# Disclaimer

Questi appunti nascono ad uso e consumo dell'autore, che li ha TEXati in diretta e successivamente sistemati/integrati durante il corso di Teoria dei Modelli tenuto dal professor Berarducci presso la Scuola Normale Superiore di Pisa durante il secondo semestre dell'anno accademico 2013/2014. Come conseguenza possono essere *molto* poco chiari, difettare di qualcosa, eccetera eccetera, e in particolare *non* sono gli appunti ufficiali del corso. Sentitevi liberi di insultarmi, segnalare sviste, errori, imprecisioni, carenze eccetera presso `mennuni@mail.dm.unipi.it`.

L'ultima modifica a questi appunti è stata apportata il 24 giugno 2014. La maniera migliore per sapere cosa cambia rispetto alla versione precedente che avete scaricato è scaricarsi anche i sorgenti e tiraci sopra un `diff`. Se non avete il sorgente della versione precedente non mi vengono in mente modi veloci. In ogni caso potete trovare l'ultima versione di questi appunti e relativo sorgente presso `poisson.phc.unipi.it/~mennuni/`.

**Notazione 0.1.** Se $\mathcal{M}$ è una struttura, $M = \operatorname{dom} \mathcal{M}$, e a volte per brevità scriverò cose come $A \subset \mathcal{M} \vDash T$ per evitare di riempire il foglio di $M$. Inoltre, mentre con $\{a_i \mid i < \beta\}$ indico l'insieme degli $a_i$ al variare di $i < \beta$ (che tipicamente è un ordinale), quando scrivo $\langle a_i \mid i < \beta \rangle$ intendo che mi "porto dietro" la struttura di $\beta$-upla (è la notazione dello Jech). Queste cose sono distinte (si pensi a cosa succede se gli $a_i$ sono tutti uguali).

Rosario "Mufasa" Mennuni

SPAM: ascoltate `www.radiocicletta.it`

# Indice

# 1 03/03

## 1.1 Eliminazione dei quantificatori

**Esempio 1.1** (ACF)**.** Dato il linguaggio $L = \{+, \cdot, 0, 1, -\}$, consideriamo la $L$-teoria dei *campi algebricamente chiusi* i cui assiomi sono

- Assiomi dei campi
- Lo schema di assiomi "ogni polinomio di grado $n > 0$ ha uno zero"

$$\forall a_0, \ldots, a_{n-1} \; \exists x \; (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0)$$

Per rimanere nell'ambito della logica del prim'ordine siamo costretti[1] a usare infiniti assiomi, perché non possiamo quantificare sui polinomi.

**Definizione 1.2.** Una $L$-teoria $T$ ammette EQ (eliminazione dei quantificatori) se data $\varphi(\bar{x}) \in L$ esiste $\theta(\vec{x}) \in L$ senza quantificatori $(\forall, \exists)$ tale che

$$T \vdash \forall \vec{x} \; [\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \theta(\vec{x})]$$

**Esempio 1.3.** Un esempio di eliminazione dei quantificatori (da una singola formula) nella struttura $(\mathbb{R}, +. \cdot, 0, 1, <)$ è

$$\exists x \; (x^2 + bx + c = 0) \leftrightarrow b^2 - 4c > 0$$

**Esempio 1.4.** Un altro esempio è

$$\neg \exists (x, y) \neq (0, 0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

**Proposizione 1.5** (Forma normale disgiuntiva)**.** Siano $F = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ e $\psi$ una combinazione booleana di $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Allora $\psi$ equivale a una formula del tipo

$$\bigvee_i \bigwedge_j \pm \theta_{ij}$$

con $\theta_{ij} \in F$, $-\theta_{ij} = \neg \theta_{ij}$ e $+\theta_{ij} = \theta_{ij}$.

*Dimostrazione.* Chiamiamo *clausola* un oggetto della forma $\pm\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \pm\varphi_n$. È immediato notare che ci sono $2^n$ clausole, e che in particolare sono finite. Ciascuna clausola implica $\psi$ oppure implica $\neg\psi$. Si mostra che $\psi$ è equivalente alla disgiunzione delle clausole che la implicano.

**Esercizio 1.6.** Completare la dimostrazione

□

[1] Si può dimostrare che ACF non è finitamente assiomatizzabile al prim'ordine.

**Esempio 1.7.** Se $F = \{A, B, C\}$ e $\psi = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ($\psi$ è in *forma normale congiuntiva*) la sua forma normale disgiuntiva è $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$.

**Definizione 1.8.** Una formula del tipo $\exists x\ \varphi(x)$ è *primitiva* se e solo se $\varphi$ è una clausola, cioè se è congiunzione di formule atomiche e negazioni di formule atomiche.

**Teorema 1.9.** Una teoria $T$ ha EQ se e solo se ogni formula $\exists x \varphi(x)$ primitiva equivale a una $\theta$ senza quantificatori.

*Dimostrazione.* Assumiamo WLOG di avere solo $\exists$. Per induzione supponiamo che la formula che falsifica EQ sia del tipo $\exists x\ A$, dove da $A$ abbiamo eliminato i quantificatori. Mettiamo $A$ in forma normale disgiuntiva e notiamo che $\exists x(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists x \alpha \vee \exists x \beta$, da cui la tesi. □

**Teorema 1.10.** ACF ammette EQ.

*Dimostrazione.* Per il Teorema precedente ci basta mostrare che ogni formula primitiva ammette EQ. Le formule primitive di ACF sono del tipo

$$\exists x \bigwedge_{i<m} t_i = 0 \wedge \bigwedge_{j<n} u_j \neq 0$$

Osserviamo intanto che

$$u \neq 0 \leftrightarrow \exists y(uy = 1)$$

e che $\exists$ distribuisce su $\wedge$ se le variabili sono diverse[2]. Dunque possiamo scartare il pezzo con le negazioni aggiungendo esistenziali e riducendoci quindi a una formula del tipo

$$\varphi = \exists x \bigwedge_{i<m} t_i = 0$$

e possiamo inoltre supporre che $\deg_x(t_i) > 0$. Se $m = 1$

$$\exists x(t_0 = 0) \Leftrightarrow \exists x(a_0 x^{n_0} + r_0 = 0) \Leftrightarrow a_0 \neq 0 \vee \exists x(r_0 = 0)$$

e induttivamente ci riconduciamo al termine più semplice $r_0$, che ha grado inferiore. Se $m > 1$ scriviamo

$$t_0 = a_0 x^{n_0} + r_0 \qquad t_1 = a_1 x^{n_1} + r_1$$

supponendo $n_0 \geq n_1 > 0$ abbiamo che $(t_0 = 0 \wedge t_1 = 0)$ è equivalente a una delle seguenti:

- $(a_1 \neq 0 \wedge t_0' = 0 \wedge t_1 = 0)$, dove $t_0' = a_1 t_0 - a_0 x^{n_0 - n_1} t_1$.
- $(a_1 = 0 \wedge t_0 = 0 \wedge r_1 = 0)$

[2] Ad esempio $\exists x \alpha(x) \wedge \exists z \beta(z) \leftrightarrow \exists x \exists z(\alpha(x) \wedge \beta(z))$.

Disgiungiamo i due casi e otteniamo che

$$\varphi \Leftrightarrow \Big[a_1 \neq 0 \wedge \exists x \, \big(t'_0 = 0 \wedge t_1 = 0 \wedge \bigwedge_{i\geq 2} t_i = 0\big)\Big] \vee \Big[a_1 = 0 \wedge \exists x \, \big(t_0 = 0 \wedge r_1 = 0 \wedge \bigwedge_{i\geq 2} t_i = 0\big)\Big]$$

Questo diminuisce il grado in $x$ dei polinomi coinvolti, e quando arriva a 0 possiamo liberarci di $\exists x$. □

## 1.2 Conseguenze

In termini geometrici abbiamo dimostrato che

**Corollario 1.11.** In ogni ACF ogni insieme definibile è costruibile[3].

**Definizione 1.12.** Se $p$ è primo, $\mathrm{ACF}_p$ è la teoria ottenuta aggiungendo ad ACF l'assioma

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ volte}} = 0$$

$\mathrm{ACF}_0$ è la teoria aggiungendo ad ACF gli assiomi, un per ogni primo $p$,

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ volte}} \neq 0$$

Un esempio di modello di $\mathrm{ACF}_0$ è $\mathbb{C}$, mentre un modello di $\mathrm{ACF}_p$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Teorema 1.13.** $\mathrm{ACF}_p$ e $\mathrm{ACF}_0$ sono complete.

*Dimostrazione.* Dato un enunciato $\varphi$ dobbiamo mostrare che $\mathrm{ACF}_0 \vdash \varphi$ oppure $\mathrm{ACF}_0 \vdash \neg\varphi$. Dato che ACF ammette EQ possiamo assumere che $\varphi$ non abbia quantificatori[4]. Se $K, L \vDash \mathrm{ACF}_0$, allora, dato che $\varphi$ non ha quantificatori,

$$K \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathbb{Q} \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$$

perché $\mathbb{Q}$ si immerge in ogni campo a caratteristica 0 e una formula senza quantificatori è vera se e solo se è vera in ogni sottostruttura. Dunque comunque presi $K$, $L$, si ha $K \vDash \varphi \Leftrightarrow L \vDash \varphi$. Per $\mathrm{ACF}_p$ la dimostrazione è la stessa usando $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ invece di $\mathbb{Q}$. □

**Osservazione 1.14.** Se una teoria $T$ ammette EQ e ha un modello $\mathcal{A}$ che si immerge[5] in ogni altro modello[6], allora è completa.

[3] Cioè combinazione booleana di chiusi di Zariski.

[4] Precisazione: nell'eliminazione di quantificatori non aggiungiamo nuove variabili, quindi se partiamo con un enunciato otteniamo ancora un enunciato.

[5] L'immersione non deve essere necessariamente elementare.

[6] Anche meno: come abbiamo visto basta che sia una struttura, non è necessario che sia un modello di $T$.

**Teorema 1.15** (Principio di Lefschetz)**.** Sia $\varphi$ un enunciato nel linguaggio della teoria dei campi. Allora sono equivalenti

1. $\varphi$ è vera in qualche $\mathcal{M} \vDash \textsc{acf}_0$
2. $\varphi$ è vera in tutti i $\mathcal{M} \vDash \textsc{acf}_0$
3. Per infiniti primi $p$, $\varphi$ è vera in ogni $M \vDash \textsc{acf}_p$.

*Dimostrazione.* L'equivalenza dalle prime due segue dalla completezza mostrata poco fa. Dato che stiamo usando teorie del prim'ordine, vale il Teorema di Compattezza, per cui se $\mathbb{C} \vDash \varphi$ basta un sottoinsieme finito di $\textsc{acf}_0$ per dimostrare $\varphi$. Tuttavia questo numero finito di assiomi è vero in $\textsc{acf}_p$ per $p$ sufficientemente grande. Se viceversa $\varphi$ è falso in $\mathbb{C}$, allora $\textsc{acf}_0 \vdash \neg\varphi$, quindi succede lo stesso in $\textsc{acf}_p$ per cofiniti $p$ e si conclude come prima. □

**Teorema 1.16** (Ax)**.** Ogni $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomiale iniettiva è surgettiva[7].

*Dimostrazione.* Sia $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$, dove $f_i \in \mathbb{C}[\bar{x}]$ e $\deg(f_i) \leq d$. Quantificando sui coefficienti troviamo $\theta_{n,d}$ che dice che ogni $f$ mappa polinomiale iniettiva di grado $\leq d$ è surgettiva. Ora $\theta_{n,d}$ è chiaramente vera nei campi finiti, e perciò è vera anche nell'unione crescente di una famiglia di campi finiti $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i = L$. Prendo $f \colon L^n \to L^n$ e $i \in \mathbb{N}$ tale che i coefficienti di $f$ siano in $K_i$. Allora per $j \geq i$ possiamo restringere $f_{|K_j} \colon K_j^n \to K_j^n$ e $f$ sarà surgettiva, per cui $f \colon L \to L$ è surgettiva. Tuttavia la chiusura algebrica di un campo di caratteristica $p$ è ottenuta proprio in questa maniera, per cui il Teorema è vero in tutte le chiusure algebriche degli $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Per completezza è vero, per ogni $p$, in tutti i modelli di $\textsc{acf}_p$, e per Lefschetz è vero anche per $\mathbb{C}$. □

**Teorema 1.17** (Hilbert Nullstellensatz)**.** Siano $K \vDash \textsc{acf}$ e $P(\vec{x}) = 0$ un sistema di equazioni polinomiali. Se $P$ ha soluzione in qualche campo $L \supseteq K$, allora $P$ ha soluzione in $K$.

*Dimostrazione.* Possiamo assumere WLOG $L$ algebricamente chiuso, a meno di passare alla sua chiusura algebrica. Per ipotesi $L \vDash \exists\bar{x}\ P(\bar{x}) = 0$. Tuttavia per EQ esiste $\varphi$ senza quantificatori tale che

$$\textsc{acf} \vdash \exists\vec{x}(P\vec{x} = 0) \leftrightarrow \varphi$$

ma ora $L \vDash \varphi \leftrightarrow K \vDash \varphi$ e questo conclude. □

Notiamo che qui abbiamo bisogno del fatto che $K$ non sia una semplice sottostruttura, ma un modello di ACF, perché ne abbiamo bisogno per eliminare i quantificatori.

[7] C'è una versione più generale dove invece di $\mathbb{C}^n$ abbiamo una varietà con opportune ipotesi.

**Teorema 1.18** (Nullstellensatz II)**.** Sia $K \vDash \text{ACF}$. Se $f \in K[\bar{x}]$ si annulla ogni volta che si annullano $f_1, \dots, f_m \in K[\bar{x}]$, allora $f$ sta nel radicale[8] dell'ideale generato da $f_1, \dots, f_m$.

*Dimostrazione.* Per le ipotesi[9] $f_1, \dots, f_m, (1 - yf)$ non hanno zeri comuni, quindi generano l'ideale (1) in $K[\bar{x}, y]$, altrimenti avremmo soluzione in qualche estensione[10] di $K$ (e quindi anche in $K$ per il Nullstellensatz). Quindi possiamo scrivere

$$1 = a_0 f_1^{n_1} + \dots$$

sostituiamo ora $y$ con $\frac{1}{f}$. Liberandoci dei denominatori moltiplicando per un $f^r$, con $r$ sufficientemente grande, otteniamo che $f^r$ sta nell'ideale generato da $f_1, \dots, f_m$. □

**Teorema 1.19.** $\text{ACF}_0$ e $\text{ACF}_p$ sono decidibili[11].

*Dimostrazione.* Una teoria ricorsivamente assiomatizzata e completa è decidibile. □

Questa dimostrazione, a differenza di quella che ACF elimina i quantificatori, fornisce un algoritmo ma senza darci stime sulla sua complessità[12]. Esistono anche qui dimostrazioni più costruttive, che ripercorrono la dimostrazione dell'eliminazione dei quantificatori (controllano nei razionali).

## 1.3 Qualche esercizio

**Esercizio 1.20.** ACF è decidible.

**Esercizio 1.21.** Siano $L = \{<\}$ e $T$ la $L$-teoria degli ordini lineari densi senza estremi (DLO):

- Assiomi degli ordini totali.
- Densi: $x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)$
- Senza estremi: $\forall x \exists y(y > x) \wedge \forall x \exists y(y < x)$

Dimostrare che DLO ammette EQ[13].

La densità serve: ad esempio $\text{Th}(\mathbb{Z}, <)$ non ha EQ. Basta guardare la formula $\exists x(y < x \wedge x < z)$, che in $\mathbb{Q}$ è equivalente a $y < z$, ma in $\mathbb{Z}$ no. Qui la densità gioca un po' il ruolo della chiusura algebrica: entrambe le cose ci dicono che certi quantificatori esistenziali sono sempre soddisfatti. Serve anche "senza estremi" per gestire cose come $\exists x(x > u)$.

[8] Cioè esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che $f^r$ sta nell'ideale.
[9] Trucco di Rabinovich.
[10] Basta quozientare $K[\bar{x}, y]$ per un ideale massimale che contenga $f_1, \dots, f_m, (1 - yf)$.
[11] Cioè esiste un algoritmo per decidere, data $\varphi$ chiusa, se $T \vdash \varphi$ o meno.
[12] In particolare non è primitivo ricorsivo.
[13] Probabilmente c'è bisogno di avere $\perp$ e $\top$ perché il linguaggio non ha costanti.

**Esercizio 1.22.** DLO è completa.

Questo si può fare scimmiottando quello che abbiamo fatto prima, ma vedremo che DLO è $\aleph_0$-categorica.

# 2 05/03

## 2.1 Isomorfismi parziali

**Notazione 2.1.** Se $\mathcal{M}$ è una struttura, indichiamo il suo dominio con $\operatorname{dom}\mathcal{M}$, o con $M$.

**Definizione 2.2.** Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ due $L$-strutture, $A \subset M$ e $B \subset N$. $f\colon A \to B$ è un *isomorfismo parziale* se, per ogni $L$-formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ senza quantificatori e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(fa_1, \ldots, fa_n)$$

Indichiamo questa situazione con $f\colon \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{N}$.

**Osservazione 2.3.** Se $A \neq \emptyset$ (e quindi anche $B \neq \emptyset$), questo è equivalente a chiedere che $f$ si estende ad un isomorfismo[14] $f\colon \langle A\rangle_{\mathcal{M}} \to \langle B\rangle_{\mathcal{N}}$.

**Esercizio 2.4.** Dimostrare l'Osservazione precedente.

Se $A = \emptyset$ vuol dire che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ verificano le stesse formule *chiuse* senza quantificatori. Se ad esempio il linguaggio non ha simboli di costante questo è sempre vero a vuoto. Se ci sono simboli di costante invece la sottostruttura generata dal vuoto $\langle\emptyset\rangle$ coincide con la struttura generata dalle costanti. Per evitare queste complicazioni abbiamo dato la definizione in quell'altra maniera. In molti testi questa difficoltà viene aggirata supponendo che il linguaggio contenga almeno una costante.

**Definizione 2.5.** Un insieme $I$ di isomorfismi parziali da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ gode della proprietà del *va-e-vieni* se

1. $\forall f \in I\ \forall a \in M\ \exists g \supseteq f\ (g \in I \wedge a \in \operatorname{dom} g)$
2. $\forall f \in I\ \forall b \in N\ \exists g \supseteq f\ (g \in I \wedge b \in \operatorname{im} g)$

**Definizione 2.6.** Diciamo che due strutture sono *parzialmente isomorfe* (e scriviamo $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$) se esiste una famiglia non vuota $I$ di isomorfismi parziali da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ dotata di va-e-vieni.

**Esempio 2.7.** $(\mathbb{R}, <) \cong_p (\mathbb{Q}, <)$. Basta prendere come $I$ la famiglia di tutti gli isomorfismi parziali finiti, cioè con dominio finito.

[14] Indichiamo con $\langle A\rangle_{\mathcal{M}}$ la sottostruttura di $\mathcal{M}$ generata da $A$.

La condizioni di finitezza serve ad assicurare il va-e-vieni. Già con i domini numerabili non ce la si fa più, come si vede facilmente considerando l'identità su $\mathbb{Q}$ o una mappa che mandi $\mathbb{N}$ in una successione convergente a 0.

**Teorema 2.8** (dell'Isomorfismo di Scott)**.** Se $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sono strutture numerabili e $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N}$, allora $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

**Corollario 2.9** (Cantor)**.** Due modelli numerabili di DLO sono isomorfi (cioè DLO è $\aleph_0$-categorica).

**Esempio 2.10.** $(\mathbb{Q}, <) \cong (\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}, <)$.

*Dimostrazione del Teorema 2.8.* Fissiamo un ordine di tipo $\omega$ su $M$ ed $N$, cioè scriviamo

$$M = \langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \qquad N = \langle b_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

Sia $I \neq \emptyset$ la famiglia con va-e-vieni che esiste per ipotesi. Scegliamo $f_0 \in I$ qualunque. Scegliamo poi, usando il va e vieni,

- $f_{2n+1}$ in maniera che $a_n \in \operatorname{dom} f_{2n+1}$. Se $a_n \in \operatorname{dom} f_{2n}$ poniamo $f_{2n+1} = f_{2n}$, altrimenti per ipotesi esiste $g \in I$ tale che $g \supseteq f_{2n}$ e $a_n \in \operatorname{dom} g$. Poniamo $f_{2n+1} = g$.

- $f_{2n+2}$ in maniera che $b_n \in \operatorname{im} f_{2n+2}$, analogamente a quanto sopra.

A questo punto $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ è l'isomorfismo cercato[15]. □

**Svarione 2.11.** [16] Posso interpretare $(\mathbb{Q}, <)$ in $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Qui l'isomorfismo ci viene anche definibile (è calcolabile e Peano è potente).

**Notazione 2.12.** Se $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{a} \in A$ vuol dire $\bar{a} \in A^n$. Analogamente $f \colon \bar{a} \mapsto \bar{b}$ significa che mappa una $n$-upla nell'altra rispettando l'ordine.

## 2.2 Eliminazione dei quantificatori e completezza

**Teorema 2.13.** Sia $T$ una $L$-teoria tale che $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ l'insieme $I$ di tutti gli isomorfismi parziali finiti da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ abbia il va-e-vieni. Allora $T$ ha EQ.

[15] Ogni formula senza quantificatori contiene un numero finito di parametri. Basta prendere $n$ sufficientemente grande...

[16] D'ora in poi etichetterò con "Svarione" cose uscite fuori in seguito a domande, osservazioni che presuppongono conoscenze non introdotte precedentemente, e in generale cose che mi sembrano non previste originariamente nella lezione. Questo perché "Svarione" è più corto è suona meglio di "Fuori programma".

*Dimostrazione.* Per il Teorema 1.9 basta dimostrare che riusciamo ad eliminare i quantificatori dalle formule primitive $\exists x\ \varphi(x,\bar{y})$, con $\varphi$ senza quantificatori. Vogliamo quindi trovare $\theta$ senza quantificatori tale che

$$T \vdash \theta(\bar{y}) \leftrightarrow \exists x\ \varphi(x,\bar{y})$$

Definiamo[17] $\Gamma(\bar{y})$ come l'insieme delle *conseguenze senza quantificatori* di $\exists x\ \varphi(x,\bar{y})$ in $T$, cioè

$$\Gamma(\bar{y}) = \{\gamma(\bar{y}) \text{ senza quantificatori } \mid T \cup \exists x\ \varphi(x,\bar{y}) \vdash \gamma(\bar{y})\}$$

Ci basta dimostrare che $T \cup \Gamma(\bar{y}) \vdash \exists x\ \varphi(x,\bar{y})$. Questo perché per compattezza allora esiste una singola[18] $\gamma(\bar{y}) \in \Gamma$ tale che $T \vdash \gamma(\bar{y}) \to \exists x\ \varphi(x,\bar{y})$, e $T$ mostra anche l'altra implicazione perché $\gamma(\bar{y}) \in \Gamma(\bar{y})$.

Supponiamo per assurdo di avere

$$(\mathcal{A},\bar{a}) \vDash T \cup \Gamma(\bar{y}) \cup \neg\exists x\ \varphi(x,\bar{y})$$

dove intendiamo che $\bar{a}$ vada al posto di $\bar{y}$, cioè $\mathcal{A} \vDash T$, $\bar{a} \in A$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma(\bar{a})$ e $A \vDash \neg\exists x\ \varphi(x,\bar{a})$. Consideriamo il *tipo senza quantificatori* di $\bar{a}$, cioè

$$D(\bar{y}) = \{\delta(\bar{y}) \text{ senza quantificatori} \mid \mathcal{A} \vDash \delta(\bar{a})\}$$

Claim: $T \cup D(\bar{y}) \cup \exists x\ \varphi(x,\bar{y})$ ha un modello (cioè è coerente). Se così non fosse potremmo trovare per compattezza $\delta(\bar{y}) \in D(\bar{y})$ tale che

$$T \cup \delta(\bar{y}) \vdash \neg\exists x\ \varphi(x,\bar{y})$$

o, equivalentemente

$$T \cup \exists x\ \varphi(x,\bar{y}) \vdash \neg\delta(\bar{y})$$

Ma $\neg\delta(\bar{y}) \in \Gamma(\bar{y})$ ($\delta$ non ha quantificatori), e dato che $\mathcal{A} \vDash \Gamma$, dunque $\mathcal{A} \vDash \neg\delta(\bar{a})$, ma d'altra parte $\delta \in D$ e quindi $\mathcal{A} \vDash \delta(\bar{a})$. Otteniamo così un assurdo e abbiamo provato il claim.

Prendiamo dunque $(\mathcal{B},\bar{b}) \vDash T \cup D(\bar{y}) \cup \exists x\ \varphi(x,\bar{y})$. Ora $\bar{b}$ in $B$ e $\bar{a}$ in $A$ verificano le stesse formule senza quantificatori, perché sono le formule in $D(\bar{y})$. Quindi la funzione $f\colon \bar{a} \mapsto \bar{b}$ è un isomorfismo parziale da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Scelgo $c \in B$ tale che $\mathcal{B} \vDash \varphi(c,\bar{b})$. Per le ipotesi sul va-e-vieni esiste $g \supseteq f$ isomorfismo parziale con $c \in \operatorname{im} g$; definendo $d = g^{-1}(c)$ otteniamo che $\mathcal{A} \vDash \varphi(d,\bar{a})$. Ma questo è assurdo perché $\mathcal{A} \vDash \neg\exists x\ \varphi(x,\bar{a})$. $\square$

**Corollario 2.14.** DLO ha EQ.

[17] Ricordiamo che $T \vdash \forall y(\alpha(y) \to \beta(y))$ in $L$ se e solo se $T \vdash \alpha(y) \to \beta y$ in $L \cup \{y\}$, dove $y$ è un nuovo simbolo di costante.

[18] A meno di congiunzioni.

**Osservazione 2.15.** Le ipotesi del Teorema sono soddisfatte anche se $I$ è vuoto[19]. Quindi stiamo chiedendo che fra due modelli di $T$ non ci siano isomorfismi parziali, oppure se ci sono godono sempre di va-e-vieni.

**Spoiler 2.16.** I tipi sono la generalizzazione degli ideali in algebra. C'è sempre un estensione di anelli con uno zero di un ideale, e c'è sempre una realizzazione di un tipo in un'estensione...

**Definizione 2.17.** Un isomorfismo parziale da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ è *elementare* se preserva tutte le formule a parametri nel suo dominio[20], cioè data $\varphi(\bar{x})$ e $\bar{a} \in \operatorname{dom} f$

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(f\bar{a})$$

**Esempio 2.18.** Un isomorfismo parziale *non* elementare è l'inclusione di ordini $i\colon (\mathbb{Z}, <) \hookrightarrow (\mathbb{Q}, <)$. Una formula non preservata è $\neg\exists x\ (0 < x < 1)$.

Questo isomorfismo parziale non è estendibile (non so chi mandare in $\frac{1}{2}$), e non è un caso. Infatti

**Teorema 2.19.** Se $I$ è una famiglia di isomorfismi parziali da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ con il va-e-vieni, allora ogni $f \in I$ è elementare.

*Dimostrazione.* Per induzione su(lla complessità di) $\varphi$. Se $\varphi$ è atomica è vero per ipotesi. Se $\varphi$ si ottiene da formule più semplici tramite connettivi è banale. Resta da vedere cosa succede se $\varphi(\bar{x})$ è della forma $\exists y\ \theta(\bar{x}, y)$. Se $\mathcal{M} \vDash \exists y\ \theta(\bar{a}, y)$, con $\bar{a} \in \operatorname{dom} f$, allora $\exists c \in M$ tale che $\mathcal{M} \vDash \theta(\bar{a}, c)$. Dunque per ipotesi esiste $g \supseteq f$ con $c \in \operatorname{dom} g$ e $d = g(c) \in N$. Allora

$$I \ni g\colon (\bar{a}, c) \to (g\bar{a}, gc) = (\bar{b}, d)$$

Per ipotesi induttiva $\mathcal{M} \vDash \theta(\bar{a}, c) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \theta(\bar{b}, d)$, e in particolare $\mathcal{N} \vDash \exists y\ \theta(\bar{b}, y)$. □

**Corollario 2.20.** Nelle ipotesi del Teorema 2.13, se inoltre è vero che per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ si ha $I \neq \emptyset$, allora $T$ è completa.

*Dimostrazione.* Siano $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ e $I \ni f\colon \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{N}$. Allora $f$ è elementare per il Teorema 2.19. Dunque per ogni $\varphi(\bar{x})$ abbiamo che $\forall \bar{a} \in \operatorname{dom} f$ vale $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(f\bar{a})$. In particolare se $\bar{a}$ ha lunghezza zero, cioè se $\varphi$ è un enunciato, $\mathcal{M} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi$, cioè $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. □

**Svarione 2.21.** La stessa dimostrazione funziona anche sotto l'ipotesi più debole "per ogni coppia di modelli esiste un insieme $I \neq \emptyset$ di isomorfismi parziali finiti col va-e-vieni". In questo caso non abbiamo eliminazione dei

[19] Ad esempio se $T = \text{ACF}$ fra due campi di caratteristica diversa non ci sono isomorfismi parziali.
[20] E non solo quelle atomiche.

quantificatori ma riusciamo comunque a dimostrare la completezza. In ogni caso potremmo avere eliminazione dei quantificatori in un linguaggio più ampio. Ad esempio $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$ non ha EQ, ma $(\mathbb{Z}, <, s)$, dove $s$ è il successore, ce l'ha, ma mostrarlo richiederà altri strumenti[21].

**Corollario 2.22.** DLO è completa.

**Esempio 2.23** (Grafo random)**.** Consideriamo $V = \mathbb{N}$, $E \subset V^2$ simmetrica ($E(x, y) \leftrightarrow E(y, x)$). Questo lo chiamiamo *grafo*. Un grafo random è un grafo dove ogni arco esiste con probabilità $\frac{1}{2}$. Si verifica che dati un insieme $A$ di $n$ punti e un insieme $B$ di $k$ punti tali che $A \cap B = \emptyset$, esiste un punto connesso a tutti i punti di $A$ e sconnesso da tutti i punti di $B$ con probabilità 1. Posso esprimere questa cosa con gli assiomi $\Phi_{n,k}$

$$\left[\forall x_1, \ldots, x_n \bigwedge x_i \neq x_j \forall y_1, \ldots, y_k \bigwedge y_i \neq y_j \wedge \bigwedge x_i \neq y_j\right] \to \exists z \bigwedge E(z, x_i) \wedge \bigwedge \neg E(z, y_j)$$

cui aggiungo la simmetria di $E$. Dati due modelli di questa teoria $G_1$, $G_2$, e data $f\colon G_1 \rightsquigarrow G_2$ con dominio finito, è facile vedere che $f$ è estendibile. Per quanto visto nella lezione questa Teoria è $\aleph_0$-categorica (e quindi due grafi random "veri", cioè dove gli archi esistono con probabilità $\frac{1}{2}$, sono isomorfi con probabilità 1).

# 3 10/03

## 3.1 Considerazioni sulle precedenti lezioni

Enunciamo un risultato che abbiamo implictamente visto l'ultima volta:

**Teorema 3.1.** $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Abbiamo visto due tecniche per l'EQ: per ACF l'abbiamo fatto "a mano", per DLO abbiamo usato il va-e-vieni. Questa tecnica non avrebbe funzionato per ACF, perché

**Osservazione 3.2.** Esistono $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash \mathrm{ACF}_0$ tali che $\mathcal{M} \not\cong_p \mathcal{N}$. Ad esempio basta prendere[22] $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\overline{\mathbb{Q}(x)}$. Infatti $x$ è trascendente è non può essere mappato da nessuna parte. Questo è anche un controesempio al viceversa del Teorema precedente.

**Spoiler 3.3.** Questo problema lo potremmo aggirare considerando solo i modelli $\omega$-saturi; per ACF sono essenzialmente modelli con tanti trascendenti.

[21] Uno vorrebbe considerare solo gli isomorfismi nel linguaggio con $s$, ma purtroppo questa idea non va in porto...

[22] $\overline{\mathbb{F}}$ indica la chiusura algebrica di $\mathbb{F}$.

**Spoiler 3.4.** Anticipazione sui giochi di Ehrenfeucht-Fraïssé (definizione non riportata), ci torneremo più avanti nel corso. Si può dare la definizione di $n$-equivalenza che essenzialmente vuol dire che il secondo giocatore può resistere per $n$ mosse (sapendo in anticipo quando finirà il gioco). Un Teorema che vedremo è che due strutture sono elementarmente equivalenti se e solo se per ogni $n$ sono $n$-equivalenti. Quindi quello che abbiamo visto può essere ulteriormente precisato dicendo che $\mathcal{M} \cong_p \mathcal{N} \Rightarrow (\forall n\ \mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Il viceversa della prima equivalenza non vale (magari la strategia per resistere 30 mosse non estende nessuna di quelle che resistono 20 mosse). Un esempio di questa situazione si ottiene considerando $(\mathbb{Z}, <)$ e $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, <)$, perché se so che ci sono 10 mosse mi basta spaziare gli elementi di $2^{10}$ (o qualcosa del genere) posti.

## 3.2 Campi reali chiusi

Vedremo l'eliminazione dei quantificatori per la teoria RCOF, seguendo una terza strada. Abbiamo questo criterio *locale*[23] per l'eliminazione dei quantificatori:

**Proposizione 3.5** (Shoenfield?)**.** Sia $T$ una $L$-teoria, $\varphi(\bar{y}) \in L$ e supponiamo che $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ si abbia che $\forall f \colon \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{N}$ valga

$$\forall \bar{a} \in \operatorname{dom} f\ \mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(f\bar{a})$$

allora $\varphi(\bar{y})$ equivale in $T$ a una formula senza quantificatori.

La dimostrazione assomiglia molto a quanto visto la volta scorsa e la postponiamo. Inoltre si può mostrare che il Teorema 2.13 segue da questo criterio.

**Definizione 3.6.** Sia $T$ una $L$-teoria e $\mathcal{A}$ una $L$-struttura[24]. $\mathcal{B} \vDash T$ è una $T$-*chiusura* di $\mathcal{A}$ se esiste $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ immersione[25] e per ogni altra immersione $g \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C} \vDash T$ esiste un'unica[26] immersione $j \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tale che[27]

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, "j"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

**Esempio 3.7.** Se $\mathcal{A}$ è un campo, $\mathcal{B}$ è la sua chiusura algebrica.

[23]Nel senso che ci dice come eliminarli da una singola formula.
[24]Non necessariamente un modello di $T$.
[25]Non necessariamente elementare
[26]A volte l'unicità non viene richiesta.
[27]$\circlearrowleft$ vuol dire che il diagramma commuta.

**Definizione 3.8.** $T$ ha la *$T$-chiusura* se e solo se ogni sottostruttura di un modello di $T$ ha una $T$-chiusura.

**Definizione 3.9.** Gli assiomi di RCOF sono[28]

1. Assiomi dei campi ordinati.
2. Ogni polinomio che cambia segno ha uno zero (schema di assiomi, uno per ogni grado).

Equivalentemente potevamo chiedere che ogni polinomio di grado dispari avesse uno zero e che ogni numero positivo ammettesse radice quadrata. Non lo dimostriamo. Non dimostriamo nemmeno che

**Fatto 3.10.** Se $\mathbb{K} \vDash$ RCOF, allora $\mathbb{K}[\sqrt{-1}] \vDash$ ACF. Da ciò segue che ogni polinomio in $\mathbb{K}$ si fattorizza in fattori di grado al più 2.

Non dimostriamo nemmeno che

**Teorema 3.11** (Artin-Schreir)**.** RCOF ha la chiusura, che chiamiamo *chiusura reale*. Di più: ogni campo ordinato si immerge in un campo reale chiuso, e quindi ha una chiusura reale.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[rr, "\hookrightarrow"] \arrow[dr, "\hookrightarrow"'] & \circlearrowleft & \mathbb{R} \\ & \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{RE}} \arrow[ur, "\hookrightarrow"'] & \end{tikzcd}$$

**Osservazione 3.12.** In un campo ordinato i quadrati sono non negativi. In particolare $-1$ non può essere un quadrato, e $\mathbb{C}$ non è un modello di RCOF.

**Teorema 3.13.** RCOF ha EQ.

Notiamo che il fatto che stiamo trattando RCOF e non RCF ci serve: $\exists y(x = y^2) \leftrightarrow x \geq 0$. Si può mostrare che $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ non ha EQ.

*Dimostrazione.* Siano $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \vDash$ RCOF e $f\colon \mathbb{F}_1 \rightsquigarrow \mathbb{F}_2$. Usando di nuovo il Teorema 1.9 ci basta mostrare che riusciamo ad eliminare i quantificatori dalle $\exists x\ \varphi(x, \bar{y})$ primitive. Possiamo supporre WLOG che sia nella forma

$$\exists x\ \varphi(x, \bar{b}) \equiv \exists x \Big( \bigwedge_i f_i(x) = 0 \wedge \bigwedge_j g_j(x) > 0 \Big)$$

e per la Proposizione 3.5 basta mostrare che[29]

$$\forall \bar{b} \in \operatorname{dom} f\ \mathbb{F}_1 \vDash \exists x\ \varphi(x, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathbb{F}_2 \vDash \exists x\ \varphi(x, \bar{f}b)$$

[28] Alcuni autori indicano con RCF i campi reali *ordinabili* chiusi. Si dimostra che un campo è ordinabile se e solo se $-1$ non è somma di quadrati.

[29] Notiamo che questo funziona anche se $f$ è vuota.

Consideriamo ora

$$\mathbb{F}_1 \supset R_1 = \langle \bar{b} \rangle \overset{f}{\cong} R_2 = \langle f\bar{b} \rangle \subset \mathbb{F}_2$$

Per l'esistenza e unicità della RCOF-chiusura esistono $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ tali che, WLOG,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \overset{f}{\cong} & R_2 \\ \cap & & \cap \\ \overline{R_1} & \overset{\bar{f}}{\cong} & \overline{R_2} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{F}_1 & & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Supponiamo quindi che

$$\mathbb{F}_1 \vDash \exists x\, \varphi(x, \bar{b}) \equiv \exists x \Big( \bigwedge_i f_i(x) = 0 \land \bigwedge_j g_j(x) > 0 \Big)$$

dove $f_i \in R[x]$ e $g_j \in R[x]$. Supponendo che $f$ sia l'identità per semplicità notazionale (dovremmo cambiare anche i polinomi $f_i$ e $g_j$) vogliamo mostrare che $\mathbb{F}_2 \vDash \exists x\, \varphi(x, \bar{b})$. Sia $a \in \mathbb{F}_1$, tale che $\mathbb{F}_1 \vDash \varphi(a, \bar{b})$. Se $f_i(a) = 0$ e $f_i \not\equiv 0$, allora $a \in \overline{R} \subset \mathbb{F}_2$. Se invece in $\varphi$ ci sono solo disugualianze, o se gli $f_i$ sono tutti di grado 0, allora la condizione $\bigwedge_j g_j(a) > 0$ equivale a un sistema di disuguaglianze della forma $a > c_i$, $a < d_i$, con $c_i$ e $d_i$ radici dei fattori lineari di $g_j$, che stanno quindi in $\overline{R} \subset \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$. È facile vedere che in $\mathbb{F}_2$ c'è sicuramente un $a'$ che verifica le stesse disuguaglianze. Per questo $a'$ vale $\mathbb{F}_2 \vDash \varphi(a', \bar{b})$ e questo conlcude. $\square$

**Osservazione 3.14.** Questa scelta di $a \mapsto a'$ rispetta *una* formula, non tutte. Quindi non abbiamo mostrato nessun risultato di va e vieni. Ad esempio se $a$ è trascendente e in $\mathbb{F}_2$ non ci sono trascendenti mi basta mandarlo in un elemento "trascendente quanto basta" (nel senso che non annulla certi polinomi). Se i campi fossero stati $\omega$-saturi avrei potuto aggirare questo problema.

Notiamo che RCOF ha anche un modello che si immerge ogni altro suo modello, cioè $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{RE}} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. Avendo EQ e un modello che si immerge in tutti gli altri otteniamo che

**Teorema 3.15.** RCOF è completa.

**Corollario 3.16.** RCOF $= \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$

**Corollario 3.17.** RCOF è decidibile.

Usando il fatto che

**Teorema 3.18** (Artin)**.** Se $\mathbb{K}$ è un campo e $a \in \mathbb{K}$ non è somma di quadrati, allora esiste un ordine compatibile con la struttura di campo su $\mathbb{K}$ in cui $a < 0$.

otteniamo anche come corollario di quanto visto prima

**Teorema 3.19** (Artin)**.** Siano $\mathbb{F} \vDash \textsc{rcof}$ e $p(\bar{x}) \in \mathbb{F}[\bar{x}]$ definito positivo, cioè tale che $\forall \bar{a} \in \mathbb{F}\ p(\bar{a}) \geq 0$. Allora $p(\bar{x})$ si scrive come somma di quadrati di funzioni razionali, cioè esistono $f_i, g_i \in \mathbb{F}[\bar{x}]$ tali che

$$p(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i(\bar{x})^2}{g_i(\bar{x})^2}$$

*Dimostrazione.* Penso $p(\bar{x}) \in \mathbb{F}(\bar{x})$, cioè come elemento del campo dei quozienti invece che come polinomio. Se $p(\bar{x})$ non è somma di quadrati, posso mettere su $\mathbb{F}(\bar{x})$ un ordine tale che $p(\bar{x}) < 0$, e che estende l'ordine di $\mathbb{F}$[30]. Ora

$$\overline{\mathbb{F}}^{\mathrm{RE}}(\bar{x}) \vDash \exists \bar{y}[p(\bar{y}) < 0]$$

per eliminazione dei quantificatori allora $\mathbb{F} \vDash \exists \bar{y}\ p(\bar{y}) < 0$, che è contro le nostre ipotesi. $\square$

Ricordiamo

**Definizione 3.20** (Sottostruttura elementare)**.** $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ se $M \subset N$ e per ogni $\varphi(\bar{x})$ e $\bar{a} \in M$ si ha $M \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathbb{N} \vDash \varphi(\bar{a})$.

**Definizione 3.21.** Una teoria $T$ è *model-completa* se $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ si ha $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

**Corollario 3.22.** Se $T$ ha $\textsc{eq}$, allora è model-completa.

Il viceversa non vale: $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 1, 0)$ è model-completa ma non ha $\textsc{eq}$[31]. È comunque vero che

**Spoiler 3.23.** Una teoria è model-completa se ogni formula è equivalente ad un'esistenziale.

Questo esempio è già negli appunti del corso di logica e quindi lo cito e basta

**Esempio 3.24.** $(2\mathbb{Z}, <) \subset (\mathbb{Z})$, $(2\mathbb{Z}, <) \cong (\mathbb{Z})$, ma $(2\mathbb{Z}, <) \not\prec (\mathbb{Z})$.

[30] Gli $\textsc{rcof}$ hanno un unico ordine, i quadrati devono essere positivi.

[31] Per mostrarlo serve il fatto che in un campo reale chiuso $a$ è un quadrato oppure lo è $-a$, poi si dovrebbe riuscire ad andare in porto.

# 4 12/03

## 4.1 Diagrammi

**Definizione 4.1.** Siano $L \subset L'$ due linguaggi, $\mathcal{M}$ una $L'$-struttura. La sua *restrizione* $\mathcal{M} \restriction L$ è la $L$-struttura ottenuta non interpretando i simboli in $L' \setminus L$. Diciamo anche che $\mathcal{M}$ è un'*espansione*[32] di $\mathcal{M} \restriction L$.

**Esempio 4.2.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \restriction \{+, 0\} = (\mathbb{R}, +, 0)$.

**Definizione 4.3.** Sia $\mathcal{M}$ una $L$-struttura e $A \subset M$. Definiamo $L_A$ come $L = \{c_a \mid a \in A\}$, dove i $c_a$ sono simboli di costante, e denotiamo con $\mathcal{M}_A$ o con $(M, a)_{a \in A}$ l'espansione di $\mathcal{M}$ a $L_A$-struttura ottenuta interpretando ogni $c_a$ con il relativo $a$.

**Esempio 4.4.** Se $A = \mathbb{R}$, allora $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)_A = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, c_{\sqrt{2}}, c_\pi, \ldots)$.

Possiamo considerare

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A} = \{\varphi \in L_A \mid \mathcal{M}_A \vDash \varphi\} = \{\varphi(\overline{c_a}) \mid \mathcal{M} \vDash \varphi(\overline{a})\}$$

Quando $A = M$ diamo un nome specifico a questa teoria:

**Definizione 4.5.** Il *diagramma elementare* di $\mathcal{M}$ è $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in M}$.

**Esempio 4.6.** $\mathrm{Th}((M, a)_{a \in \mathbb{R}}) \vdash c_\pi > 2$ perché $\mathbb{R} \vDash \pi > 2$.

D'ora in poi ci sentiremo liberi di confondere $a$ con $c_a$ e $M$ con $M_A$ quando il significato è chiaro dal contesto.

**Definizione 4.7.** $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ è un'*immersione elementare* se $\operatorname{im} f \prec \mathcal{N}$. Denotiamo questa situazione con $f \colon \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

**Proposizione 4.8.** Se $\mathcal{N} \vDash \mathrm{Th}(M, a)_{a \in A}$, allora la funzione $f \colon A \to N$ definita come $a \mapsto (c_a)^{\mathcal{N}}$ è un'immersione elementare, nel senso[33] che

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(fa)$$

**Corollario 4.9.** I modelli si $\mathrm{ED}(\mathcal{M})$ sono, a meno di isomorfismo, le sovrastrutture elementari di $\mathcal{M}$.

**Teorema 4.10.** Siano $\mathcal{M}$ una $L$-struttura e $T$ una $L$-teoria. Allora $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup T$ è coerente se e solo se esiste $\mathcal{N}$ tale che $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $\mathcal{N} \vDash T$.

*Dimostrazione.* "$\Rightarrow$" Sia $\mathcal{N}' \vDash \mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup T$. Allora la mappa $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}'$ definita come $a \mapsto (c_a)^{\mathcal{N}'}$ è elementare. Dunque esistono $\mathcal{N}$ e un isomorfismo la cui costruzione è noiosa ma ovvia tali che

[32] Da non confondersi con *estensione*, in cui allargo il dominio.

[33] $A$ è solo un sottoinsieme del dominio, e non una sottostruttura.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{N}' \arrow[dd, "\cong"] \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, hook] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

"$\Leftarrow$" È ovvio. $\square$

**Definizione 4.11.** Il *diagramma* è definito come il diagramma elementare, solo che invece che per tutte le formule chiedo che la condizione valga solo per le formule senza quantificatori.

Si ottengono risultati analoghi, ma invece che sovrastrutture elementari si ottengo sovrastrutture e basta.

## 4.2 Tipi

**Definizione 4.12.** Sia $T$ una $L$-teoria $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Un *$n$-tipo* $p(\bar{x})$ è un insieme di $L \cup \{\bar{x}\}$-enunciati tale che $T \cup p(\bar{x})$ è coerente come $L \cup \{\bar{x}\}$-teoria, cioè esiste un modello $(\mathcal{M}, a_1, \dots, a_n)$ tale che $\mathcal{M} \vDash T$ e $\mathcal{M} \vDash p(\bar{a})$, cioè per ogni $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ si ha $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a})$. Un *tipo completo* è un tipo che è anche una teoria completa.

**Notazione 4.13.** D'ora in poi "tipo" per noi significherà "tipo completo". Se avremo bisogno di un tipo non completo diremo "tipo parziale".

**Esempio 4.14.** Siano $\mathcal{M} \vDash T$ e $a \in \mathcal{M}$. Allora $p(x) = \{\varphi(x) \mid \mathcal{M} \vDash \varphi(a)\}$ è un 1-tipo di $T$ perché $(\mathcal{M}, a) \vDash p(x) \cup T$.

**Definizione 4.15.** Chiamiamo il tipo dell'esempio precedente il *tipo di $a$ su $\mathcal{M}$* e lo indichiamo con $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a)$.

**Definizione 4.16.** $p(x)$ è un *tipo* di $\mathcal{M}$ se è un tipo di $\mathrm{Th}\,\mathcal{M}$.

**Definizione 4.17.** $p(x)$ è *realizzato* (o *soddisfacibile*) in $\mathcal{M}$ se e solo se esiste $a \in M$ tale che $\mathcal{M} \vDash p(a)$.

**Osservazione 4.18.** Sia $T$ una teoria completa. Allora sono equivalenti

1. $T \cup \varphi(\bar{x})$ è coerente come $L \cup \{\bar{x}\}$-teoria.

2. $T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ nel linguaggio $L$.

*Dimostrazione.* $T \cup \varphi(x)$ è incoerente se e solo se $T \vdash \neg\varphi(x)$. Dato che $x$ è un simbolo di costante non in $L$, questo succede se e solo se $T \vdash \forall x\, \neg\varphi(x)$ (esercizio). Per completezza questo succede se e solo se $T \nvdash \exists x \varphi(x)$. $\square$

**Teorema 4.19.** $p(x) \cup \operatorname{Th} \mathcal{M}$ è coerente se e solo se $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{M}$.

*Dimostrazione.* Se $p$ è finito, o equivalentemente[34] se è una singola formula $\varphi$, allora è soddisfatto in $\mathcal{M}$ perché $\operatorname{Th} \mathcal{M}$ è completa. Si conclude per compattezza. $\square$

**Esempio 4.20.** Siano $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ e

$$p(x) = \{x > 0, x > 1, x > 1 + 1, x > 1 + 1 + 1, \dots\}$$

Questo non è realizzato in $\mathbb{R}$ ma è finitamente realizzato, e quindi $p(x) \cup \operatorname{Th}(\mathbb{R})$ è coerente per compattezza.

Consideriamo $\operatorname{tp}_{\mathbb{C}}(\sqrt{2})$. Qui di significativo a parte $x^2 = 2$ non c'è praticamente niente. In effetti questo tipo è realizzato anche da $-\sqrt{2}$, ed effettivamente c'è un automorfismo di $\mathbb{C}$ che li scambia... Invece $\operatorname{tp}_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}) \supseteq \{x^2 = 2, x > 0\}$, e in effetti l'unico automorfismo di $\mathbb{R}$ è l'identità. Analogamente $\operatorname{tp}_{\mathbb{C}}(\pi)$ contiene sicuramente $p(x) \neq 0$, per ogni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Non solo, questo tipo è lo stesso per tutti i trascendenti, ed esistono automorfismi di $\mathbb{C}$ che scambiano i trascendenti. In generale si dimostra che

**Spoiler 4.21.** Due elementi di uno modello hanno lo stesso tipo se e solo se esiste un automorfismo di un'estensione elementare che li scambia.

**Definizione 4.22.** Un tipo che è soddisfatto da un numero finito di elementi si dice *algebrico*.

**Spoiler 4.23.** Un tipo algebrico ha una singola formula che le implica tutte (basta prenderne una soddisfatta dal numero minimo di soluzioni).

In $(\mathbb{Q}, <, +)$ ci sono esattamente tre tipi di elementi, a seconda del segno. Il tipo di 0 include $x + x = x$. $\operatorname{tp}(2) = \operatorname{tp}(3) \supseteq \{x > 0\}$, perché la moltiplicazione per $\frac{2}{3}$ è un automorfismo. Se aggiungo la moltiplicazione al linguaggio le cose cambiano, e infatti $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ ha $2^{\aleph_0}$ tipi, uno per ogni taglio di Dedekind, mettendo le disuguaglianze come formule. Quindi ad esempio, anche se non posso mettere $x^2 = 2$ in un tipo perché non è coerente con la teoria, ci posso mettere $\{q_1 < x < q_2 \mid q_i \in \mathbb{Q}, q_1^2 < 2, q_2^2 > 2\}$.

Una teoria con tanti tipi è complessa, tipicamente non decidibile, ma questa correlazione è abbastanza vaga, ad esempio $\operatorname{Th}(\mathbb{Q}^{\mathrm{RE}}, <, +, \cdot, 0, 1)$ ha $2^{\aleph_0}$ tipi (è equivalente alla teoria di $\mathbb{R}$ che non ha automorfismi non banali) ma è comunque decidibile.

Ci sembra quindi di capire che possiamo immaginare i tipi come "elementi ideali", che è coerente che esistano, anche se non sono realizzati. E in effetti abbiamo

[34] In quanto teoria completa $p$ è chiuso per congiunzioni.

**Teorema 4.24.** Ogni tipo di $\mathcal{M}$ è realizzato in una sua sovrastruttura elementare $\mathcal{N}$.

*Dimostrazione.* Ci basta mostrare che $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup p(x)$ è coerente. Per definizione di tipo sappiamo che $\mathrm{Th}\,\mathcal{M} \cup p(x)$ è coerente, ma dato che i parametri non intervengono in $p$ è esattamente la stessa cosa. Più precisamente, supponiamo per assurdo che $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup p(x) \vdash \bot$. Per compattezza esiste $\pi(x) \in p(x)$ tale che $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \vdash \neg\pi(x)$ nel linguaggio $L \cup M \cup \{x\}$. Dato che $x$ non compare in $L \cup M$, allora $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \vdash \forall x\, \neg\pi(x)$ in $L \cup M$. Ma allora $\mathcal{M} \vDash \forall x\, \neg\pi(x)$, e dunque $p(x)$ non è finitamente soddisfacibile in $\mathcal{M}$, e quindi non è un tipo. $\square$

**Definizione 4.25.** Un tipo $p(x)$ di $\mathcal{M}$ con parametri da $A \subset M$ è un tipo di $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$. Se $b \in M$ e $A \subset M$ denotiamo[35]

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(b/A) = \{\varphi(x, a) \mid \mathcal{M} \vDash \varphi(b, a), a \in A\}$$

**Esempio 4.26.** $\mathrm{tp}_{\mathbb{R}}(4/\{\pi\}) = \{4 > \pi, \dots\}$.

**Definizione 4.27.** Se $\kappa$ è un cardinale infinito, $\mathcal{M}$ è *$\kappa$-satura* se, per ogni $A \subseteq M$ tale che $|A| < \kappa$, realizza ogni 1-tipo[36] $p(x)$ parametri da $A$. $\mathcal{M}$ è *satura* se è $|M|$-satura.

Una struttura $\mathcal{M}$ di cardinalità $\kappa$ non può essere $\kappa^+$-satura, basta considerare il tipo

$$\{x \neq c_y \mid y \in M\}$$

**Esempio 4.28.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *non* è $\omega$-saturo, perché non realizza il tipo (senza parametri)

$$p(x) = \{x > 0, x > 1, x > 1 + 1, \dots\}$$

**Esercizio 4.29.** Dimostrare che $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ è saturo.

*Hint.* Per eliminazione dei quantificatori le formule sono equivalenti a combinazioni booleane di uguaglianze e inuguaglianze polinomiali. $\square$

**Definizione 4.30.** Una *catena (elementare) di $L$-strutture* è una successione $\langle \mathcal{M}_i \mid i \in \alpha \rangle$, dove $\alpha$ è un ordinale[37], tale che $\mathcal{M}_i$ è una sottostruttura (elementare) di $\mathcal{M}_{i+1}$, e $\mathcal{M}_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{M}_i$, dove l'unione di strutture è la struttura che ha come dominio l'unione dei domini e come interpretazione dei simboli l'unione delle interpretazioni.

[35] Ad essere precisi dovremmo scrivere $c_a$ invece di $a$.
[36] Ne segue che è vero per tutti gli $n$-tipi.
[37] Si può in generale dare la definizione anche per $\alpha$ ordine totale.

L'unione di una catena di modelli di $T$ non è detto che sia un modello di $T$, ad esempio in $(\mathbb{Z},<)$ non c'è un massimo, ma lo posso scrivere come $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([-n,n],<)$. Questo non può succedere se la catena è elementare (lo vediamo fra poco), o sotto ipotesi più deboli, ad esempio se gli assiomi di $T$ hanno complessità che non supera $\forall\exists$. Ad esempio l'unione di campi è un campo.

**Esercizio 4.31.** Mostrare che se gli assiomi di $T$ hanno complessità al più $\forall\exists$ allora l'unione di una catena di modelli di $T$ è un modello di $T$.

**Teorema 4.32** (Tarski)**.** L'unione di una catena elementare $\langle \mathcal{M}_i \mid i \in \alpha\rangle$ di modelli di $T$ è un modello di $T$.

*Dimostrazione.* Sia per assurdo $\alpha$ il minimo ordinale per cui la tesi è falsa. Mostriamo per induzione su $\psi(\bar{x})$ che per ogni $j$ vale

$$\mathcal{M}_j \vDash \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i = \mathcal{M} \vDash \psi(\bar{a})$$

I passi induttivi coi connettivi sono ovvi. Supponiamo quindi che $\psi$ sia della forma $\exists y\ \varphi(\bar{x},y)$. Se $\mathcal{M}_j \vDash \exists y\ \varphi(\bar{a},y)$, con $\bar{a}\in\mathcal{M}_j$, allora esiste $b\in M_j$ tale che $\mathcal{M}_j \vDash \varphi(\bar{a},b)$ e l'ipotesi induttiva conclude.

Se viceversa $\mathcal{M}\vDash \exists x\ \varphi(x,\bar{a})$, con $\bar{a}\in\mathcal{M}_j$, allora $\exists b\in\mathcal{M}$, e quindi in $\mathcal{M}_k$ per un qualche $k<\alpha$, tale che $\mathcal{M}_k\vDash\varphi(b,\bar{a})$. Ma allora $\mathcal{M}_k\vDash\exists x\ \varphi(x,\bar{a})$, e per minimalità di $\alpha$ abbiamo $\mathcal{M}_j \prec \mathcal{M}_k$. $\square$

La prossima volta dimostreremo che

**Spoiler 4.33.** Ogni teoria $T$ ha un modello $\kappa$-saturo.

# 5 17/03

Una cosa che avevamo notato per RCOF, ma che è vera in generale (e di dimostrazione ovvia)

**Proposizione 5.1.** Se una teoria è model-completa e ha un modello che si immerge in ogni altro suo modello, allora è completa.

## 5.1 Esistenza di modelli $\kappa$-saturi

**Esempio 5.2.** $(\mathbb{R},<)$ è $\omega$-saturo, ma non $\aleph_1$-saturo.

Un tipo con $\aleph_0$ parametri non realizzato è $p(x)=\{0<x<1/n \mid n\in\mathbb{N}\}$. È facile invece vedere, passando per l'EQ, che ogni tipo con un numero finito di parametri è realizzato.

**Teorema 5.3.** Sia $\kappa$ un cardinale infinito. Ogni teoria $T$ ha un modello $\kappa$-saturo $\mathcal{M}$.

*Dimostrazione.* Supponiamo per semplicità $\kappa = \omega$. Vogliamo trovare un modello di $T$ $\omega$-saturo $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$. Consideriamo tutti i possibli 1-tipi $p_i$ con un insieme finito di parametri $A_i$ e li scriviamo *con variabili diverse*, cioè consideriamo

$$\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$$

Ognuno di questi tipi è realizzato in una sovrastruttura elementare di $\mathcal{M}$; anzi, dato che ho usato variabili diverse, possiamo realizzarli tutti simultaneamente: basta infatti notare che $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup \bigcup_i p_i(x_i)$ è coerente per compattezza. Se così non fosse infatti esisterebbero $\varphi_{i_1}(x_{i_1}) \in p_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}(x_{i_k}) \in p_{x_{i_k}}$ tali che

$$\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_{i_1}(x_{i_1}), \dots, \varphi_{i_k}(x_{i_k})\} \vdash \perp$$

E quindi $\mathrm{ED}(\mathcal{M}) \vdash \neg \bigwedge_{j \leq k} \varphi_{i_j}(x_{i_j})$. Dato che le costanti $x_i$ non sono in $L$

$$\mathcal{M} \vDash \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \neg \bigwedge_{j \leq k} \varphi_{i_j}(x_{i_j})$$

ma i $p_i$ sono tipi, e quindi sono finitamente realizzati in $\mathcal{M}$. Esiste dunque $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ che realizza tutti i $p_i$, cioè tutti gli 1-tipi con finiti parametri *da* $\mathcal{M}$ (mentre vorremmo *da* $\mathcal{N}$. Allora definiamo $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}$ e iteriamo la costruzione. $\bigcup_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$ è per Tarski un modello di $T$ ed è $\omega$-satura per costruzione.

Per un generico $\kappa$ la catena dev'essere lunga $\kappa^+$, e non $\kappa$, perché $\kappa$ potrebbe essere singolare (questa struttura verrà $\kappa^+$-satura e a maggior ragione $\kappa$-satura). □

In generale non è assicurata l'esistenza di un modello saturo di cardinalità $\kappa$, ma facendo i conti scopriamo che la struttura così costruita ha cardinalità $2^\kappa$ (a patto di essere sopra la cardinalità del linguaggio, chiaramente), quindi in presenza di GCH le strutture sature di cardinalità $\kappa^+$ esistono.

## 5.2 Applicazioni

Con il concetto di saturazione possiamo rafforzare dei risultati precedenti:

**Teorema 5.4.** Sia $T$ una $L$-teoria.

1. Se per ogni coppia di modelli $\kappa$-saturi $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti ha il va e vieni, allora $T$ ha EQ.

2. Se per ogni coppia di modelli $\kappa$-saturi $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ esiste una famiglia $I \neq \emptyset$ di isomorfismi parziali finiti con il va e vieni, allora $T$ è completa.

*Dimostrazione.* La stessa dei casi precedenti, ma basta rimpiazzare "modello" con "modello $\kappa$-saturo". Presi due modelli, basta considerare due loro estensioni elementari $\kappa$-sature. Queste sono elementarmente equivalenti fra loro per ipotesi e le estensioni sono elementari. □

**Esempio 5.5.** Cerchiamo di assiomatizzare in maniera "sensata" (comprensibile) $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$. Sicuramente ci dobbiamo mettere

- Assiomi degli ordini totali.
- $\forall x\ \exists y\ (y > x \land \neg \exists z\ y > z > x)$ (successore)
- $\forall x\ \exists y\ (y < x \land \neg \exists z\ y < z < x)$ (predecessore)

Viene fuori che questa teoria (ordini lineari discreti) è completa. Esempi di modelli di questa teoria sono $(\mathbb{Z} \times 2, <_{\text{lex}})$ o $(\mathbb{Z}[x], <)$, dove $x > \mathbb{Z}$. In particolare questa teoria, al contrario di DLO, non è $\aleph_0$-categorica; tuttavia è comunque completa. Ricordiamo che

**Definizione 5.6.** $T$ è $\kappa$-categorica se non ha modelli finiti e ne ha uno solo (a meno di isomorfismo) di cardinalità $\kappa$.

Il chiedere "nessun modello finito" serve evitare cose tipo "un modello di $T$ è un ordine lineare denso o ha cardinalità 2" e permette di dimostrare, via Löwenheim-Skolem,

**Proposizione 5.7.** Se $T$ è $\kappa$-categorica, con $\kappa > |L|$, allora è completa.

*Dimostrazione.* Dati $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ , per LS$\uparrow$ (qui si usa il "no modelli finiti") esistono $\mathcal{M}_1 \succ \mathcal{M}$, $\mathcal{N}_1 \succ \mathcal{N}$ di cardinalità $\geq \kappa$. Per LS$\downarrow$ esistono $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_2 \prec N_1$ di cardinalità $\kappa$. Dato che $\mathcal{M}_2 \cong \mathcal{N}_2$ e abbiamo usato solo immersioni elementari, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. □

Ad esempio abbiamo visto che DLO è $\aleph_0$-categorica. Inoltre $\mathrm{ACF}_0$ è $\kappa$-categorica per ogni cardinale $\kappa \geq \aleph_1$; l'unico modello è, a meno di isomorfismo

$$\overline{\mathbb{Q}(x_i \mid i < \kappa)}$$

Questa sarebbe stata un'altra strada per mostrarne la completezza. Non è tuttavia $\aleph_0$-categorica: $\overline{\mathbb{Q}} \not\cong \overline{\mathbb{Q}(x)}$. Una situazione analoga si ha con gli spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ (conta la dimensione).

**Teorema 5.8.** La teoria degli ordini lineari discreti è completa.

*Dimostrazione.* Vorremo usare EQ, ma non è possibile scrivere senza quantificatori gli assiomi sul predecessore e sul successore. Definiamo allora

$$x = s(y) \leftrightarrow x > y \land \neg \exists z\ (x > z > y) \tag{1}$$

Ogni ordine lineare discreto $\mathcal{M}$ si espande ad una $\{<, s\}$ struttura che verifica l'assioma (1). In questo linguaggio però la nostra teoria ha EQ[38] per il prossimo risultato. □

[38] Notare che con il linguaggio cambia anche il concetto di isomorfismo parziale: ad esempio la mappa $(\mathbb{Z}, <) \to (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, <)$ che manda 0 in un elemento di una copia di $\mathbb{Z}$ e 1 in un elemento della copia maggiore è un isomorfismo parziale per $\{<\}$ ma non per $\{<, s\}$

**Teorema 5.9.** La teoria degli ordini lineari discreti ha EQ nel linguaggio $\{<, s\}$.

*Dimostrazione.* Usiamo il Teorema 5.4. Ci basta dunque mostrare che se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono modelli $\omega$-saturi della teoria, allora la famiglia $I$ degli isomorfismi parziali finiti da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ in $\{<, s\}$ ha il va e vieni ed è non vuota. Quest'ultima cosa segue dal fatto che se $a \in M$ e $b \in N$, allora $f(a) = b$ è un isomorfismo parziale (è una funzione non vuota e le sottostrutture generate sono isomorfe). Il fatto che questa famiglia abbia il va e vieni segue dall'$\omega$-saturazione. Siano infatti $f : \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{N}$, $f : \{a_1, \ldots, a_n\} \mapsto \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $a \in M$. Ci sono due casi: se $a = s^n(a_i)$ basta estendere $f$ mandando $a$ in $b = s^n(b_i)$. Infatti devo controllare che se $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ è senza quantificatori allora

$$\mathcal{M} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi(b_1, \ldots, b_n, b)$$

e se rimpiazziamo ogni istanza di $a$ con $s^n(a_i)$ otteniamo una formula con una variabile in meno, che quindi sappiamo già essere vera.

L'altro caso è quello in cui $a$ ha distanza infinita da tutti gli $a_i$ (cioè non è successore o precedecessore iterato di nessuno degli $a_i$). Qui serve la saturazione[39]. Assumiamo $a_1 < a_2, \ldots, < a_n$. Supponiamo che $a_i < a < a_{i+1}$ (il caso in cui è maggiore di $a_n$ o minore di $a_1$ è analogo e anzi più facile). Allora per ogni $n$ abbiamo $s^n(a_i) < a_{i+1}$. Questa formula non menziona $a$, ed essendo vera in $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ è vero l'analogo con i $b_i$, cioè per ogni $n$ vale $\mathcal{N} \vDash s^n(b_i) < b_{i+1}$. Per $\omega$-saturazione allora possiamo trovare un $b$ che è a distanza infinita fra $b_i$ e $b_{i+1}$: basta considerare una realizzazione di

$$p(x) = \{s^n(b_i) < x, s^n(x) < b_{i+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

che è un tipo, di $\mathcal{N}$, cioè vi è finitamente realizzato, perché $b_i$ e $b_{i+1}$ sono a distanza infinita in $\mathcal{N}$. Basta allora usare questo $b$ come immagine di $a$. Per controllare che $f \cup \{(a, b)\}$ è un isomorfismo parziale basta controllare che le formule atomiche vengano preservate, e questo è facile da vedere. □

**Osservazione 5.10.** È facile capire da questa costruzione che un modello $\omega$-saturo di questa teoria è della forma $\mathbb{Z} \times D$, con $D$ ordine denso.

La prossima volta vedremo che

**Spoiler 5.11.** Invece di fare la costruzione a mano potevamo usare questi metodi anche per mostrare che ACF ha EQ. Invece della distanza interviene l'essere radice di polinomi: "distanza finita" e "distanza infinita" diventano "algebrico" e "trascendente". Effettivamente in questo contesto "$\omega$-saturo" vuol dire "grado di trascendenza infinita".

[39]Partendo da $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ho chiari problemi a estendere un isomorfismo parziale in $\mathbb{Z}$, e infatti queste strutture non sono sature.

# 6 19/03

## 6.1 Unicità dei modelli saturi

**Teorema 6.1.** Se $T$ è completa, ha al più un modello numerabile $\omega$-saturo (a meno di isomorfismo).

*Dimostrazione.* Siano $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ modelli $\omega$-saturi di $T$ e fissiamo su $M$, $N$ dei buon ordini di tipo $\omega$. Definiamo induttivamente $a_i \in M$ e $b_i \in N$ tali che per ogni $n$ valga

$$(\mathcal{M}, a_i)_{i<n} \equiv (\mathcal{N}, b_i)_{i<n}$$

cioè $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(b_0, \dots, b_{n-1})$. Per $n = 0$ questo vuol dire $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ma questo è vero perché $T$ è completa e $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sono suoi modelli. Per il passo $n+1$, se $n$ è pari prendo il minimo $c$ secondo il tipo d'ordine fissato di $M \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Vogliamo $d \in N$ tale che

$$(\mathcal{M}, a_i, c)_{i \leq n} \equiv (\mathcal{N}, b_i, d)$$

Se $p(x, \vec{a})$ è il tipo (in $\mathcal{M}$) di $c$ sugli $a_0, \dots, a_{n-1}$, considero

$$p(x, \vec{b}) = \{\varphi(x, \vec{b}) \mid \varphi(x, \bar{y}) \text{ tali che } \mathcal{M} \vDash \varphi(c, \vec{a})\}$$

Questo è un tipo in $\mathcal{N}$ perché, per ipotesi induttiva, per ogni $\varphi \in p$

$$\mathcal{N} \vDash \exists x\ \varphi(x, \vec{b}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \exists x\ \varphi(x, \vec{a})$$

basta allora prendere come $d$ una sua realizzazione, che esiste per $\omega$-saturazione di $\mathcal{N}$.

Per $n$ dispari si fa la cosa simmetrica nell'altro verso. Ora è facile vedere che per costruzione $(\mathcal{M}, \vec{a}, c) \equiv (\mathcal{N}, \vec{b}, d)$. Dunque gli isomorfismi parziali elementari finiti hanno il va e vieni. Avendo esibito una famiglia di isomorfismi parziali non vuota col va e vieni, per numerabilità $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. $\square$

**Esempio 6.2.** Nel caso degli ordini discreti l'unico modello $\omega$-saturo numerabile è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$. Per $\mathrm{ACF}_0$ è $\overline{\mathbb{Q}(x_i \mid i < \omega)}$.

Analogamente, facendo un va e vieni lungo $\kappa$ e unendo ai passi limite, si dimostra che

**Teorema 6.3.** Se $T$ ha un modello saturo di cardinalità $\kappa$, questo è unico a meno di isomorfismi.

**Esercizio 6.4** (Per chi se la sente)**.** Con tecniche analoghe a quelle usate per $(\mathbb{Z}, <)$, cercare di assiomatizzare $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, <)$.

## 6.2 Chiusura algebrica

Abbiamo dimostrato l'EQ sia per $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ che per $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, e avevamo detto che la prima struttura è satura e la seconda no. Queste sono strutture *geometriche*. Per dire che significa diamo la definizione di *chiusura algebrica model-teoretica*:

**Definizione 6.5.** Sia $\mathcal{M}$ una $L$-struttura e $A \subset M$. $b \in M$ si dice *algebrico su* $A$, e si denota $b \in \mathrm{acl}(A)$ se e solo se esiste una $L_A$-formula $\varphi(x, \vec{a})$ *algebrica* tale che $\mathcal{M} \vDash \varphi(b, \vec{a})$, dove *algebrica* significa che $\{x \in M \mid \varphi(x, \vec{a})\}$ è finito.

**Esercizio 6.6.** $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

**Definizione 6.7.** $\mathcal{M}$ è *geometrica*[40] se vale la *proprietà dello scambio di Steinitz*, cioè se $b \in \mathrm{acl}(Ac)$ e $b \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $c \in \mathrm{acl}(Ab)$.

Per queste strutture si riescono a generalizzare concetti come quello di dimensione degli spazi vettoriali o grado di trascendenza dei campi algebricamente chiusi.

**Proposizione 6.8.** In $\mathbb{C}$ (o in generale in un qualsiasi campo algebricamente chiuso), la chiusura algebrica model-teoretica coincide con la chiusura algebrica classica.

*Dimostrazione.* Se $p(x, \bar{y}) \in \mathbb{Q}[x, \bar{y}]$, allora $p(x, \vec{a})$ è un polinomio ed è diverso da 0 (altrimenti non può definire un elemento algebrico). Allora se $p(b, \vec{a}) = 0$ si ha $b \in \mathrm{acl}(\vec{a})$, e quindi la chiusura algebrica classica è inclusa in $\mathrm{acl}(A)$.

Viceversa, sia $b \in \mathrm{acl}(A)$. Allora esiste un insieme finito e $A$-definibile $X$, cioè

$$X = \{x \mid \varphi(x, \vec{a})\}$$

tale che $b \in X$. Per EQ possiamo assumere che $\varphi$ sia senza quantificatori, e questa equivale (sempre) a una formula in forma normale disgiuntiva. Questo vuol dire che

$$X = \bigcup_i \bigcap_j X_{ij}$$

dove gli $i$ e i $j$ spaziano su insiemi finiti e ciascun $X_{ij}$ è della forma $X_p$ o $\neg X_p$, dove $X_p = \{x \mid p(x, \bar{a}) = 0\}$, con $p \in \mathbb{Q}[x, \bar{y}]$. In altri termini, per opportuni polinomi $p_{ij}$ e $q_{ij}$, abbiamo

$$\varphi(x, \bar{a}) = \bigvee_i \bigwedge_j p_{ij}(x, \vec{a}) = 0 \wedge q_{ij}(x, \vec{a}) \neq 0$$

Ora, se $b \in X$, vuol dire che esiste $i$ tale che $b \in \bigcap_j X_{ij} \subset X$, e $X$ è finito. Quindi, dato che gli insiemi definiti da $q_{ij}(x, \vec{a}) \neq 0$ sono cofiniti, esiste $j$

[40] O forse *pregeometrica*, controllare la terminologia.

tale che $X_{ij}$ è finito. Quindi $b \in X_{ij} = X_p$ e $p(b, \vec{a}) = 0$, dunque $b$ è algebrico su $\vec{a}$ nel senso classico. $\square$

**Definizione 6.9.** Una stuttura $\mathcal{N}$ è *minimale* se ogni $X \subset N$ definibile[41] è finito o cofinito. Una teoria è minimale se tutti i suoi modelli lo sono. $\mathcal{N}$ è *fortemente minimale* se ogni $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ è minimale, cioè se la sua teoria è minimale.

**Esempio 6.10.** $\mathbb{C}$ è minimale. Per EQ basta controllarlo sulle formule atomiche e queste definiscono luoghi di zeri di polinomi, che sono finiti, o loro complementari.

Si può dimostrare che in strutture fortemente minimali vale lo scambio:

**Proposizione 6.11.** Se $\mathcal{N}$ è fortemente minimale e $b \in \mathrm{acl}(Ac) \setminus \mathrm{acl}(A)$, allora $c \in \mathrm{acl}(Ab)$.

**Definizione 6.12.** Se $\mathcal{N}$ è fortemente minimale, $a_1, \ldots, a_n \in N$ sono *algebricamente indipendenti* se per ogni $i$

$$a_i \notin \mathrm{acl}(\{a_1, \ldots a_n\} \setminus \{a_i\})$$

Un sottoinsieme $B \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$ è *generante* se $\mathrm{acl}(B) = \mathrm{acl}(\{a_1, \ldots, a_n\})$. È una *base* se è generante e indipendente.

**Teorema 6.13.** Se vale lo scambio, ogni $B$ indipendente massimale è una base. Inoltre tutte le basi hanno la stessa cardinalità.

*Dimostrazione.* Analoga a quanto si fa per gli spazi vettoriali. $\square$

**Definizione 6.14.** Il *grado di trascendenza*, o *dimensione* su $\emptyset$ è la cardinalità di una base. Analogamente si può definire $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$ come il grado di trascendenza di $\mathrm{acl}(-/B)$, dove

$$\mathrm{acl}(v/B) = \mathrm{acl}(\{v\} \cup B)$$

**Esempio 6.15.** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è geometrica. Il controesempio è una variante di $a \equiv b \pmod{c}$. $b$ è algebrico su $a$ e $c$, non lo è solo su $a$ ma sembrerebbe che non valga lo scambio. In realtà non funziona, perché tutti gli elementi di questa struttura sono definibili e quindi algebrici, ma quello che succede è qualcosa del genere.

Possiamo dare un'altra definizione di dimensione. Se quella di prima era per le $n$-uple, questa è per gli insiemi definibili.

[41] Anche con parametri, altrimenti avremmo detto $\emptyset$-definibile. Inoltre la formula definente ha una sola variabile libera, altrimenti avremmo detto $X \subset N^n$.

**Definizione 6.16.** Se $\mathcal{N}$ è geometrica[42] e $\omega$-satura e $X \subset N^k$ è $A$-definibile, la *dimensione* di $X$ è definita come

$$\dim(X) = \max\{\dim(b_1, \ldots, b_k/A) \mid \vec{b} \in X\}$$

Se $\mathcal{N}$ non è $\omega$-saturo devo "leggere" $\vec{b}$ in una $\mathcal{M} \succ \mathcal{N}$ $\omega$-saturo. Cioè invece di $\vec{b} \in X$ dev prendere $\vec{b} \in M$, (o in $X(\mathcal{M})$ pensando un insieme definibile come un funtore che ad ogni struttura associa un sottoinsieme del dominio, non ho capito bene). Se $X$ è una varietà algebrica questa è esattamente la dimensione di Krull.

**Esempio 6.17.** Se $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, consideriamo $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Abbiamo ad esempio $\dim\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ perché ha coordinate algebriche. Invece $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16}}\right)$ ha dimensione 1 perché una coordinata è trascendente ma l'altra è algebrica su di essa. Dunque $X$ ha dimensione 1. $\mathbb{R}$ funziona anche se non è $\omega$-saturo, ma se per esempio prendevo i reali algebrici $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ non funzionava e dovevo andare in un'estensione.

I reali non sono minimali perché posso definire, ad esempio $[0, 1]$, tuttavia sono *o-minimali*, cioè

**Definizione 6.18.** $\mathcal{M}$ è *o-minimale* se ogni $X \subset M$ definibile è unione finita di intervalli[43].

(consideriamo intervalli anche i punti e gli intervalli infiniti).

**Proposizione 6.19.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ è o-minimale.

*Dimostrazione.* Ovvio per EQ. Si può anche mostrare che se $X$ è $A$-definibile gli estremi degli intervalli sono algebrici su $A$. □

**Esempio 6.20.** $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ *non* è né o-minimale né geometrica.

Ad esempio basta prendere l'insieme dei quadrati per falsificare l'o-minimalità, o anche gli interi[44]. In sostanza la maggior parte delle volte le strutture "buone" sono quelle in cui non si riesce a definire $\mathbb{Z}$, altrimenti entra in gioco tutta la macchina di Gödel. Ad esempio in $\mathbb{Q}$ abbiamo che $\{x \mid x^2 < 2\}$ è sì convesso, ma non un intervallo, perché gli "estremi" non stanno nella struttura. Comunque $(\mathbb{Q}, <)$ è o-minimale.

**Spoiler 6.21.** Una struttura o-minimale è geometrica.

[42] Ad esempio se è minimale.

[43] Si suppone che nel linguaggio di $\mathcal{M}$ ci sia un ordine totale $<$. Inoltre si chiede che gli estremi degli intervalli siano in $M$.

[44] Risultato di non facile dimostrazione dovuto a Julia Robinson.

Dunque le strutture o-minimali (ad esempio $\mathbb{R}$) o minimali (ad esempio $\mathbb{C}$) sono sempre strutture geometriche, e quindi posso dare una "buona" nozione di dimensione. In $\mathbb{R}$, ad esempio, abbiamo $\dim \emptyset = 0$, $\dim\{a_1, \ldots, a_n\} = 0$, $\dim(a, b) = 1$. Resta da capire come sono fatti i definibili di $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 6.22.** Se $\mathcal{M}$ è o-minimale e $X \subset M^k$ è definibile, allora è unione finita di *celle*.

Bisogna ovviamente dire cos'è una cella. Quelle incluse in $M$ sono gli intervalli (dimensione 1) o punti (dimensione 0). Quelle incluse in $M^n$ sono grafici di funzioni definibili[45] continue[46] $f: C \to M$, con $C \subset M^{n-1}$ cella, e in tal caso $\dim G(f) = \dim C$ o insiemi di punti fra due grafici di due funzioni $f, g: C \to M$ come prima tali che $f < g$, cioè

$$(f, g)_C = \{(x, y) \mid x \in C, fx < y < gx\}$$

In questo caso $\dim(f, g)_C = \dim C + 1$.

Un altro risultato è

**Teorema 6.23.** Una funzione definibile è monotona a tratti.

Questo ci permette di capire bene come sono fatti gli insiemi definibili. Inoltre è vero che

**Teorema 6.24** (Wilkie)**.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, e^x)$ è o-minimale.

Questa non ha EQ ma è comunque model-completa. Notiamo che se invece di $e^x$ ci mettiamo $\sin x$ la struttura non è più o-minimale ($\sin x = 0\ldots$).

**Problema Aperto 6.25** (Tarski)**.** $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, <, e^x)$ è decidibile?

La risposta affermativa (Macintyre-Wilkie) è implicata dalla

**Congettura 6.26** (Schanuel)**.** Se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, allora $\mathrm{trdeg}(a_1, \ldots, a_n, e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}) \geq n$.

ed è equivalente ad una sua forma debole. Nel caso o-minimale ogni definibile ha un numero finito di componenti connesse. In questo caso si riesce a dare upper bound su quante sono, ma non a dire esattamente quante sono[47].

$(\mathbb{C}, +, \cdot, e^x)$ è indecidibile (ci definisco $\mathbb{Z}$), ma si riesce comunque a dire qualcosa di sensato.

**Spoiler 6.27.** Prossimamente vedremo il rango di Morley.

[45] Cioè il loro grafico è definibile

[46] Per la topologia d'ordine, o meglio per la sua topologia prodotto.

[47] Altrimenti ho risolto il problema aperto. Basta contare le componenti connesse di $\{x \mid \varphi\}$ con $\varphi$ che non dipende da $x\ldots$

# 7 24/03

Libro consigliato: Tent-Ziegler *A Course in Model Theory.*

## 7.1 Precisazioni su dimensione e teorie geometriche

Abbiamo visto

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{C} \models \text{ACF} & \text{minimali} \\ \mathbb{R} \models \text{RCOF} & \text{o-minimali} \end{array}\right\} \to \text{geometrici (buona nozione di dimensione)}$$

Entrambe le strutture sono geometriche anche con la definizione “vera”, anche se abbiamo dato solo la definizione di pregeometria.

Una precisazione sulla Definizione 6.16: se la struttura non è $\omega$-satura, la dimensione va calcolata in un'estensione elementare $\omega$-satura.

Altra precisazione: l'insieme di parametri potrebbe essere definibile, e devo precisare se lo considero come insieme di parametri o come insieme definibile: ad esempio potrei avere $A \subset \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, con $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $A = (0,1)^{\mathbb{R}}$. Quando vado in $\mathcal{N}$ (che è $\omega$ saturo), devo considerare $(0,1)^{\mathcal{M}}$ o $(0,1)^{\mathcal{N}}$? In realtà se prendo $A$ tale che $X$ è $A$-definibile e $\mathcal{M}$ struttura $|A|^+$-satura, la definizione

$$\dim(X) = \max\{\dim(a_1, \dots, a_n/A) \mid \bar{a} \in X\}$$

non dipende dalla scelta di $A$. Ad esempio $X = (a,b) \subset \mathbb{R}$ è definibile su $\{a,b\}$. Abbiamo $\dim(X) = 1$ perché esiste sempre $c \in (0,1)^{\mathcal{M}}$, con $\mathcal{M} \succ \mathbb{R}$ satura, tale che $c \notin \operatorname{acl}(\{a,b\})$, anzi un tale $c$ lo trovo direttamente in $\mathbb{R}$. Se come insieme di parametri avessi scelto tutto l'intervallo chiaramente in $\mathbb{R}$ un $c$ del genere non lo trovo, ma in un'estensione satura sì: infatti anche se l'intervallo si ingrandisce come insieme definibile, non lo fa come insieme di parametri.

Con l'indipendenza dall'insieme di parametri si mostra che

**Proposizione 7.1.** Se $X \neq \emptyset$ è finito, allora $\dim(X) = 0$.

Diamo ora la vera definizione di struttura geometrica:

**Definizione 7.2.** Una struttura è *geometrica* se:

1. Vale lo scambio, in particolare sono vere
   (a) $\dim(\emptyset) = -1$
   (b) $\dim(X) = 0$ se $X$ è finito
   (c) $\dim(X \cup Y) = \max(\dim X, \dim Y)$
   (d) *Additività della dimensione*[48]: se $f\colon X \to Y$ è definibile surgettiva e $\forall y \in Y \ \dim(f^{-1}y) = k$, allora $\dim(X) = \dim(Y) + k$.

[48] A pensarci bene è l'analogo del sommare dimensione di kernel e immagine...

(e) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

2. *Definibilità della dimensione*: se $f\colon X \to Y$ è definibile surgettiva, allora l'insieme

$$X_k = \{x \in X \mid \dim(f^{-1}fx) = k\}$$

è definibile.

Il problema è che l'additività non serve quasi a niente senza definibilità. Infatti a questo punto $f \upharpoonright X_k \to f(X_k)$ ha fibre di dimensione $k$. Questa proprietà può essere espressa in un'altra maniera:

**Definizione 7.3.** $(X_t \mid t \in T)$ è una *famiglia definibile di insiemi definibili* se è definibile $\{(x,t) \mid x \in X_t\}$.

Posso dare equivalentemente la definibilità della dimensione chiedendo che $\{t \in T \mid \dim X_t = k\}$ sia definibile.

Questa parte era abbastanza a titolo di approfondimento, per questo abbiamo sorvolato sulle dimostrazioni.

## 7.2 Indiscernibili

Abbiamo visto esempi di teorie $\aleph_0$-categoriche (DLO) e $\aleph_1$-categoriche ACF$_0$. Qui l'unico modello è $\overline{\mathbb{Q}(x_i \mid i < \aleph_1)}$. Vogliamo in un certo senso generalizzare questo secondo caso. L'idea è che le $\aleph_1$ variabili sono "indistinguibili". Diamo perciò la seguente

**Definizione 7.4.** Sia $\mathcal{M}$ una $L$-struttura. Una famiglia $\langle b_i \mid i \in I\rangle$ di $b_i \in M$ distinti indiciata su $(I,<)$ ordine totale infinito è *order-indiscernibile* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i_1 < i_2 <, \dots, < i_n \in I$ si ha

$$\operatorname{tp}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = \operatorname{tp}(b_1, \dots, b_n)$$

È *indiscernibile* se non conta neanche l'ordine (quindi se tutte le $n$-uple hanno lo stesso tipo).

Questa è la definizione di "indiscernibile su $\emptyset$". Se ci voglio mettere dei parametri la definizione è la stessa aggiungendo i parametri al linguaggio.

**Notazione 7.5.** D'ora in avanti, se non diversamente segnalato, "indiscernibile" significherà "order-indiscernibile".

Nel caso di ACF le variabili $x_i$ sono indiscernibili in tutti e due i sensi.

**Teorema 7.6.** Sia $T$ una teoria coerente con modelli infiniti e $I = (I,<)$ un ordine infinito. Allora esistono $\mathcal{M} \vDash T$ e una famiglia $\langle b_i \mid i \in I\rangle$ di $b_i \in M$ indiscernibile.

**Esempio 7.7.** In $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ gli elementi hanno tutti tipo diverso. Tuttavia posso considerare $T = \mathrm{ED}(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e considerare $\mathcal{N} \succ \mathbb{N}$ dove esiste una famiglia $\langle b_i \mid i < \omega \rangle$ di indiscernibili.

Questa successione di indiscernibili deve essere *spaventosamente crescente.* Ad esempio $b_1$ non può essere $b_0^2$, visto che $(b_0, b_1)$ deve avere tipo uguale a $(b_0, b_2)$, e quindi dovrebbe essere anche $b_2 = b_0^2$.

**Spoiler 7.8.** L'idea ora è —sotto opportune ipotesi— mettersi in un modello con indisceribili e prenderne la sottostruttura generata per avere un modello con "pochi" tipi; è un po' il contrario delle strutture sature. Se la teoria è $\aleph_1$-categorica ci aspettiamo che succeda qualcosa.

Per "montare" un modello con indisceribili useremo il

**Teorema 7.9** (Ramsey (forma semplice))**.** Ogni grafo infinito ha un sottoinsieme $Y$ è che completo o totalmente sconnesso.

Lo spirito è che "il caos assoluto non esiste". In realtà il vero enunciato è

**Teorema 7.10** (Ramsey)**.** Sia[49] $f\colon [X]^n \to k$, con $X$ numerabile. Allora esiste $Y \subset X$ infinito *monocromatico*[50], cioè $f \restriction [Y]^n$ è costante.

*Dimostrazione.* Identifichiamo $X$ con $\mathbb{N}$. Per $n = 1$ è il pidgeonhole. Per $n > 1$, per induzione, per ogni $j \in X = \mathbb{N}$ posso identifcare $[\mathbb{N}]^{n-1}$ con un sottoinsieme di $\mathbb{N}^{n-1}$ di successioni crescenti[51] e considerare la colorazione $C_j\colon [\mathbb{N}]^{n-1} \setminus j+1 \to k$ definita come[52]

$$C_j(\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) = f(j, x_1, \dots, x_{n-1})$$

Per induzione esistono $X_j$ infiniti monocromatici, cioè $C_j \restriction [X_j]^{n-1} = k_j < k$ (costante). Per induzione posso supporre anche $X_{j+1} \subset X_j$. Ora siano $j_0 \in \mathbb{N}$ qualunque e $j_{m+1}$ un punto qualunque di $X_{j_m}$. La successione $\langle k_{j_m} \mid m \in \mathbb{N} \rangle$ è infinita e quindi contiene una sottosuccessione $\langle k_{j_{r_m}}, \mid m \in \mathbb{N} \rangle$ costante (i colori sono finiti). Si verifica che $Y = \{ j_{r_m} \mid m \in \mathbb{N} \}$ è monocromatico. □

Ora possiamo dimostrare l'esistenza di modelli con indiscernibili:

*Dimostrazione del Teorema 7.6.* Pensiamo $I = \omega$ per semplicità, ma la stessa dimostrazione funziona con un ordine totale qualunque. Consideriamo $L' = L(T) \cup \{\underline{b}_i \mid i \in \omega\}$ e aggiungiamo a $T$ gli assiomi

$$\varphi(\underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$$

[49] Cioè una *k-colorazione* dei sottoinsiemi di $X$ di cardinalità $n$.
[50] Altri dicono *omogeneo.*
[51] Ad esempio $\{1, 4, 2\}$ lo identifico con $\langle 1, 2, 4 \rangle$.
[52] In realtà devo evitare che $j$ sia uno degli $x_i$, va aggiustato. Forse basta prendere tutti gli $x_i$ più grandi di $j$, ma andrebbe controllato.

al variare di $\varphi(\bar{x}) \in L$, imponendo che gli indici siano crescenti. Chiamiamo questa teoria $T'$ e mostriamo che è finitamente soddisfacibile. Sia $\Delta(x_1, \ldots, x_k)$ un insieme finito di $L$-formule. Consideriamo $\mathcal{M} \vDash T$ infinito e $\langle a_i \in M \mid i < \omega \rangle$ successione di elementi qualunque. Coloriamo le $k$-uple di questi elementi con $2^{|\Delta|}$ colori. Essenzialmente il colore di una $k$-upla mi dice quali formule verifica, cioè

$$c(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}) = \{\varphi(\vec{x}) \in \Delta \mid \mathcal{M} \vDash \varphi(\vec{a})\} \in 2^{|\Delta|}$$

Per Ramsey esiste $Y$ infinito monocromatico, che per com'è fatta la colorazione vuol dire $\Delta$-indiscernibile. La compattezza conclude, perché una parte finita di $T'$ menziona solo certi $b_i$. Come modello di questa parte finita prendo $\mathcal{M}$ con i $b_i$ interpretati come una successione di elementi di $Y$. □

Abbiamo dimostrato di più: se definiamo

**Definizione 7.11.** Il *tipo di Ehrenfeucht-Mostowski* di una famiglia è

$$\mathrm{EM}(\langle a_i \mid i \in \omega \rangle)_{\mathcal{M}} = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i_1 < \ldots < i_k \; \mathcal{M} \vDash \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})\}$$

otteniamo il risultato più forte

**Teorema 7.12.** Siano $\mathcal{M} \vDash T$, $\langle a_i \mid i < \omega \rangle$ una famiglia di $a_i \in M$ distinti, $(I, <)$ un ordine totale. Allora esiste $\mathcal{N} \vDash T$ con una famiglia $\langle b_i \mid i \in I \rangle$ di indiscernibili tali che

$$\mathrm{EM}(\langle b_i \mid i \in I \rangle)_{\mathcal{N}} \supseteq \mathrm{EM}(\langle a_i \mid i \in \omega \rangle)_{\mathcal{M}}$$

e possiamo inoltre prendere $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ (basta prendere $T = \mathrm{ED}(\mathcal{M})$).

Notiamo che $\mathrm{EM}(\langle b_i \mid i \in I \rangle)_{\mathcal{N}}$ è un tipo "vero" (cioè completo), mentre $\mathrm{EM}(\langle a_i \mid i \in \omega \rangle)_{\mathcal{M}}$ in generale no (potrebbe essere addirittura vuoto).

Questo ci permette di mostrare che esistono modelli "grandi" con "pochi tipi"[53]:

**Teorema 7.13.** Siano $L$ numerabile, $T$ una $L$-teoria, e $\kappa \geq \aleph_1$. Allora esiste $\mathcal{M} \vDash T$ tale che $|M| = \kappa$ e, per ogni $A \subset M$ tale che $|A| \leq \aleph_0$, $\mathcal{M}$ realizza al più $\aleph_0$ 1-tipi[54] $p(x) \in S_1(A)$.

Preliminarmente diamo una

**Definizione 7.14.** Una $L$-teoria $T$ è *di Skolem* se per ogni $L$-formula $\varphi(x, \bar{y})$ esiste un simbolo di funzione $f \in L$ tale che

$$T \vdash \forall x, \bar{y} \; [\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f(\bar{y}), \bar{y})]$$

[53]Questo sembra Lachlan senza l'ipotesi di totale trascendenza. Controllare sugli appunti ufficiali del corso.

[54]$S_1(A)$ è l'insieme degli 1-tipi a parametri da $A$.

In altre parole se esiste $x$ tale che $\varphi(x, \bar{y})$, allora $f(\bar{y})$ è uno di questi $x$. In particolare una teoria di Skolem è anche di Henkin[55]. Ad esempio in $\mathbb{R}$ una funzione che skolemizzerebbe la formula $\exists x\ (y_1 < x < y_2)$ è la media aritmetica. Questa $f$ nel linguaggio non c'è, ma posso aggiungercela: la *skolemizzazione* $\text{SK}(T)$ è ottenuta partendo da $T_0 = T$, definendo

$$T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f_\varphi(\bar{y}, y)) \mid \varphi \in L(T_n))\}$$

dove in $L(T_{n+1})$ ho aggiunto le $f_\varphi$, e prendendo $\text{SK}(T) = \bigcup_{n\in\omega} T_n$. Si dimostra che

**Proposizione 7.15.** Se $\mathcal{M} \vDash T$ esiste un'espansione $\mathcal{M}'$ di $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M}' \vDash \text{SK}(T)$.

La dimostrazione del Teorema 7.13 è posticipata.

# 8 26/03

## 8.1 Rango di Morley

Sappiamo che $\mathbb{C} \vDash \text{ACF}_0$, e abbiamo mostrato via EQ che questa è una struttura minimale. Si può inoltre mostrare che

**Proposizione 8.1.** Se $\kappa \geq \aleph_1$, $\text{ACF}_0$ è $\kappa$-categorica.

La dimostrazione consiste nel mostrare che l'unico modello di cardinalità $\kappa$ è $\overline{\mathbb{Q}(x_i \mid i < \kappa)}$. Sostanzialmente se $\kappa \geq \aleph_1$, la dimensione (grado di trascendenza) del campo coincide con la sua cardinalità, e si può mostrare che la dimensione determina univocamente il modello. Per $\aleph_0$ la dimostrazione non funziona perché posso inserire $n$ trascendenti e la struttura mi viene sempre numerabile.

Si può mostrare inoltre che se $T$ è $\kappa$-categorica esiste una "buona" nozione di dimensione sui modelli di $T$, il *Rango di Morley*, a valori ordinali, che non sempre coincide con la dimensione precedentemente introdotta basandosi sulla chiusura algebrica. Ci serviranno un po' di definizioni e risultati:

**Definizione 8.2.** Se $\kappa \geq |L|$, una $L$-teoria $T$ si dice *$\kappa$-stabile* se, per ogni $\mathcal{M} \vDash T$ e per ogni $A \subset M$ tale che $|A| \leq \kappa$, si ha $|S_1(A)| \leq \kappa$.

Questa notazione sembrerebbe ambigua, perché dovremmo dire $S_1^{\mathcal{M}}(A)$. In realtà

**Proposizione 8.3.** Se $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $A \subset M$ allora $S_1^{\mathcal{M}}(A) = S_1^{\mathcal{N}}(A)$.

[55] Per chi sa cosa vuol dire.

*Dimostrazione.* Un tipo è un insieme di formule finitamente soddisfacibile in $\mathcal{M}$. Dato che $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, la finita soddisfacibilità è la stessa in entrambe le strutture. $\square$

**Notazione 8.4.** In quello che segue assumeremo sempre per comodità $\kappa \geq |L|$, anche se magari non serve.

**Teorema 8.5.** Se $\kappa \geq \aleph_1$, una teoria $T$ $\kappa$-categorica è $\omega$-stabile.

*Dimostrazione.* Se la tesi è falsa, sia $\mathcal{M}$ un modello e $A \subset M$ tale che $|A| = \aleph_0$ e $|S_1(A)| > \aleph_0$. Allora posso realizzare $\aleph_1$ di questi tipi un una struttura $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$. Per Löwenheim-Skolem possiamo assumere[56] $|M| \leq \kappa = |N|$. Per il Teorema 7.13 esiste $\mathcal{M}'$ che realizza al più $\aleph_0$ tipi su $A$, e chiaramente questo modello non può essere isomorfo ad $\mathcal{N}$, violando la $\kappa$-categoricità. $\square$

**Svarione 8.6.** Stabile è in un certo senso equivalente a non poter definire un ordine lineare. Ad esempio DLO non lo è.

Vediamo più precisamente in che senso.

**Definizione 8.7.** $T$ è *totalmente trascendente* se in ogni $\mathcal{M} \vDash T$ non c'è un albero binario[57] infinito di insiemi definibili non vuoti.

Se abbiamo un ordine lineare questa cosa invece c'è: ad esempio in $(\mathbb{R}, <)$ posso considerare $(0,1)$, $(0,1/2)$ e $(1/2,1)$, etc. Invece ad esempio se provo a spezzare una varietà algebrica a un certo punto arrivo alle componenti irriducibili.

**Teorema 8.8.** Se $T$ è $\omega$-stabile è totalmente trascendente.

*Dimostrazione.* Altrimenti esiste $\mathcal{M} \vDash T$ con un albero binario infinito di definibili $\langle X_i \mid i < 2^{<\omega} \rangle$, e avremmo $X_i = \{x \mid M \vDash \varphi_i(x, a_i)\}$. Consideriamo allora l'insieme numerabile $A = \{a_i \mid i \in 2^{<\omega}\}$. Ogni ramo dell'albero, che posso pensare come $f \colon \omega \to 2$, fornisce un tipo incompleto: basta prendere le formule $\varphi_i$ che definiscono gli $X_i$ e considerare

$$\Sigma_f(x) = \{\varphi_{f \restriction n}(x, a_{f \restriction n}) \mid f \restriction n \in 2^n\}$$

che è finitamente realizzato, in sostanza perché $\{x \mid \Sigma_f(x)\} = \bigcap_n X_{f \restriction n}$. Questo può essere esteso a un tipo vero e proprio (completo) $p_f$, e questi tipi sono chiaramente distinti perché gli $X_i$ allo stesso livello nell'albero sono disgiunti. Dunque $|S_1(A)| \geq 2^{\aleph_0}$, contro la stabilità. $\square$

[56] Per la seconda uguaglianza consideriamo la teoria ED($\mathcal{M}$) unita agli $\aleph_1$ tipi che voglio realizzare, ovviamente aggiungendo $\aleph_1$ simboli di costante.

[57] Si intende che i figli sono inclusi nel padre e sono disgiunti.

Abbiamo dunque mostrato[58] "$\kappa$-categorica"$\Rightarrow$ "$\omega$-stabile"$\Rightarrow$ "totalmente trascendente". Mostriamo che "totalmente trascendente"$\Rightarrow$ "esiste il Rango di Morley". In realtà questo esiste sempre, ma può essere infinito; in questo caso non lo è. Serve ancora qualche definizione.

**Definizione 8.9.** Sia $\mathcal{M}$ una $L$-struttura e $X \subset M^n$ definibile. Il *rango di Cantor* di $X$, che può essere un ordinale o $\infty$ (scriviamo $\text{RC}(x) \in \text{ON} \cup \{\infty\}$) è il minimo compatibile con

- $\text{RC}(\emptyset) = -1$
- $\text{RC}(X) = 0$ se $X$ è finito non vuoto
- $\text{RC}(X) \geq 0$ se $X \neq \emptyset$
- $\text{RC}(X) \geq \alpha + 1$ se e solo se esiste una famiglia $\{X_i \mid i < \omega\}$ di definibili disgiunti inclusi in in $X$ e tali che $\text{RC}(X_i) \geq \alpha$
- $\text{RC}(X) \geq \lambda$ se e solo se per ogni $\forall \alpha < \lambda$ $\text{RC}(X) > \alpha$

in altre parole $\text{RC}(X) = \alpha$ se $\text{RC}(X) \geq \alpha$ e $\text{RC}(X) \not\geq \alpha + 1$. Se per ogni $\alpha \in \text{ON}$ si ha $\text{RC}(X) \geq \alpha$ allora $\text{RC}(X) = \infty$.

L'idea è che una cosa di dimensione 2 è una che contiene infiniti pezzi di dimensione 1. Tuttavia questo non funziona bene sempre, ad esempio un intervallo di reali ha rango $\infty$ (provare a pensarci un attimo). In $\mathbb{C}$ invece coincide con la precedente nozione di dimensione. Questa nozione di rango funziona bene in modelli $\omega$-saturi, per cui la "sistemiamo" come segue:

**Definizione 8.10.** Se $\mathcal{M}$ è $\omega$-satura, il *rango di Morley* di $X \subset M^n$ definibile è definito come $\text{RM}(X) = \text{RC}(X)$. Se $\mathcal{M}$ non è $\omega$-satura invece definiamo

$$\text{RM}(X) = \text{RC}(X^{\mathcal{N}}) = \sup_{\substack{\mathcal{N} \succ \mathcal{M} \\ \mathcal{N}\ \omega\text{-satura}}} \text{RC}(X^{\mathcal{N}})$$

Ovviamente c'è da mostrare che questa è una buona definizione, cioè che non dipende dalla scelta del modello $\omega$-saturo $\mathcal{N}$; lo faremo fra poco. Intanto

**Esercizio 8.11.** Se $X \subseteq Y$, allora $\text{RC}(X) \leq \text{RC}(Y)$.

**Lemma 8.12.** $\text{RC}(X \cup Y) = \max\{\text{RC}(X), \text{RC}(Y)\}$.

*Dimostrazione.* Una disuguaglianza segue dall'esercizio precedente. Per l'altra mostriamo per induzione su $\alpha \in \text{ON}$ che

$$\text{RC}(X \cup Y) \geq \alpha \Rightarrow \text{RC}(X) \geq \alpha \vee \text{RC}(Y) \geq \alpha$$

[58] In realtà il terzo è un se e solo se, e il secondo lo è se il linguaggio è numerabile.

da cui segue facilmente la tesi. Il caso $\alpha$ limite è ovvio. Se invece $\alpha = \beta + 1$ e $X \cup Y \supset Z_i$ disgiunti con $i < \omega$ e tali che $\mathrm{RC}(Z_i) \geq \beta$, basta considerare che possiamo scrivere $Z_i = (Z_i \cap X) \cup (Z_i \cap Y)$ e applicare l'ipotesi induttiva, ottenendo che per infiniti $i \in \omega$ deve capitare (WLOG) $\mathrm{RC}(Z_i \cap X) \geq \beta$, e quindi $\mathrm{RC}(X) \geq \beta + 1$. □

Questo rango viene anche definito sulle formule (con parametri), semplicemente come il rango dell'insieme che definiscono, vincolato alla struttura:

**Definizione 8.13.**

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x, a)) = \mathrm{RC}(\{x \mid \mathcal{M} \models \varphi(x, a)\})$$

Se estendo una struttura, il rango di una formula può solo crescere:

**Proposizione 8.14.** Se $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, allora $\mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x, a)) \leq \mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x, a))$.

*Dimostrazione.* In $\mathcal{N}$ ho più parametri, quindi più definibili ed è più facile trovare le famiglie disgiunte che fanno crescere i ranghi. □

La buona definizione del rango di Morley segue dal fatto che il sup nella definizione del rango di Morley è raggiunto se $\mathcal{N}$ è $\omega$-saturo. Inoltre

**Proposizione 8.15.** Data $T$ esiste $\alpha_T \in \mathrm{ON}$ tale che

$$\mathrm{RM}(\varphi(x, a)) = \infty \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\varphi(x, a)) \geq \alpha_T$$

Per mostrare questo ci serve

**Lemma 8.16.** $\mathrm{RM}(\varphi(x, a))$ dipende solo da $\mathrm{tp}(a)$. Più precisamente siano $\mathcal{M}$ $\omega$-satura, $\varphi(x, a)$, $a \in M$, $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ e $b \in N$ tale che $\mathrm{tp}(b) = \mathrm{tp}(a)$ e $\mathcal{N}$ sia $\omega$-satura. Allora

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x, a)) = \mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x, b))$$

dove $a, b, x$ possono anche essere $n$-uple. Postponiamo la dimostrazione.

**Teorema 8.17.** Se $\mathrm{RC}(X) = \alpha$, allora $X$ è unione finita $X = \bigcup_{i=0}^{n} Y_i$ di insiemi definibili "minimali" di rango $\alpha$, dove "minimale" vuol dire non spezzabile in due definibili di rango $\alpha$. Inoltre $n$ è univocamente determinato e si dice *grado di Morley*, e si indica con $\mathrm{MD}(X)$.

*Dimostrazione.* Altrimenti in particolare $X$ non è minimale, e quindi è spezzabile come unione $Y_1 \cup Y_2$ di due insiemi di rango $\alpha$. Uno dei due sicuramente non è minimale. Induttivamente continuiamo a spezzare riuscendo a mostrare che $\mathrm{RC}(X) \geq \alpha + 1$. □

**Corollario 8.18.** $\mathrm{RC}(X) \geq \alpha + 1$ se e solo se per ogni $n \in \mathcal{N}$ esistono $Y_1, \ldots, Y_n$ disgiunti e inclusi in $X$ tali che $\mathrm{RC}(Y_i) \geq \alpha$.

*Dimostrazione.* Una freccia è ovvia. Viceversa se per assurdo $\mathrm{RC}(X) = \alpha$, allora posso scrivere $X = \bigcup_{i=1}^n Z_i$, con $\mathrm{RC}(Z_i) = \alpha$ e gli $Z_i$ minimali. Dati $Y_1$ e $Y_2$, per ogni $i$ abbiamo che $Y_1 \cap Z_i$ e $Y_2 \cap Z_i$ non possono avere entrambi rango $\alpha$ per minimalità di $Z_i$, inoltre uno $Z_i \cap Y_j$ deve per forza avere rango $\alpha$. □

Ora mostriamo il Lemma:

*Dimostrazione del Lemma 8.16.* La cosa difficile è mostrare che

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x,b)) \geq \beta \Rightarrow \mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x,a)) \geq \beta$$

perché allora $\mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x,b)) \leq \mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x,a))$. A quel punto avremo

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x,a)) \leq \beta \leq \mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x,a)) \leq \mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x,b))$$

dove la prima disuguaglianza è la Proposizione 8.14 e per la seconda basta usare quanto stiamo per dimostrare con $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Concentriamoci quindi sulla disugualianza difficile: il caso $\alpha$ limite è ovvio. Se $\mathrm{RC}(\varphi(x,b)) \geq \alpha + 1$ allora per ogni $n$ posso scrivere $\varphi(x,b)$ come unione disgiunta[59] $\bigsqcup_{i=1}^n \theta_i(x,c_i)$, dove $\mathrm{RC}(\theta_i(x,c_i)) \geq \alpha$, con i $c_i \in N$. Ora questi $c_i$ non è detto che siano nella struttura piccola, ma qui ci viene in aiuto l'$\omega$-saturazione. Sappiamo per ipotesi che $(\mathcal{M}, a) \equiv (\mathcal{N}, b)$. Consideriamo $(\mathcal{N}, b, c_1, \ldots, c_n)$. Per saturazione[60] esistono $d_1, \ldots, d_n$ tali che

$$(\mathcal{M}, a, d_1, \ldots, d_n) \equiv (\mathcal{N}, b, c_1, \ldots, c_n)$$

e allora le $\theta_i(x,d_i)$ spezzano $\varphi(x,a)$, e per ipotesi induttiva la tesi vale per le $\theta_i$, cioè $\mathrm{RC}(\theta_i(x,d_i)) \geq \alpha$, per cui $\mathrm{RC}(\varphi(x,a)) \geq \alpha + 1$. □

In sostanza abbiamo mostrato che, in un modello $\omega$-saturo, il rango dipende solo dal tipo dei parametri, e se prendo un modello più grande il rango smette di crescere.

**Corollario 8.19.** se $\mathcal{M}$ è $\omega$-satura, allora

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{M}}(\varphi(x,a)) = \mathrm{RM}(\varphi(x,a)) = \sup_{\mathcal{N} \succ \mathcal{M}} \mathrm{RC}_{\mathcal{N}}(\varphi(x,a))$$

e dipende solo da $\mathrm{tp}(a)$. Dunque ci sono al più $2^{|L| \cdot \aleph_0}$ ranghi.

In particolare questo dimostra anche la Proposizione 8.15. C'è di più:

**Proposizione 8.20.** Se $\mathrm{RM}(\varphi(x,a)) = \infty$ esiste un albero binario di formule con radice $\varphi(x,a)$, e quindi la teoria non è totalmente trascendente.

[59] Si intende disgiunzione di formule che definiscono insiemi disgiunti.

[60] Non ho riportato la verifica, è essenzialmente uguale al va e vieni che si fa per mostrare l'unicità di modelli saturi di cardinalità fissata. Ovviamente qua c'è da fare solo il "vieni".

*Dimostrazione.* Per ipotesi abbiamo $\text{RM}(\varphi(x,a)) = \infty \geq \alpha_T + 1$. Ma allora $\varphi(x,a)$ si spezza in infiniti insiemi di rango di Morley maggiore o uguale di $\alpha_T$, e quindi $\infty$. Iterando otteniamo l'albero binario. □

Quindi precisamente il "esiste il rango di Morley" che abbiamo dimostrato (cioè la conseguenza di "$T$ totalmente trascendente" qualche pagina su) è

$$\forall \mathcal{M} \models T \; \forall a \in M \;\; \text{RM}(\varphi(x,a)) < \infty$$

# 9 31/10

Importante: leggere gli appunti di Berarducci (all'esame in sostanza bisogna dimostrare di averlo fatto).

## 9.1 Esercizi-Temi

Ci sono i seguenti esercizi-temi che pare in qualche modo è una parte dell'esame (non è chiaro come di preciso, ma pare risparmi qualche domanda all'orale. L'importante è leggere gli appunti, se qualcuno non fa esercizi probabilmente ci sarà qualche domanda in più/più pignola sugli stessi). C'è da fare una o due paginette, magari in LaTeX e mandarle a Berarducci. Il libro di riferimento è sempre il Tent-Ziegler.

1. Una $L$-teoria $T$ completa, dove $|L| \leq \aleph_0$, non può avere esattamente due modelli numerabili. (Vaught). Chi fa questo può inserirsi in un contesto più generale:

   **Congettura 9.1** (Vaught)**.** Se una teoria $T$ completa ha meno di $2^{\aleph_0}$ modelli numerabili e ne ha infiniti, ne ha $\aleph_0$?

2. Per quali $\kappa$ esistono modelli $\kappa$-saturi? (Vago)

3. Eliminazione dei quantificatori per $(\mathbb{Z}, +, <)$

4. Eliminazione dei quantificatori per spazi vettoriali[61] o in generale $R$-moduli.

5. Eliminazione dei quantificatori e $\omega$-categoricità per algebre di Boole atomiche o senza atomi (l'unica algebra non atomica numerabile è quella di Lindembaum, vedi appunti del corso di Logica).

6. Mostrare che "minimale" implica la proprietà dello scambio di Steinitz e un po' di cose con la dimensione (qui la dimensione è quella con la chiusura algebrica), ad esempio per i gruppi $\dim {}^{G}\!/_{H} = \dim G - \dim H$

[61] Al prim'ordine uno spazio vettoriale si può vedere o con due sort, o con un unico sort e tanti simboli di funzione 1-aria che rappresentano moltiplicazione per uno scalare.

(questo potrebbe anche essere un punto separato). Un'altra cosa vera nel caso minimale è che se $\mathcal{M} \models T$ e $A \subset M$ allora $\text{acl}(A) \models T$.

7. Il corrispondente per le o-minimali, mostrare che $\dim X$ è il massimo della dimensione delle celle (anche qui la dimensione è quella con la chiusura algebrica) assumendo il Teorema di decomposizione in celle. La cosa da sapere e che si può dare per buona è che, ad esempio in $\mathbb{R}$, ogni cella è in bigezione con $\mathbb{R}^d$, quindi bisogna mostrare che questo ha dimensione $d$. Anche qui far vedere che la dimensione si comporta in modo sensato (dimensione dell'unione è il massino, del prodotto è la somma...)

8. Topologia su $S_n(T)$ e relative proprietà (compattezza, T2,...). Le varie definizioni che si danno sui tipi corrispondono a proprietà topologiche: ad esempio il rango di Morley di un tipo (definito come il minimo rango delle formule che vi appartengono) ha un interpretazione: dato uno spazio compatto T2 si può definire il rango (di Cantor-Bendixon[62]) dello stesso. Si parte dallo spazio $X_0 = X$, poi si fa $X_{n+1} = X_n \setminus$ punti isolati di $X_n$, agli ordinali limite si interseca, e il rango è il minimo ordinale $\lambda$ per cui $X_\lambda = \emptyset$. Dire che $S_n$ è compatto T2 è facile, la cosa più interessante è questa interpretazione topologica dei ranghi.

Nota: per "eliminazione dei quantificatori" si intende "inventatevi il contesto in cui c'è", ad esempio aggiungere il successore per gli ordini discreti. Si intende parlare anche di completezza, assiomi...

## 9.2 Modelli con pochi tipi

**Teorema 9.2.** Sia $T$ una teoria completa. Allora sono equivalenti:

1. $T$ è $\aleph_0$-categorica
2. tutti i modelli numerabili sono $\aleph_0$-saturi
3. per ogni $n$ $|S_n(T)| < \aleph_0$
4. ogni tipo $p \in S_n(T)$ è isolato.

Se non facciamo in tempo a dimostrarlo potrebbe essere un altro esercizio. Comunque:

**Definizione 9.3.** La topologia su $S_n$ è quella la cui base (che è fatta di clopen) è data dai $[\varphi] = \{p \mid \varphi \in p\}$.

I tipi isolati sono importanti perché vengono sempre realizzati. Iniziamo a dare qualche definizione precisa:

[62] O forse Bernstein.

**Definizione 9.4.** $p(x)$ è un tipo (completo) di una $L$-teoria completa $T$ se $T \cup p(x)$ è coerente (e completa) in $L \cup \{x\}$.

**Definizione 9.5.** $p(x)$ è isolato se esiste $\varphi(x) \in p(x)$ tale che per ogni $\theta(x) \in p(x)$ vale $T \vdash \varphi(x) \to \theta(x)$.

**Esempio 9.6.** Il tipo di $\sqrt{2}$ ne(lla teoria de[63])i complessi è isolato da $x^2 = 2$. Invece $\mathrm{tp}_{\mathbb{C}}(\pi)$ non è isolato.

**Lemma 9.7.** Se $p(x) \in S_1(T)$ è isolato, allora è realizzato in ogni $\mathcal{M} \vDash T$.

Ad esempio in ogni campo algebricamente chiuso è realizzato il tipo di $\sqrt{2}$.

*Dimostrazione.* Sia $\varphi(x) \in p(x)$ una formula che lo isola. Dato $T \cup p(x)$ è una $L \cup \{x\}$-teoria coerente, lo è anche $T \cup \{\varphi(x)\}$. Ma dato che $T$ è completa allora $T \vdash \exists x\, \varphi(x)$, altrimenti $\varphi$ non sarebbe coerente con $p$. $\square$

Viceversa vale seguente importantissimo risultato, di cui posticipiamo la dimostrazione:

**Teorema 9.8** (Omissione dei tipi)**.** Sia $T$ completa, e $p(x)$ un tipo parziale[64] non isolato[65] tale che[66] $|p| \leq \aleph_0$. Allora esiste un modello $\mathcal{M}$ che lo omette, cioè per ogni $a \in M$ si ha $\mathcal{M} \nvDash p(a)$.

**Esempio 9.9.** Consideriamo $T = \mathrm{ACF}_0$ e $p(x) = \{f(x) \neq 0 \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$, che è un tipo parziale che in sostanza dice "$x$ è trascendente". Effettivamente $\overline{\mathbb{Q}}$ lo omette.

Questo Teorema è un'altra tecnica, oltre a quella degli indiscernibili, per costruire modelli con pochi tipi.

**Definizione 9.10.** $\mathcal{M} \vDash T$ è primo se per ogni $\mathcal{N} \vDash T$ esiste un'immersione elementare $f\colon \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Osserviamo che se $\mathcal{M}$ realizza $p(x)$ allora anche $\mathcal{N}$ lo realizza: quindi un modello primo, se esiste, realizza meno tipi possibili. Precisamente

**Corollario 9.11.** Se $\mathcal{M}$ è primo realizza solo i tipi isolati.

*Dimostrazione.* Se $p$ non è isolato e $\mathcal{N}$ lo omette, $\mathcal{M}$ non si può immergere elementarmente in $\mathcal{N}$. $\square$

Questo concetto è abbastanza il contrario della saturazione. In particolare i modelli $\kappa$-saturi sono *universali*, nel senso che ci si immerge elementarmente ogni altro modello (di cardinalità sensata). Tuttavia mentre i modelli $\kappa$-saturi esistono sempre, i modelli primi non è detto.

[63] Dire tipo di $\mathbb{C}$ o di $\mathrm{Th}(\mathbb{C}) = \mathrm{ACF}_0$ è la stessa cosa...

[64] Cioè anche non completo.

[65] Per tipi non completi si dice "non finitamente supportato" e si intende che la formula che isola può anche stare fuori dal tipo.

[66] Cioè ha una quantità numerabile di formule.

## 9.3 Morley verso il basso

**Teorema 9.12** (Di Morley verso il basso)**.** Se $T$ (completa, $|L| \leq \aleph_0$) è $\kappa$-categorica per un qualche $\kappa \geq \aleph_1$, allora è anche $\aleph_1$-categorica.

La dimostrazione comincia così (spuntati i punti già visti):

- ✓ Se $T$ è $\kappa$-categorica, allora è $\omega$-stabile, cioè per ogni $\mathcal{M} \models T$ e $A \subset M$ tale che $|A| \leq \aleph_0$, allora $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| \leq \aleph_0$
- ✓ Dato che che $T$ è $\omega$-stabile, allora è totalmente trascendente[67].
- ✓ Dato che $T$ è totalmente trascedente, per ogni $\mathcal{M} \models T$ e $p(x, a) \in L_{\mathcal{M}}$ si ha $\text{RM}(\varphi(x, a)) < \infty$.
- Dato che $T$ è totalmente trascendente "esistono modelli primi".

Per togliere le virgolette ci serve un'altra

**Definizione 9.13.** Siano $\mathcal{M} \models T$ (completa) e $A \subset M$. $\mathcal{M}$ è *primo su $A$* se è un modello primo di $T_A = \text{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$.

In altre parole se $\mathcal{M} \models T$ e $f \colon A \to \mathcal{N}$ è elementare[68] allora si estende a un'immersione elementare, cioè esiste $g \supset f$ tale che $g \colon \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

**Esempio 9.14.** $\overline{\mathbb{Q}}$ è un modello primo di $\text{ACF}_0$. $\overline{\mathbb{Q}(\pi)}$ è un modello di $\text{ACF}_0$ è primo su $\pi$.

Questo formalizza bene il concetto di "modello che contiene $\pi$". È la maniera giusta di dirlo perché evita situazioni imbarazzanti tipo modelli che contengono $\pi$ ma dove $\pi^2 = 2$.

Ora possiamo enunciare in maniera precisa il punto che ci resta da dimostrare per provare Morley verso il basso:

**Lemma 9.15.** Se $T$ (nelle solite ipotesi) è totalmente trascendente, allora per ogni $\mathcal{M} \models T$ e $A \subset M$ esiste un modello primo di $T_A$.

**Svarione 9.16.** In genere uno per stare comodo si mette in un *monster model* $\mathbb{M}$ (classe propria, saturissimo[69], esiste se $T$ è completa), e prende i parametri da lì, assume che "dentro" $\mathbb{M}$ vivano tutti gli altri modelli, ecc. Ad esempio la teoria dei campi reali chiusi ha come modello mostro i numeri surreali, per $\text{ACF}_0$ invece è $\overline{\mathbb{Q}(x_i \mid i \in \text{ON})}$. Questo come campo è isomorfo ai surreali con l'unità immaginaria $i$.

Ci serve anche il seguente risultato, sempre nello spirito del Teorema di Omissione di Tipi:

[67] Visto che il linguaggio è numerabile in realtà è vero anche il viceversa.
[68] Cioè per ogni $a \in A$ vale $\mathcal{M} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(fa)$.
[69] Si intende $\kappa$-saturo per ogni $\kappa$.

**Teorema 9.17** (Lachlan)**.** Se $T$ è totalmente trascendente, $\mathcal{M} \models T$ e $|M| > \aleph_0$, allora per ogni cardinale $\kappa$ esiste $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ tale che $|N| \geq \kappa$ e $\mathcal{N}$ non realizza alcun *nuovo*[70] insieme numerabile $\Sigma(x)$ di $L_M$ formule[71].

Vediamo come si conclude:

*Dimostrazione Morley verso il basso.* Sia per assurdo $T$ una teoria $\kappa$-categorica ma non $\aleph_1$-categorica. Allora $T$ ha un modello $\mathcal{M}$ di cardinalità $\aleph_1$ non saturo, perché i modelli saturi sono tutti isomorfi fra loro. Dunque esiste $A \subset M$ tale che $|A| < \aleph_1$ ed un tipo $p(x) \in S_1(T_A)$[72] non realizzato in $\mathcal{M}$. In quanto $\kappa$-categorica $T$ è totalmente trascendente, e quindi per il Teorema di Lachlan[73] esiste $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ di cardinalità[74] $\kappa$ che continua ad omettere $p$. In particolare $\mathcal{N}$ non è saturo. D'altra parte $T$ è $\kappa$-categorica, e quindi il suo unico modello di cardinalità $\kappa$ è saturo[75]. □

**Teorema 9.18.** Se $T$ è $\omega$-stabile, per ogni $\kappa \geq \aleph_0$ regolare esiste un modello di $T$ saturo di cardinalità $\kappa$.

Ad essere precisi abbiamo usato il fatto che

**Fatto 9.19.** Se $|L| \leq \aleph_0$ e $T$ è $\omega$-stabile, allora $T$ è $\kappa$-stabile per ogni $\kappa$, cioè per ogni $A \subset \mathbb{M}$[76] tale che $|A| \leq \kappa$, allora $|S_1(A)| \leq \kappa$. Questo a sua volta implica che esistono modelli $\kappa$-saturi di cardinalità $\kappa$[77].

**Fatto 9.20.** Se $|L| \leq \aleph_0$ allora $T$ è $\omega$-stabile se e solo se è totalmente trascendente.

Il motivo alla base è che $\omega$-stabile vuol dire "pochi tipi". Se uno si va a riguardare le stime sulla cardinalità nella dimostrazione dell'esistenza di modelli $\kappa$-saturi... Ad esempio vediamo la dimostrazione che se $\kappa$ è regolare e una teoria è $\kappa$-stabile, allora ha un modello $\kappa$-saturo di cardinalità $\kappa$.

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{M}_0 \models T$ tale che $|M_0| < \kappa$. Voglio costruire una catena elementare di modelli, che in teoria dovrebbe essere lunga $\kappa^+$, ma per $\kappa$-stabilità mi basta farla lunga $\kappa$. Dunque una $\langle \mathcal{M}_i \mid i < \kappa \rangle$. Per costruire $\mathcal{M}_1 \succ \mathcal{M}_0$ considero i tipi con parametri da $\mathcal{M}_0$ che per ipotesi sono "pochi": li scriviamo come $\langle p_i(x_i) \mid i \leq \kappa \rangle$ e consideriamo

$$\mathrm{ED}(\mathcal{M}_0) \cup \{p_i(x_i) \mid i \leq \kappa\}$$

[70] Nel senso che non era già realizzato in $\mathcal{M}$.
[71] Cioè tipo parziale numerabile su $M$.
[72] Che è la stessa cosa di $S_1^{\mathcal{M}}(A)$.
[73] Che può essere applicato perché per le ipotesi sul linguaggio e su $A$ abbiamo $|p| \leq \aleph_0$.
[74] C'è da passare da Löwenheim-Skolem, ma tanto andando verso il basso tipi al più ne posso perdere, non guadagnare.
[75] Vedi penultima lezione, Proposizione 12.10
[76] O, se non ci piace il monster model, in un qualche modello.
[77] Per $\kappa$ regolare anche qui.

di cui possiamo prendere un modello $\mathcal{M}_1$ di cardinalità $\kappa$. Ora iteriamo: al solito agli ordinali limite si unisce. Alla fine unisco tutto e ottengo la tesi. $\square$

# 10 02/04

## 10.1 Teorie $\aleph_0$-categoriche

Esempi di teoria $\aleph_0$-categorica sono:

- DLO
- La teoria delle algebre di Boole senza atomi.
- La teoria del Grafo Random.

Cominciamo con una semplice osservazione:

**Lemma 10.1.** Sia $T$ una $L$-teoria completa e $C \subset L$ un insieme di costanti tali che[78]

$$T \vdash \exists x\ \varphi(x) \Rightarrow \exists c \in C\ T \vdash \varphi(c)$$

Allora $T$ ha un modello $\mathcal{M}$ in cui ogni elemento $m \in M$ è l'interpretazione di una costante $c_m \in C$.

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{N} \vDash T$ e $M = \{c^{\mathcal{N}} \mid c \in C\} \subset N$. Vediamo che $M$ può essere espansa a una sottostruttura $\mathcal{M}$. L'unica cosa da mostrare è che $M$ è chiuso rispetto alle funzioni del linguaggio. Se $t$ è un termine chiuso di $T$, basta considerare la formula $\exists x\ x = t$. Per ipotesi esiste $c \in C$ tale che $T \vdash c = t$, e quindi $M$ ha un interpretazione per tutti i termini chiusi.

Mostriamo ora che $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ (e in particolare $\mathcal{M} \vDash T$) usando il criterio di Tarski-Vaught. Se $\mathcal{N} \vDash \exists x\ \theta(x, \bar{a})$ con $\bar{a} \in M^n$, $\bar{a}$ è l'interpretazione di una $n$-upla di termini $\bar{c}$, e dato che $T \vdash \exists x\ \theta(x, \bar{c})$ abbiamo per ipotesi $T \vdash \theta(c', \bar{c})$, e questo conclude. $\square$

Una teoria che *non* rispetta le ipotesi del Lemma è $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, che dimostra "esiste la radice quadrata di due" ma non ha un simbolo per indicarla.

Possiamo ora dimostrare il Teorema di Omissione dei Tipi (Teorema 9.8), che ri-enunciamo in maniera leggermente diversa:

**Teorema 10.2** (Omissione dei Tipi)**.** Siano $T$ una $L$-teoria completa, $|L| \leq \aleph_0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Sigma(x)$ un insieme numerabile di $L \cup \{x\}$-formule tale che $T \cup \Sigma(x)$ è coerente e $\Sigma(x)$ non è finitamente supportato[79], cioè non esiste $\theta(x)$ tale che $T \cup \theta(x)$ è coerente e $T \cup \theta(x) \vdash \Sigma(x)$. Allora esiste $\mathcal{M} \vDash T$ che omette $\Sigma(x)$.

[78] Per chi ha visto queste cose, è praticamente la proprietà di Henkin (dove invece $T$ "vede" l'implicazione). Per teorie complete è equivalente.

[79] Se $\Sigma$ fosse completa sarebbe un tipo principale (isolato).

*Dimostrazione.* Dimostriamo per semplicità notazionale il caso $n = 1$, la dimostrazione del caso generale è identica. Siano $C = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un insieme di simboli di costante non in $L$ e $\langle \sigma_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ una numerazione delle $L \cup C$-formule chiuse. Vogliamo costruire una successione di $L \cup C$-teorie coerenti

$$T = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots \subseteq S_i \subseteq \ldots$$

tale che:

1. $S_i \setminus T$ è finita
2. $S = \bigcup_n S_n$ è completa
3. se $S \vDash \exists x \varphi(x)$ esiste $c \in C$ tale che $S \vDash \varphi(c)$
4. per ogni $c \in C$ esiste $\delta(x) \in \Sigma(x)$ tale che $\neg\delta(c) \in S$

Da questa costruzione segue l'esistenza di un $\mathcal{M} \vDash S$ tale che $M = \{c^{\mathcal{M}} \mid c \in C\}$, e per la quarta richiesta tale $M$ omette $\Sigma(x)$ perché ogni suo elemento è interpretazione di una costante, da cui la tesi.

Occupiamoci quindi della costruzione induttiva di $S_{n+1}$ a partire da $S_n$.

- Sia $\sigma = \sigma_n$. Induttivamente possiamo supporre che $S_n$ sia coerente, e sicuramente almeno una fra $S_n \cup \{\sigma\}$ e $S_n \cup \{\neg\sigma\}$ è coerente (basta prendere un modello di $S_n$ e vedere quale delle due è vera). Sia $S'_n$ una teoria coerente fra queste due. Questo assicura la completezza di $S$.

- Se ora $\sigma = \exists x\ \varphi(x)$ scelgo una costante $c$ non ancora utilizzata (cioè non in $S'_n$) e definisco $S''_n = S'_n \cup \{\exists x\ \varphi(x) \to \varphi(c)\}$. Questa è ancora una teoria coerente[80]. Questo sistema il terzo punto.

- Finora abbiamo aggiunto un numero finito di formule, quindi a meno di congiunzioni possiamo scrivere $S''_n \equiv T \cup \{\psi(\vec{c})\}$. Prendiamo $c' = c_n$. Dato che $\Sigma(x)$ non è finitamente supportato, allora[81] $T, \psi(\vec{c}) \nvdash \Sigma(c')$. Quindi esiste $\delta(x) \in \Sigma(x)$ tale che $T, \psi(\vec{c}) \nvdash \delta(c')$, e quindi $T \cup \{\psi(\vec{c})\} \cup \{\neg\delta(c')\}$ è coerente e possiamo porre $S_{n+1} = S''_n \cup \{\neg\delta(c')\}$. Questo assicura che $\Sigma$ venga omesso.

- Per il primo punto basta notare che ad ogni passo aggiungiamo un numero finito di formule.

□

[80] Per convincersene basta prendere un modello di $S'_n$ e fare i casi a seconda che $\exists x\ \varphi(x)$ sia vera o meno nel modello.

[81] Ad esempio se $T, \psi(c_1, c_2) \vdash \theta(c_2)$ tramite qualche passaggio si mostra che $T \vdash \forall x_2[\exists x_1\ \psi(x_1, x_2) \to \theta(x_2)]$. Se questo succedede per tutte le $\theta \in \Sigma$ dunque avremmo $T, \exists x_1\ \psi(x_1, c') \vdash \Sigma(c')$, ma $\Sigma$ non è finitamente supportato.

## 10.2 Topologia dei tipi

Risolviamo uno degli esercizi dell'altra volta che non era stato preso da nessuno. Ricordiamo che su

$$S_n(T) = \{p(x_1, \ldots, x_n) \mid p(\bar{x}) \text{ tipo completo di } T\}$$

si mette la topologia generata dagli aperti[82] $[\varphi(x)] = \{p(x) \mid \varphi \in p\}$. Chiaramente $[\varphi]^c = [\neg\varphi(x)]$, dunque la base è di clopen e lo spazio è totalmente sconnesso. Questa topologia è T2 perché se $p \neq q$ esiste $\varphi$ tale che $\varphi \in p$ e $\varphi \notin q$, dunque $\neg\varphi \in q$ e $[\varphi], [\neg\varphi]$ separano $p$ e $q$. Inoltre segue dal Teorema di Compattezza(!!) che

**Proposizione 10.3.** $S_n(T)$ è compatto.

*Dimostrazione.* Supponiamo $\emptyset = \bigcap_i [\gamma_i(x)]$. Deve valere $\{\gamma_i(x) \mid i \in I\} \vdash \bot$, altrimenti esisterebbe $q(x) \supseteq \{\gamma_i(x) \mid i \in I\}$ perché ogni teoria coerente è contenuta in una teoria coerente e completa. Per il Teorema di Compattezza esiste $J \subset I$ finito tale che $\bigwedge_{i \in J} \gamma_i$. Ma allora $\bigcap_{i \in J} [\gamma_i] = \emptyset$. Questo è equivalente alla compattezza. □

**Esempio 10.4.** Un tipo è principale (cioè finitamente supportato) se e solo se è isolato, cioè se esiste un aperto che contiene solo lui.

*Dimostrazione.* Se $\varphi$ supporta $p$, allora $p$ è l'unico punto di $[\varphi]$, e viceversa. Questo perché $T \cup \{p\}$ è una teoria completa e non può essere inclusa in due distinte teorie complete. □

**Corollario 10.5.** Se $|S_n(T)| < \aleph_0$ tutti i tipi sono isolati.

*Dimostrazione.* L'unica topologia T2 su un insieme finito è quella discreta. □

**Corollario 10.6.** Se $|S_n(T)| \leq \aleph_0$ i tipi isolati sono densi.

*Dimostrazione.* Più in generale in uno spazio numerabile compatto e T2 i punti isolati sono densi. Assumiamo per assurdo che esista un aperto $A$ senza punti isolati, WLOG preso da una base di clopen[83]. Prendiamo due punti in questo aperto e separiamoli con due clopen disgiunti $B_0, B_1 \subseteq A$. Possiamo iterare questa cosa e costruire un albero binario con $2^{\aleph_0}$ rami distinti. Tuttavia, dato che lo spazio è compatto, l'intersezione di questi rami è non vuota, e quindi lo spazio non può essere numerabile. □

Se ripercorriamo la dimostrazione avendo in mente gli aperti di base di $S_n(T)$ si vede bene che l'intersezione di un ramo può essere estesa a un tipo. Questo può essere pensato un po' come l'analogo del Teorema di Baire.

[82] Se per "completi" intendiamo "completi semanticamente", se intendiamo "completi sintatticamente" ci scriviamo $p \vdash \varphi$, ma il concetto è lo stesso. Per non avere troppi problemi supporremo che nostri tipi siano deduttivamente chiusi.

[83] Non mi è evidente perché si può fare in generale, ma nel nostro caso ce l'abbiamo.

## 10.3 Modelli atomici

**Definizione 10.7.** $\mathcal{M}$ è *atomica* se ogni $\bar{a} \in M^n$ realizza un tipo isolato in $S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$.

**Osservazione 10.8.** Se $\varphi(x, y)$ isola $\operatorname{tp}((a, b)/\emptyset)$, allora $\varphi(x, b)$ isola $\operatorname{tp}(a/b)$.

*Dimostrazione.* Ovvio dalle definizioni. □

**Corollario 10.9.** Se $\mathcal{M}$ è atomica, i suoi elementi hanno tipi con parametri finiti isolati. In altre parole per ogni insieme finito $A \subset M$ ogni elemento di $\mathcal{M}$ realizza un tipo isolato in $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

**Lemma 10.10.** Siano $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n) \equiv (\mathcal{N}, b_1, \ldots, b_n)$ e $c \in M$. Se $\operatorname{tp}(c/a_1, \ldots, a_n)$ è isolato da $\varphi(\bar{a}, x)$, allora esiste $d \in N$ tale che $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n, c) \equiv (\mathcal{N}, b_1, \ldots, b_n, d)$.

*Dimostrazione.* Sia $\Sigma(x, \bar{a}) = \operatorname{tp}(c/\bar{a})$. Allora $\Sigma(x, \bar{b})$ è un tipo[84] di $(\mathcal{N}, \bar{b})$. Ma se $\Sigma(x, \bar{a})$ è isolato da $\varphi(x, \bar{a})$, allora $\varphi(x, \bar{b})$ isola $\Sigma(x, \bar{b})$, e quindi questo tipo è realizzato in $\mathcal{N}$. □

**Corollario 10.11.** Due modelli atomici numerabili di una teoria completa sono sempre isomorfi.

*Dimostrazione.* Gli isomorfismi parziali finiti elementari hanno il va-e-vieni per quanto sopra e ce n'è almeno uno: quello vuoto ($\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$). □

**Teorema 10.12.** Se $T$ è completa e $\mathcal{M} \vDash T$ è atomico numerabile, allora è primo, cioè per ogni $\mathcal{N} \vDash T$ esiste $f\colon \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

*Dimostrazione.* Faccio solo il "va". □

Se il linguaggio è numerabile vale anche il viceversa.

**Teorema 10.13.** Se $|L| \leq \aleph_0$, $T$ è una $L$-teoria e $\mathcal{M} \vDash T$ è primo, allora $\mathcal{M}$ è atomico e numerabile.

*Dimostrazione.* $\mathcal{M}$ è numerabile per LS↓ e atomico per il Corollario 9.11. □

**Teorema 10.14.** Sia $T$ completa con $|L| \leq \aleph_0$. Sono equivalenti:

1. $T$ ha un modello atomico.
2. $T$ ha un modello primo.
3. Per ogni $n$ i tipi isolati sono densi in $S_n(T)$.

*Dimostrazione.*

[84] Altrimenti è finitamente non realizzato, quindi $\mathcal{N} \vDash \neg\exists x\, \sigma(x, \bar{b})$, contro l'ipotesi.

"$2 \Rightarrow 1$" È ovvio.

"$1 \Rightarrow 2$" LS$\downarrow$ (quando scendo al limite calo coi tipi, sicuramente non li aumento).

"$3 \Rightarrow 1$" Segue dalle ipotesi che ogni formula coerente $\varphi(x)$ è implicata in $T$ da una formula completa[85] (basta "pescare" dentro $[\varphi]$ un tipo isolato e poi prendere la formula che lo isola). Sia quindi

$$\Sigma_n(x) = \{\neg\sigma(x) \mid \sigma \text{ completa}\}$$

che se coerente non è finitamente supportato per quanto sopra. Che sia coerente o meno esiste $\mathcal{M}$ che omette $\Sigma$. Questo è atomico, perché se $\bar{a} \in M^n$ allora esiste $\sigma$ completa tale che $\mathcal{M} \vDash \sigma(\bar{a})$.

"$1 \Rightarrow 3$" Se $\mathcal{M}$ è atomico e $\varphi(x) \cup T$ è coerente, allora $T \vDash \exists x\ \varphi(x)$. Dunque esiste $a \in M$ tale che $\mathcal{M} \vDash \varphi(a)$, ma per atomicità esiste $\theta(x)$ tale che $\theta(x) \vdash \mathrm{tp}(a)$, e in particolare $\theta(x) \vdash \varphi(x)$. Quindi $[\varphi]$ contiene il tipo isolato $\mathrm{tp}(a)$.

$\square$

# 11 07/04

## 11.1 Caratterizzazione delle Teorie $\aleph_0$-categoriche

**Notazione 11.1.** A volte vengono chiamate Teorie $\omega$-categoriche.

L'altra volte abbiamo tacitamente fatto uso della seguente

**Osservazione 11.2.** Se $\varphi(x)$ isola $p(x) \in S_n(T)$, allora $T \cup \varphi$ è completa.

la cui dimostrazione è ovvia. Viceversa una formula "completa", nel senso che $T \cup \varphi$ è completa, isola il tipo dato dalle sue conseguenze. Possiamo quindi dare una definizione alternativa di atomicità:

**Definizione 11.3.** $\mathcal{M}$ è atomica se ogni $\bar{a} \in M^n$ soddisfa una formula completa.

**Teorema 11.4** (Caratterizzazione delle teorie $\aleph_0$-categoriche)**.** TFAE:

1. Per ogni $n$ ogni tipo in $S_n(T)$ è isolato.
2. Per ogni $n$ $|S_n(T)| < \aleph_0$.
3. Ogni $\mathcal{M} \vDash T$ è atomico.
4. $T$ è $\aleph_0$-categorica.

[85] Per ACF sarebbe "polinomio minimo = 0" (per gli algebrici, i trascendenti non sono isolati).

Ad esempio in $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ abbiamo che $\mathbb{Q}$ è primo.

*Dimostrazione.*

"$1 \Rightarrow 2$" Uno spazio compatto con tutti i punti isolati è finito.

"$2 \Rightarrow 1$" Uno spazio finito T2 non può avere che la topologia discreta.

"$1 \Rightarrow 3$" È ovvio per definizione.

"$3 \Rightarrow 1$" Un eventuale tipo non isolato sarebbe realizzato in un modello.

"$3 \Rightarrow 4$" I modelli atomici numerabili sono primi, e quindi sono tutti isomorfi.

"$4 \Rightarrow 1$" Un tipo non isolato può essere realizzato in un modello e omesso in un altro. Per averli numerabili basta usare LS$\downarrow$ (espandendo il linguaggio per averne uno che lo realizza perché dobbiamo assicurarci di preservare il tipo quando scendiamo).

□

## 11.2 Modelli costruibili

**Definizione 11.5.** Sia $A \subset \mathcal{M}$. $b \in M$ è atomico su $A$ se e solo se $\mathrm{tp}(b/A)$ è isolato in $S_1(T_A)$, dove $T_A = \mathrm{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ (è facile vedere che la definizione non dipende dalla scelta di $\mathcal{M}$ piuttosto che di un $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$)[86]. In altre parole $b$ realizza una $\varphi(x, \bar{a})$ completa in $T_A$.

**Esempio 11.6.** In $\mathbb{C}$ il tipo di $\sqrt{\pi}$ è atomico su $\pi$ perché isolato da $x^2 = \pi$.

Un tipo algebrico (cioè che contiene una formula algebrica, cioè con un numero finito di soluzioni) è sempre isolato[87] (ad esempio per $\mathbb{C}$ dal polinomio minimo). Il viceversa è falso:

**Esempio 11.7.** Consideriamo $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ e $p(x, y) \in S_2(T)$. Questo sarà isolato da $x < y$, da $x > y$ o da $x = y$. Comunque nessuna delle tre è una formula algebrica.

**Lemma 11.8.** Siano $T$ completa e $A \subset B \subset C \subset \mathcal{M} \models T$. Se $C$ è atomico su $B$[88] e $B$ è atomico su $A$, allora $C$ è atomico su $A$.

[86] O equivalentemente in $S_1^{\mathcal{M}}(A)$.

[87] Basta prendere $\varphi \in p$ algebrica. Se tutti i suoi "zeri" realizzano $p$ siamo apposto. Altrimenti vuol dire che realizzano dei tipi $p_i$ che differiscono da $p$ per certe $\psi_i$ e basta prendere $\varphi \wedge \bigwedge \psi_i$.

[88] Cioè ogni suo elemento lo è.

*Dimostrazione.* Per semplicità notazionale assumiamo $n = 1$. Un $c \in C$ è per ipotesi atomico su $B$. Sia dunque $\varphi(x, \bar{b}) \in L_B$ che isola $\mathrm{tp}(c/B)$ (possiamo pensarla come "polinomio minimo"). Questi $\bar{b} = b_1, \ldots, b_k$ sono per ipotesi atomici su $A$. Quindi esiste $\psi(\bar{y}, \bar{a})$ che isola $\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$. Allora basta considerare

$$\theta(x, \bar{a}) = \exists \bar{y}\ [\psi(\bar{y}, \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y})]$$

e questa isola $\mathrm{tp}(c/A)$, perché se $\mathcal{M} \models \gamma(c)$ (dove $\gamma \in L_A$), allora $\mathcal{M} \models \forall x\ \varphi(x, \bar{b}) \to \gamma(x)$. Ma allora $\forall x\ [\varphi(x, \bar{y}) \to \gamma(x)] \in \mathrm{tp}_{\bar{y}}(\bar{b}/A) = q(\bar{y})$, che è isolato da $\psi(\bar{y}, \bar{a})$, dunque

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{y}\ \big[\psi(\bar{y}, \bar{a}) \to \forall x\ [\varphi(x, \bar{y}) \to \gamma(x)]\big]$$

che giocando coi quantificatori si vede implicare

$$\mathcal{M} \models \forall x\ \big[[\exists \bar{y}\ \psi(\bar{y}, \bar{a}) \wedge \varphi(x, \bar{y})] \to \gamma(x)\big]$$

□

Anche in questo caso ci sono analogie con la chiusura algebrica. Con la stessa idea si dimostra che

**Proposizione 11.9.** Se acl è la chiusura algebrica in senso model-teoretico, $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

**Definizione 11.10.** Una $L$-struttura $\mathcal{M} \models T$ è *costruibile* su $A$ se $\mathcal{M} = A \cup \{b_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$, con $\gamma$ ordinale, e $\mathrm{tp}(b_\beta / A \cup \{b_i \mid i < \beta\})$ è isolato.

In altre parole è costruibile se posso aggiungere un elemento alla volta il cui tipo è isolato sui precedenti.

**Teorema 11.11.** Se $\mathcal{M}$ è costruibile su $A$ è atomico su $A$.

*Dimostrazione.* Mostriamo per induzione su $\alpha$ che tutti gli elementi in $M_\alpha$ sono atomici su $A$. Sia $M_\alpha = A \cup \{b_i \mid i < \alpha\}$, dove $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha$ è limite non c'è niente da mostrare. Se $c \in M_{\alpha+1} = M_\alpha \cup \{b_\alpha\}$, allora o $c \in M_\alpha$ ed è atomico su $A$ per ipotesi induttiva, oppure è $b_\alpha$. Ma allora, dato che i $M_\alpha$ sono atomici su $A$ e $b_\alpha$ è atomico su $M_\alpha$ per ipotesi, per transitività $b_\alpha$ è atomico su $A$. □

**Svarione 11.12.** Questa costruzione sembrerebbe dare anche la primalità: dato $\mathcal{N} \models T_A$ (in particolare $\mathcal{N}$ contiene una copia isomorfa di $A$) basta dire dove mandare i $b_\alpha$, ma questi hanno tutti tipo isolato, e quindi ciascuno di questi tipi è realizzato in $\mathcal{N}$. (ci sarebbe da chiarire per bene cosa succede quando si fanno le $n$-uple, ed effettivamente forse un sottomodello è primo. . . ) Comunque non torna troppo per questioni di cardinalità (ad esempio $L$ numerabile e $A = \emptyset$), quindi lasciamo la questione in sospeso.

Stiamo andando in direzione della dimostrazione del Teorema di Lachlan (Teorema 9.17), che ci serve a costruire modelli grandi con pochi tipi[89].

**Proposizione 11.13.** Se $T$ è di Skolem, allora è model-completa.

*Dimostrazione.* Ovvio dalle definizioni e dal criterio di Tarski-Vaught. □

Inoltre comunque preso $A \subset \mathcal{M} \models T$, se $\mathcal{A}$ è la sua chiusura rispetto alle funzioni di Skolem otteniamo $\mathcal{A} \prec \mathcal{M}$. Con questo si dovrebbe venire a capo dei problemi precedenti...

### 11.3 Di nuovo $\aleph_1$-categoricità

**Teorema 11.14.** Siano $T$ completa e totalmente trascedente e $A \subset \mathcal{M} \models T$. Allora esiste $\mathcal{N}$ costruibile su $A$ tale che $A \subset \mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.

*Dimostrazione.* Se $A \prec \mathcal{M}$ ho finito[90]. Altrimenti per Tarski-Vaught esiste $\varphi(x) \in L_A$ tale che $\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x)$ ma per ogni $a \in A$ vale $\mathcal{M} \models \neg\varphi(a)$. Sia $\varphi(x)$ una tale formula di rango e (a parità di rango) di grado di Morley minimali. Questa formula isola un tipo in $S_1(T_A)$, altrimenti esisterebbe $\theta(x)$ tale che sia $\theta(x)$ che $\neg\theta(x)$ sono coerenti con $T \cup \varphi$, e questo contraddice la minimalità di $\varphi$, perché tali formule non saranno realizzate in $\mathcal{A}$, ma in $\mathcal{M}$ sì. Sia $b_0 \models \varphi(x)$. Abbiamo che $b_0 \notin A$ e $\mathrm{tp}(b_0/A)$ è isolato. Prendo $A' = A \cup \{b_0\}$ e itero (ai passi limite faccio l'unione). A un certo punto mi devo fermare e trovo una $\mathcal{N}$ costruibile. □

## 12 07/05

Ricevmento il venerdì mattina come "laboratorio" per chiarire dubbi, dettagli...

### 12.1 Teorie minimali

Lo svilupperemo meglio la prossima volta, comunque iniziamo a dire qualcosa.

**Teorema 12.1.** Sia $T$ completa e fortemente minimale in $|L| \leq \aleph_0$. Allora, per ogni $\kappa \geq \aleph_1$, $T$ è $\kappa$-categorica.

**Definizione 12.2.** $A \subset \mathcal{M}$ è minimale se i suoi sottoinsiemi definibili sono finiti o relativamente cofiniti[91]. Lo è fortemente se lo stesso è vero in ogni $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$.

[89] "A costruire modelli saturi sono buoni tutti".

[90] Il criterio di Tarski-Vaught funziona anche per insiemi e, se scatta, assicura che il sottoinsieme è una sottostruttura.

[91] Cioè il loro complemento in $A$ è finito.

**Osservazione 12.3.** $X \subset M^n$ definibile è minimale se e solo se $\text{RM}(X) = \text{MD}(X) = 1$.

Avevamo già dimostrato una freccia della seguente caratterizzazione

**Proposizione 12.4.** $T$ è totalmente trascedente se e solo se ogni $A \subset \mathcal{M} \models T$ definibile è tale che $\text{RM}(A) < \infty$.

*Dimostrazione.* La freccia difficile l'abbiamo già vista. Se viceversa ho un albero binario di definibili è chiaro che ho un formula di rango infinito. □

Inoltre in questo contesto gli alberi si "fermano", nel senso che non hanno rami infiniti. Inoltre si "fermano" su singoli punti. Una freccia dell'Osservazione si dimostra notando che se $X = Y \sqcup Z$, per le ipotesi su $X$ almeno uno ha rango zero, e quindi è finito, dunque $X$ è fortemente minimale. Questo funziona per $X \subset M$, per $X \subset M^n$ è un po' più complicato.

Esempi di teorie fortemente minimali sono $\text{ACF}_0$ e la teoria dei $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali[92]. Ricordiamo che in una struttura fortemente minimale $\mathcal{M}$ vale lo scambio di Steinitz. Prendiamo dentro $M$ dei $\vec{b} = \langle b_i \mid i < \alpha \rangle \subset M$ base di trascendenza (cioè nessuno è nella chiusura algebrica degli altri e $M = \text{acl}(\vec{b})$). Per mostrare che esiste si prende un punto a caso, se ne fa la chiusura algebrica, se è tutto abbiamo finito, altrimenti continuiamo (lo scambio serve per lo stesso motivo per cui serve per gli spazi vettoriali). Se questo modello era di cardinalità $\kappa > \aleph_0$, e rifaccio la stessa cosa per un altro $\mathcal{N}$ della stessa cardinalità, è facile mostrare il Teorema 12.1:

*Dimostrazione.* Prendiamo $\langle a_i \mid i < \alpha \rangle$ e $\langle a_i \mid i < \beta \rangle$ basi di trascendenza di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ rispettivamente. È facile vedere che $\alpha = \beta = \kappa$ contando le soluzioni delle formule algebriche (o, in altre parole, $|\text{acl}(B)| = |B| + \aleph_0$). L'isomorfismo è quello che ci si aspetta, e per le verifiche c'è bisogno di usare due fatti:

1. Se $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ completa minimale, $A \subset M$, $B \subset N$ e $f : A \to B$ è elementare bigettiva, allora $f$ si estende a $\bar{f} : \text{acl}(A) \to \text{acl}(B)$ elementare bigettiva.

2. Se $A = \langle a_i \mid i < \kappa \rangle$, con gli $a_i$ indipendenti e $B = \langle b_i \mid i < \kappa \rangle$ con i $b_i$ indipendenti, allora ogni bigezione $f : A \to B$ è elementare.

Che chiaramente concludono. Vediamo come si mostrano:

1. Essenzialmente come l'unicità dei modelli atomici (un elemento algebrico è in particolare atomico): estendo un elemento alla volta sfruttando il fatto che i tipi algebrici in quanto atomici sono sempre realizzati (e che le mappe elementari mandano tipi isolati in tipi isolati). Facendo questa costruzione in va-e-vieni si ottiene la tesi.

[92] I sottospazi vettoriali non sono definibili.

2. Il punto chiave è mostrare che se $\mathcal{M}$ è fortemente minimale per ogni $C \subset M$ esiste un unico $p(x) \in S_1^{\mathcal{M}}(C)$ non algebrico. Come ci si può aspettare pensando a $\mathbb{C}$, questo è

$$p(x) = \{\varphi(x, \vec{c}) \mid \varphi \text{ non è algebrica}\}$$

che è un tipo perché per minimalità esattamente una fra $\varphi$ e $\neg\varphi$ è algebrica. Questo è essenzialmente il caso $\kappa = 1$. Ora che sappiamo che $\mathrm{tp}(a_0) = \mathrm{tp}(b_0)$, per induzione consideriamo $\mathrm{tp}(a_i/a_{<i})$, che è non algebrico per indipendenza, ed è l'unico per minimalità, e analogamente per $\mathrm{tp}(b_i/b_{<i})$. In altre parole stiamo dicendo che $g\colon a_{<i} \to b_{<i}$ è elementare per ipotesi induttiva e vogliamo mostrare che $h\colon a_{\leq i} \to b_{\leq i}$ è ancora elementare. Ma allora[93] $b_i \vDash g(p)$, dove $p = \mathrm{tp}(a_i/a_{<i})$, perché questo è un tipo algebrico per elementarità di $g$, ed è l'unico per minimalità[94], cioè quello di $b_i$. A questo punto che $h$ è elementare è una verifica.

□

Un interessante sottoprodotto della dimostrazione del secondo punto è che

**Corollario 12.5.** Se $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$ minimale, $a \in \mathcal{M}$, $b \in \mathcal{N}$ e $a \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$, $b \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$, allora $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$.

*Dimostrazione.* C'è un solo tipo non algebrico. □

E anzi

**Corollario 12.6.** Se $\langle a_i \mid i < \alpha\rangle$ sono indipendenti in $\mathcal{M}$ e $\langle b_i \mid i < \alpha\rangle$ sono indipendenti in $\mathcal{N}$, allora hanno lo stesso tipo[95].

Questo mostra la $\kappa$-categoricità di $\mathrm{ACF}_0$ "a partire dal nulla", nel senso che questo discorso lo potevamo fare dopo la prima lezione notando che avere l'eliminazione dei quantificatori implica minimalità.

Precisazioni: abbiamo mostrato che le teorie $\omega$-stabili hanno modelli saturi solo di cardinalità regolare[96]. Inoltre i costruibili su $A$ sono sia atomici che primi su $A$ (per la seconda cosa vedere gli appunti di Berarducci).

[93] $g(p)$ è semplicemente $p$ con i parametri cambiati secondo $g$.

[94] Minimalità in $\mathcal{N}$, è qui che serve che $\mathcal{M}$ sia *fortemente* minimale.

[95] In teoria abbia definito i tipi solo per le $n$-uple, ma si possono definire alla stessa maniera per le $\alpha$-uple. Se questo non ci piace è equivalente dire che la mappa $a_i \mapsto b_i$ è elementare.

[96] Già sistemato negli appunti.

## 12.2 Ancora Morley verso il basso

(ripete la dimostrazione già vista) Ci mancano ancora Lachlan, che vedremo poi, e qualche altro dettaglio che sistemiamo ora (stiamo sempre tacitamente assumendo $|L| \leq \aleph_0$)

**Proposizione 12.7.** Se $T$ è totalmente trascendente, allora è $\kappa$-stabile per ogni $\kappa \geq \aleph_0$.

*Dimostrazione.* Se $A \subset \mathcal{M} \models T$, e $p(x) \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$, prendiamo $\varphi_p \in p$ di rango e grado minimi (qui si usa la trascendenza). Allora chiaramente per ogni $\theta \in p$ si ha che $\theta \wedge \varphi_p$ ha stesso rango e grado di $\varphi_p$. È anche vero il viceversa, cioè che se $\theta(x) \wedge \varphi_p(x) \in p$ ed ha stesso rango e grado di $\varphi_p$, allora $\theta \in p$. Questo perché se $\theta \notin p$ per completezza $\neg\theta \in p$, ma per minimalità $\neg\theta \wedge \varphi_p$ ha stesso rango e grado di $\varphi_p$ e questo è assurdo perché ho spezzato una formula minimale in due dello stesso rango e grado. Ma allora basta contare le formule per avere la tesi. Il discorso è sempre analogo ai polinomi minimi, nel senso che questa $\varphi_p$ "determina il tipo", nel senso che c'è una bigezione fra i tipi e queste formule minimali. □

**Corollario 12.8.** Se $T$ è $\omega$-stabile è $\kappa$-stabile per ogni $\kappa \geq \aleph_0$.

*Dimostrazione.* $\omega$-stabilità implica totale trascedenza. □

**Proposizione 12.9.** Sia $T$ $\omega$-stabile e $\lambda$ regolare. Allora $T$ ha un modello saturo di cardinalità $\lambda$, e in generale per ogni $\kappa \geq \lambda$ ha un modello $\lambda$-saturo di cardinalità $\kappa$.

*Dimostrazione.* Costruiamo $\langle \mathcal{M}_i \mid i < \lambda \rangle$ tale che $|\mathcal{M}_i| = \kappa$ e $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ realizza tutti gli 1-tipi su $\mathcal{M}_\alpha$ prendendo

$$\mathcal{M}_{\alpha+1} \models \text{ED}(\mathcal{M}_\alpha) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in \kappa\}$$

e poi uniamo tutto. La regolarità serve ad assicurarci che gli insiemi di parametri grossi meno di $\lambda$ non siano cofinali (e che quindi vengano soddisfatti ad un certo stadio). □

**Proposizione 12.10.** Se $\kappa \geq \aleph_1$ e $T$ è $\kappa$-categorica, tutti i suoi modelli di cardinalità $\kappa$ sono saturi.

*Dimostrazione.* Se $\kappa$ è regolare abbiamo già fatto. Sennò supponiamo $\kappa = \aleph_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} \aleph_{i+1}$, (il $+1$ è per averli regolari), con $\lambda$ ordinale limite. Per il risultati appena visti allora $T$ ha un modello di cardinalità... [lezione interrotta]

[fine della dimostrazione, fatta nella lezione successiva] ... di cardinalità $\aleph_{i+1}$ saturo, ma ne ha anche uno $\aleph_{i+1}$-saturo di cardinalità $\kappa$. Per categoricità questo dev'essere l'unico $\mathcal{M} \models T$ di cardinalità $\kappa$. Ma allora $\mathcal{M}$ è $\aleph_{i+1}$-saturo per ogni $i < \lambda$ e quindi è anche $\aleph_\lambda$-saturo. □

# 13 12/05

[completata la dimostrazione lasciata a metà la scorsa volta, riportata qualche riga su]

## 13.1 Dimostrazione del Teorema di Lachlan

Finalmente dimostriamo Lachlan, che nel dubbio rienunciamo:

**Teorema 13.1** (Lachlan)**.** Se $T$ è totalmente trascendente e $\mathcal{M} \vDash T$ è tale che $|M| \geq \aleph_1$, allora esiste $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ di cardinalità arbitrariamente grande che non realizza alcun insieme numerabile $\Sigma(x) = \{\varphi_n(x) \in L_M \mid n \in \mathbb{N}\}$ di formule[97] che non sia già realizzato in $\mathcal{M}$.

*Dimostrazione.* Diciamo che una formula $\theta$ è "grande" se $\theta(M) = \{a \in M \mid \mathcal{M} \vDash \theta(a)\}$ è non numerabile[98]. Per totale trascendenza esiste una $\theta$ grande minimale, cioè non scrivibile come unione disgiunta $\theta_1(x) \sqcup \theta_2(x)$ grandi disgiunte[99]. Data $\varphi(x) \in L_M$ abbiamo che $\varphi(x) \wedge \theta(x)$ è grande se e solo se $\neg\varphi(x) \wedge \theta(x)$ non lo è. In altre parole

$$p(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \wedge \theta(x) \text{ è grande}\}$$

è un tipo completo e contiene solo formule grandi. $p$ può non essere realizzato in $\mathcal{M}$, ma per motivi di cardinalità ogni suo sottoinsieme numerabile $\{\gamma_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq p(x)$ è realizzato in $\mathcal{M}$, altrimenti avremmo $\theta(M) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \neg\gamma_n(M) \wedge \theta(M)$, che è numerabile. In altre parole, $p$ è numerabilmente realizzato in $\mathcal{M}$. Prendiamo $a \vDash p(x)$ in qualche estensione elementare $\mathcal{N}' \succ \mathcal{M}$, e notiamo che $\mathcal{N}' \neq \mathcal{M}$, perché $p$ non è realizzato in $\mathcal{M}$ in quanto contiene tutte le formule della forma $x \neq m$. Esiste allora

$$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}\langle a\rangle \prec \mathcal{N}'$$

costruibile su $M \cup \{a\}$, perché in una teoria totalmente trascendente esistono modelli costruibili su qualunque insieme di parametri. In particolare $\mathcal{M}\langle a\rangle$ è atomico su $M \cup \{a\}$. Claim: $\mathcal{N} = \mathcal{M}\langle a\rangle$ soddisfa i requisiti della tesi salvo quello di cardinalità. Questo perché tutti gli elementi di questo modello sono "legati" ad $a$, nel senso che per ogni $\sigma(y) \in L_M$ esiste $\sigma^*(x)$ tale che $b \vDash \sigma(y)$ se e solo se $a \vDash \sigma^*(x)$. Prendiamo infatti $\chi(x, y) \in L_M$ tale che $\chi(a, y)$ isoli $q(y) = \mathrm{tp}(b/M \cup \{a\})$, e scegliamo

$$\sigma^*(x) = \forall y\, [\chi(x, y) \to \sigma(y)]$$

[97] Importante: sono a parametri da $\mathcal{M}$, quindi per questioni di cardinalità $\Sigma$ può non essere un tipo completo.

[98] Una formula grande da "troppe" informazioni: è più forte di non essere algebrica.

[99] Una formula grande esiste sempre: $x = x$.

Se $a \vDash \sigma^*(x)$ vuol dire che $\forall y\ [\chi(a, y) \to \sigma(y)]$. Inoltre siccome vale $\chi(a, b)$ vale anche $\sigma(b)$. Viceversa, se $b \vDash \sigma(y)$, allora $\sigma(y) \in \mathrm{tp}(b/M)$, e appartenendo a questo tipo per definizione vale $a \vDash \sigma^*(x)$.

Applichiamo ora questa osservazione alle $\varphi_n \in \Sigma$, cioè consideriamo

$$\Sigma^*(x) = \{\sigma^*(x) \mid \sigma(x) \in \Sigma(x)\}$$

e notiamo che[100] $b \vDash \Sigma(y)$ se e solo se $a \vDash \Sigma^*(x)$, e questo è equivalente a dire che $\Sigma^*(x) \subseteq \mathrm{tp}(a/M) = p$ (che era il tipo "grande" di inizio dimostrazione), che fra le altre formule contiene $\exists y\ \chi(x, y)$ perché[101] $\vDash \chi(a, b)$. Ma ora $\Sigma^*(x) \cup \{\exists y\ \chi(x, y)\}$ è un sottoinsieme *numerabile* di $p(x)$, quindi è realizzato in $\mathcal{M}$ da un certo $a'$. Esiste allora $b' \in \mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \vDash \chi(a', b')$. Ma vale anche $\mathcal{M} \vDash \Sigma^*(a')$, e quindi facendo con $a'$ e $b'$ lo stesso giochetto fatto con $a$ e $b$ abbiamo $\mathcal{M} \vDash \Sigma(b')$, e questo mostra che se $\Sigma$ è realizzato in un'estensione elementare allora è già realizzato in $\mathcal{M}$. Tuttavia la nostra $\mathcal{N} = \mathcal{M}\langle a\rangle$ non è arbitrariamente grande (è addirittura costruibile). Per generarne di grandi a piacere devo iterare la costruzione e unire, cosa possibile perché comunque $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$. Se nel modello costruito ora è realizzato un certo insieme $\Sigma(x)$ numerabile di $L_M$ formule questo sarà realizzato in una sottostruttura, e quindi induttivamente in $\mathcal{M}$. $\square$

[ripete la dimostrazione di Morley verso il basso, ora senza buchi; sistemata dove era stata enunciata la prima volta]

## 13.2 Ancora chiusura algebrica

Abbiamo visto

- EQ per $\mathbb{C}$ "a mano".
- Il va e vieni, relazioni con completezza ed EQ e sue applicazioni a varie teorie.
- Senza entrare troppo nei dettagli, qualche accenno alle teorie fortemente minimali ($\mathbb{C}$) e o-minimali ($\mathbb{R}$)e al fatto che sono entrambe incluse nelle teorie pregeometriche, dove vale lo scambio. In una pregeometria, dati $a_1, \ldots, a_n \in M$ diciamo che sono indipendenti se $a_i \notin \mathrm{acl}(\{a_1, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i\})$.
- Il va e vieni in modelli con una certa saturazione e sue relazioni con EQ.
- Modelli saturi, primi, indiscernibili e

[100] Questo $b$ è un testimone a tutto $\Sigma$, e $\chi$ è scelta di conseguenza.

[101] La notazione $\vDash \varphi(a)$ vuol dire "in un modello grosso abbastanza per contenere i parametri".

- Loro uso per caratterizzare le teorie $\aleph_0$-categoriche
- Teorie $\aleph_1$-categoriche (abbiamo anche accennato che fortemente minimale implica $\aleph_1$-categorica, usando la chiusura algebrica.)

In sostanza non abbiamo approfondito abbastanza la chisura algebrica, per cui diciamo qualcosa in più adesso.

Vedere che nel caso o-minimale vale lo scambio è più facile. Trattando $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ si vede che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definibile è monotona e continua a tratti (i tratti vengono essenzilamente da polinomi, se non sono polinomi sono cose tipo funzioni razionali o radici o cose del genere); questo è in generale vero in strutture o-minimali. Inoltre in questo caso la chiusura algebrica coincide con la chiusura definibile. $a \in \mathrm{dcl}(B)$ se $a \vDash \varphi(x, B)$ e $\varphi$ ha un solo zero. Il trucco è che abbiamo un ordine e possiamo quindi scegliere il minimo zero. In questo caso si ha $a = f(b_1, \ldots, b_n)$, con i $b_i \in B$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definibile. Voglio ricavare $f$ da $\varphi$. Non è detto che se sostituisco $b_1, \ldots, b_n$ con $y_1, \ldots, y_n$ la formula resti algebrica, ma posso definire

$$\varphi'(x, y_1, \ldots, y_n) = \varphi(x, \bar{y}) \wedge \exists! x\ \varphi(x, \bar{y})$$

e $\varphi'$ definisce una funzione $\bar{y} \mapsto x$ e avremo proprio $a = f(\bar{b})$. In sostanza una cosa è nella chiusura definibile se e solo se riesco a scriverla come funzione definibile di qualcosa.

Se ora abbiamo $a \in \mathrm{dcl}(\{b\} \cup C)$ vale dunque $a = f(b)$ con $f(x)$ funzione $C$-definibile. Essendo $f$ un funzione di una sola variabile posso applicare il teorema di monotonia e dire che $f$ è monotona a tratti (e i tratti sono anche in numero finito). Dunque ci sono $c_1 < \ldots < c_k$ tali che $f$ è monotona fra $c_i$ e $c_{i+1}$ supponiamo che sia $b \in (c_i, c_{i+1})$. Allora $b = f^{-1}(a)$ se $f$ è crescente/decrescente, oppure $f$ è costante, ma in quel caso l'ipotesi dello scambio è falsa e quindi è vero a vuoto. Idem se $b$ è un punto di bordo, perché in quel caso è definibile su $C$.

Per i complessi si fa un discorso analogo, qui la cosa importante non è che ogni funzione è monotona a tratti, ma che ogni insieme è finito o cofinito.

Ottenuto lo scambio abbiamo il concetto di indipendenza, e data $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ possiamo considerare una sotto-$k$-upla indipendente massimale $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \rangle$, come negli spazi vettoriali, e tutte le sotto-$t$-uple indipendenti massimali hanno lo stesso $k$, cioè $t = k$. Dunque data $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ esiste un unico $k$ tale che $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{acl}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ come prima, e questo $k$ lo chiamiamo dimensione $\dim(a_1, \ldots, a_n/\emptyset)$ (se la dimensione è 0 vuol dire che $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ e viceversa). In generale posso fare la stessa cosa con un insieme di parametri $B$ invece che con $\emptyset$ inserendolo nel linguaggio. Se ora $X \subset \mathbb{R}^n$ è $A$-definibile, con $A$ finito[102] definiamo $\dim(X) = \max\{\dim((a_1, \ldots, a_n)/A) \mid \vec{a} \in X\}$. Questo con $\mathbb{R}$ funziona, se invece prendessi i reali algebrici non

[102] WLOG, in una formula ci sono finiti parametri.

funzionerebbe (esempio della circonferenza). Quindi la definizione corretta è

$$\dim(X) = \max\{\dim((a_1, \dots, a_n)/A) \mid \vec{a} \in X^{\mathcal{M}'}, \mathcal{M}' \succ \mathcal{M} \ \omega\text{-satura}\}$$

Questo è accennato sugli appunti ed è un possibile esercizio:

**Esercizio 13.2.** Questa definizione non dipende da $A$ (a patto che sia finito).

Quello che succede è che cambiando i parametri magari cambia la dimensione delle singole $n$-uple, ma comunque il modello $\omega$-saturo contiene tanti punti, e alcuni avranno la dimensione giusta. Precisamente servono

**Lemma 13.3.** Se $B \supset A$, $B$ finito, esistono $b_1, \dots, b_n$ tali che $\mathrm{tp}(b_1, \dots, b_n/A) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_n/A)$ (e in particolare $\vec{b} \in X$) e $\dim(b_1, \dots, b_n/B) = \dim(a_1, \dots, a_n/A) = \dim(b_1, \dots, b_n/A)$.

L'ultima uguaglianza vale perché la dimensione dipende solo dal tipo. Ad esempio se $n = 1$ un elemento ha dimensione 1 se è trascendente su $A$, cioè $a \notin \mathrm{acl}(A)$, o in altre parole vale $\neg\varphi(a, \vec{A})$ al variare di $\varphi(x, A)$ formula algebrica (comunque nel caso o-minimale non è più vero che c'è un solo tipo non algebrico per ogni scelta di parametri). In sostanza la chiave per trovare i $b_i$ è realizzare certi tipi.

Supponiamo di voler dimostrare che non esiste $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definibile bigettiva. Per fare questo si mostra che se $f\colon X \to Y$ è definibile allora $\dim f(x) \le \dim(x)$ (basta usare le definizioni). Ad esempio la curva di Peano non è definibile.

**Esercizio 13.4.** Sia $f\colon X \to Y$ definibile, con $X, Y \subset M^n$ in una struttura pregeometrica. Supponiamo che $\forall y \ \dim f^{-1}(y) = k$. Allora se $f$ è surgettiva $\dim Y + k = \dim X$. In particolare $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$, $\dim X \cup Y = \max\{\dim X, \dim Y\}$, $\dim X = 0$ se e solo se $X$ è finito...

Il rango di Morley in genere non ha tutte queste proprietà, ma le ha in strutture fortemente minimali perché coincide con la dimensione.