?

Una veloce scaletta di quanto fatto del programma di ETI nell'a.a. 2015/2016 con il prof. Berarducci preparata in vista dell'esame scritto/orale. Per ogni cosa si rimanda al sito del corso: `http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/2012-13ETI/index-eti2016.html`

Perchè una teoria assiomatica degli insiemi

Mantra: tutti i concetti matematici possono essere visti dal punto di vista insiemistico
Varie teorie:

1. ZF: Zermelo-Fraenkel (non ha variabili definite su classi)
2. GB: Godel-Bernays, o NBG: von Neumann-Bernays-Godel
3. MK: Morse-Kelley

Paradossi:

1. Iperalbero
2. Russell

Logica di base

Connettivi logici

Booleani

Quantificatori anche limitati

Formule

Assiomi di ZFC

Estensionalità

Comprensione (schema)

Vuoto

Coppia

Unione unaria / binaria

Infinito

Potenza / parti AP

Scelta AC (4 formulazioni+lemma)

Rimpiazzamento (schema) AR

Fondazione

Relazioni e funzioni

Coppia di Kuratowski

Prodotto cartesiano è un insieme (via AR o AP)

Relazione tipi incontrati:

> **ordine totale** riflessività/antisimmetria/transitività/totalità
> induce ordine totale stretto
>
> **ordine parziale** riflessività/transitività/antisimmetria
> induce un ordine parziale stretto
>
> **ordine lessicografico**

equivalenza riflessività/simmetria/transitività
induce insieme quoziente (è insieme per AR o AP)
equivalenza⇔partizione (insieme quoziente)

Funzione che modella concetto di successione (nb. notazione)
è un insieme se definita su insieme
classe delle funzioni fra insiemi è insieme
intersezione è funzione se funzioni coincidono su intersezione di domini
crescente
isomorfismo
cofinale

Restrizione

Buoni ordini e tipi d'ordine

Definizioni

buon ordine

segmento iniziale (proprio)

somma di ordini

prodotto lessicografico

successore immediato

elemento limite

tipo d'ordine (avere lo stesso)/(minore)

Risultati

1. Tipi di elementi di un buon ordine

2. In un buon ordine, ogni segmento iniziale proprio coincide con gli elementi strettamente minori di un elemento

3. Se $(W, \leq_W)$ buon ordine e $f : W \to W$ crescente, allora $\forall x \in W\ x \leq fx$

4. Un buon ordine non è mai isomorfo a un suo sottoinsieme superiormente limitato

5. Un buon ordine non è isomorfo ad un suo segmento proprio

Ordinali

Definizioni

transitivo (insieme)

chiusura transitiva

ordinale

$\leq$

$<$

Risultati
Preliminarmente, enunciamo il seguente teorema:
$\forall X$ insieme, $\exists Y$ t.c. $Y \supseteq X$ transitivo. In particolare esiste sempre la chiusura transitiva di X.

Proprietà degli ordinali Sia ON la classe degli ordinali.

1. $\forall \alpha \in ON\ \alpha \notin \alpha$

2. $x \in \alpha \in ON \Rightarrow x \in ON$ cioè ON è una classe transitiva

3. Dati α, $\beta \in ON$, sono fatti equivalenti:

   1) $\alpha \in \beta$

   2) $\alpha \subset \beta$

   3) α segmento iniziale proprio di β

4. α, $\beta \in ON \Rightarrow \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$

5. Dati α, $\beta \in ON$, $(\alpha, \in)$ isomorfo a $(\beta, \in) \Rightarrow \alpha = \beta$

6. Principio del minimo per ordinali

7. ON non è un insieme

8. X insieme transitivo di ordinali $\Rightarrow X \in ON$

9. Proprietà di $(ON, \leq)$:

   1) $\emptyset = min(ON)$

   2) $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in ON$ ed è il minimo ordinale maggiore di α. Denotiamolo $\alpha + 1$

   3) $X \subset ON \Rightarrow \bigcup X \in ON$ ed è il minimo ordinale maggiore o uguale a tutti gli ordinali di X. Denotiamolo $sup(X)$

10. Ogni insieme di ordinali è limitato superiormente

11. Ogni classe di ordinali non limitata superiormente non è un insieme

12. ON è la più piccola classe di ordinali chiusa per successore e unione di sottoinsiemi.

Induzione e ricursione sugli ordinali
Enunciati analoghi a quelli su ω. Inoltre giustificano la definizione delle operazioni su ON, definite per ricursione ordinale sul secondo argomento:

somma 1. $\alpha + 0 = \alpha$

2. $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$

3. $\alpha + \lambda = sup\{\alpha + \beta \text{ t.c. } \beta < \lambda\}$ se λ ordinale limite

prodotto 1. $\alpha \cdot 0 = 0$

2. $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

3. $\alpha \cdot \lambda = sup\{\alpha \cdot \beta \text{ t.c. } \beta < \lambda\}$ se λ ordinale limite

prodotto 1. $\alpha^0 = 1$

2. $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

3. $\alpha^\lambda = sup\{\alpha^\beta \text{ t.c. } \beta < \lambda\}$ se λ ordinale limite

Godono della proprietà associativa e distributiva destra. Non sono commutative. Tramite induzione dimostriamo invece:

1. Sottrazione
2. Divisione con resto
3. Rappresentaazione in base $\gamma \in ON$
4. Rappresentazione in base ω, altrimenti detta Forma normale di Cantor
5. $\alpha + \beta$ isomorfo a $\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$
6. $\alpha \cdot \beta$ isomorfo a $\alpha \times \beta$

Relazioni ben fondate e loro rango

Richiamiamo le definizioni:
relazione ben fondata
funzione rango associata a una relazione ben fondata
tipo d'ordine

Risultati

1. R su A è ben fondata se e solo se non esistono successioni $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ t.c. $a_{n+1} R a_n \ \forall n \in \omega$
2. Un ordine totale è un buon ordine se e solo se la corrispondente relazione d'ordine stretto è ben fondata
3. Ricursione e induzione su relazioni ben fondate
4. R su A è ben fondata se e solo se esiste $\rho : A \to ON$ t.c. $\forall x, y \in A$ t.c. $xRy \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$
5. $Im(\rho)$ è un insieme transitivo di ordinali, dunque $Im(\rho) \in ON$
6. Dato $(A, \leq_A)$ buon ordine, esiste uno e uno solo $\alpha \in ON$ t.c. $(\alpha, \in)$ è isomorfo a $(A, \leq_A)$
7. Tale α è la funzione rango
8. Dati due buoni ordini, uno è isomorfo a un segmento iniziale dell'altro (cioè sono sempre confrontabili)

Teorema di Zermelo e lemma di Zorn

Abbiamo bisogno della definizione di **catena**.
I principali risultati sono i seguenti:

Teorema di Zermelo nella dimostrazione, sfruttiamo il fatto che ogni insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con un ordinale
Corollario: $\forall X, Y$ insiemi, $|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$

Lemma di Zorn

Zorn $\Rightarrow$ Zermelo

Zermelo $\Rightarrow$ AC

È lecito parlare di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

SÌ, CAZZO

Naturali $\mathbb{N}$

Come sono stati definiti? Via assiomatica via assiomi di Peano

Via costruttiva von Neumann

Via impredicativa ω intersezione di insiemi induttivi

Sono tuttavia modalità equivalenti:

Teorema 0.1. *von Neumann rispetta assiomi di Peano*
Teorema 0.2. *unicità a meno di isomorfismo dei naturali (con ricursione)*

Ma quella von Neumann $\Leftrightarrow$ intersezione di induttivi? ($\Leftarrow$ è falsa)

$\leq$ ordine totale + equivalenza con $\in$ su von Neumann

Principio del minimo $\Rightarrow$ Induzione forte

Ricursione giustificazione di definizioni di somma/prodotto/esponenziale/fattoriale
(di traverso: sottrazione)
versione forte $\Rightarrow$ Fibonacci

Interi $\mathbb{Z}$, Razionali $\mathbb{Q}$

Dato $\mathbb{N}$, definiamo via relazione di equivalenza:

$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/E$ dove $(n, m)E(n', m') \Leftrightarrow n + m' = n' + m$

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/\{0\}))/F$ dove $(n, m)F(n', m') \Leftrightarrow n \cdot m' = n' \cdot m$

A questo punto vengono indotte su $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$:

1) una relazione d'ordine totale $\leq_E$, $\leq_F$;

2) le usuali operazioni.

Quindi è improprio affermare $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ a meno di non identificarli con l'immagine di una funzione iniettiva:

i: $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $n \mapsto [(n, 0)]_E$

j: $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ t.c. $z \mapsto [(z, 1)]_F$

Inoltre $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (unione etc di numerabili).

Reali $\mathbb{R}$

Sono stati definiti per via: assiomatica come campo ordinato contenente $\mathbb{Q}$ in cui valgono:

1. Assioma di Archimede

2. Assioma di continuità

insiemistica come insieme dei tagli di Dedekind

La seconda definizione rispetta gli assiomi dettati dalla prima.

$\leq$ come inclusione tra tagli di Dedekind

Operazioni $+$: taglio delle somme

$\cdot$: taglio dei prodotti (occhio ai segni)

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ improprio, tuttavia identificabile tramite
$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ t.c. $q \mapsto \{x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q\}$

Pippe sulle cardinalità

Cardinali

alla Frege

Achtung! NON CONFONDERE CON RELAZIONE $\leq$ DATA SU ω, quindi non dare per scontate proprietà e operazioni!

Definizioni

$|\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{Y}|$ (equipotenza) esiste $f : X \to Y$ biunivoca

$|\boldsymbol{X}| \leq |\boldsymbol{Y}|$ esiste $f : X \to Y$ iniettiva, o equipotenza con sottoinsieme

$|\boldsymbol{X}| < |\boldsymbol{Y}|$ esiste $f : X \to Y$ iniettiva, ma non ne esiste alcuna biunivoca

Cardinalità di X classe degli elementi equipotenti ad X

Insieme finito equipotente a $n \in \omega$. Tale n è unico e verrà chiamato il numero di elementi dell'insieme

Insieme numerabile equipotente a ω: $|\omega| = \aleph_0$

Risultati (Ricordiamo che $\aleph_0 = |\omega|$ e $\boldsymbol{c} = |\mathbb{R}|$)

$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow X$ **è vuoto o esiste $f : Y \to X$ surgettiva** ($\Leftarrow$ AC, $\Rightarrow$ per costruzione)

Teorema di Cantor-Bernstein (antisimmetria)
Corollari: catena di disuguaglianze (estremi uguali/esistenza di una disuguaglianza stretta)

Equipotenza di insiemi derivati

- unione disgiunta equipotente a somma degli equipotenti
- prodotto cartesiano equipotente a prodotto degli equipotenti
- insieme finito X $\Rightarrow$ sottoinsiemi (propri Y) finiti ed equipotenti a $n' \leq (<)\, n$ e quindi $|Y| < |X|$
- unione e intersezione di numerabili è numerabile (AC) (generalizzabile)
- $|P(X)| = 2^{|X|}$

Principio dei cassetti (solo per insiemi finiti)

Teorema di Cantor

Proprietà via bigezione con insiemi di funzioni (combinatoria)

$|C| \cdot (|A| + |B|) = |C| \cdot |A| + |C| \cdot |B|$ distributiva

$|A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B|} \cdot |A|^{|C|}$

$|A|^{|B| \cdot |C|} = \left(|A|^{|B|}\right)^{|C|}$

$|A| + |B| = |A| + |C| \not\Rightarrow |B| = |C|$

$\boldsymbol{\aleph_0}$

1. $|X| \leq \aleph_0 \Rightarrow$ è finito o numerabile
2. è minore uguale di ogni altro cardinale infinito
3. se X infinito, $|X| + \aleph_0 = |X|$

$\boldsymbol{c}$

1. $\boldsymbol{c} \leq 2^{\aleph_0}$
2. $\boldsymbol{c} \geq 2^{\aleph_0}$ e quindi per Cantor-Bernstein $\boldsymbol{c} = 2^{\aleph_0}$
3. è la cardinalità dei numeri reali irrazionali
4. è la cardinalità dei numeri reali trascendenti

come ordinali iniziali

Definizioni

buon ordine iniziale

ordinale iniziale

$|\boldsymbol{X}|$

funzione aleph via ricursione transfinita:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= |\mathbb{N}| \\ \aleph_{\alpha+1} &= {\aleph_\alpha}^+ \\ \aleph_\alpha &= sup\{\aleph_\beta \text{ t.c. } \beta < \alpha\}, \text{ se } \alpha \text{ limite} \end{aligned}$$

$\sum_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\alpha_i}$

$\prod_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\beta_i}$

Achtung! NON CONFONDERE $\aleph_\alpha$ CON ω_α
Rappresentano lo stesso ordinale, ma il primo lo indica nella sua natura cardinale, il secondo in quanto ordinale. Ciò è importnte soprattutto quando si fanno le operazioni

Risultati

1. $\forall X$ insieme esiste uno e uno solo ordinale iniziale della stessa cardinalità di X
2. Ogni classe non vuota di cardinali ha un minimo elemento
3. $\forall\alpha$ cardinale $\exists\alpha^+$, il minimo cardinale più grande di α
4. X insieme di ordinali iniziali $\Rightarrow sup(X)$ è un ordinale iniziale

5. la funzione aleph è una bigezione da ON nella classe degli ordinali iniziali infiniti

6. Per ogni insieme X infinito, si ha $|X \times X| = |X|$

7. Dati due cardinali infiniti, $\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = max\{\alpha, \beta\}$

8.

9. Teorema di Konig

10. $\forall \kappa$ cardinale, $\kappa < 2^{\kappa}$

11. $|\mathbb{R}| \neq \aleph_{\omega}$

Cofinalità

Definizioni

cofinalità

ordinale regolare

cardinale successore

Risultati

1. La cofinalità di α è 1 se e solo se α ha massimo

2. poco chiaro

3. $\forall \alpha \in ON\ cf(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$

4. Ogni ordinale regolare è un cardinale

5. Ogni cardinale successore κ^{+} è regolare

6. $\forall \alpha \in ON\ cf(2^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha}$

Assioma di Fondazione e Gerarchia di von Neumann

Assioma di Fondazione:

- $\Leftrightarrow (V, \in)$ è ben fondata
- di conseguenza possiamo definire $\rho(x)$ con x insieme
- $\rho(x) < \alpha \Leftrightarrow x \in V_\alpha$

Gerarchia di Von Neumann: è definita per ricursione transfinita:
$V_0 = \emptyset$ $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ $V_\lambda = \bigcap$
Anche senza assumere AF, $\forall\alpha$ $(V_\alpha, \in)$ è ben fondata e dunque $x \in V_\alpha \Rightarrow \rho(x) < \alpha$

Trucchi per risolvere esercizi

- partizione $\Leftrightarrow$ relazione di equivalenza
- () formula binomiale
- se ho bisogno di operazioni su n elementi devo definire l'insieme come unione indicizzata su un insieme di cofinalità maggiore
- usare forma normale di Cantor nb $\aleph_1 = \omega^{\omega_1}$
- derivato è funzione continua rispetto al sup, così come somma
- cardinali hanno segmenti iniziali propri strettamente minori in cardinalità
- cofinalità
- buon esempio è V_ω della gerarchi di von neumann
- per le inclusioni torna comodo il rango
-