = \{\, V \,\} \\ Q_r = r \cap \mathcal{P} \\ Q' \text{ proiezione di } Q_r \text{ su } l \\ P_r = r \cap \overline{FQ'} \end{cases}$ Trovare chi è $\bigcup_r P_r$.

Svolgimento. NON SI CAPISCE NA CIPPA

(9) Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2+y^2+4xy-2x-10y+1 = 0$. Determinare il modello canonico affine $\tilde{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ e determinare un'affinità $\psi \in Aff(\mathbb{R}^2)$ t.c. $\psi(\tilde{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$.
Svolgimento. Procediamo per punti:

(a) <u>Matrice della quadrica</u>
Data l'equazione $g(x, y)$, ricavo

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ \hline -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

.

(b) <u>Invarianti</u>
A questo punto è immediato ricavare che $rk(A) = 2$, $rk(Q) = 3$, $w(A) = 1$, $w(Q) = 1$ e quindi $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_4$, l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$, conica a centro non degenere.

(c) <u>Centro</u>
Trattandosi di una conica a centro, lo ricavo sapendo che il centro N risolve $AX = -B$, cioè

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \mapsto 2-1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) <u>Equivalente con centro in 0</u>
Tramite la traslazione $\tau_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $X \mapsto X + N$, dalla teoria sappiamo che la matrice associata a τ_N è

$\tilde{M_N} = \left(\begin{array}{c|c} I & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ e che $\mathcal{C}_1 = {\tau_N}^{-1}(\mathcal{C})$ è una conica di centro 0 e di matrice

$$Q_1 = {}^t\tilde{M_N}Q\tilde{M_N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dunque affinemente equivalente a Q.

(e) Equivalente con A diagonale

Ortogonalizziamo A, che definisce un prodotto scalare relativamente alla base canonica, tramite Algoritmo di Lagrange.

Sia $v_1 = e_1$ e $v_2 = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = e_2 - 2e_1$. Allora $A_{\{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Dunque $\mathcal{M}_{\{v_1,v_2\},\{e_1,e_2\}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ora sia $\psi_2(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$, questa affinità ha matrice $\tilde{M_2} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Otteniamo dunque $\mathcal{C}_2 = {\psi_1}^{-1}(\mathcal{C}_1)$, conica di matrice

$$Q_2 = {}^t\tilde{M_2}Q_1\tilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sempre affinemente equivalente a $\mathcal{C}$.

(f) Equivalente multipla della forma canonica

Osserviamo che data $\tilde{M_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\tilde{M_3}Q_2\tilde{M_3} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che rappresenta la stessa ipersuperficie di $\tilde{\mathcal{C}}$.

(g) Composizione delle affinità trovate

L'affinità $\tilde{M_1}\tilde{M_2}\tilde{M_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è quella cercata, cioè $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\psi(X) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(h)