Importante: in questi appunti il duale di E lo indico con E^*, non con E'. B_E è la palla chiusa (a volte comunque indicata come $\overline{B_E}$) di E, se lo spazio è chiaro B_r è la palla chiusa di raggio r.

Disclaimer

Questi appunti nascono ad uso e consumo dell'autore, che ha TEXati in diretta durante il corso di Istituzioni di Analisi tenuto dal professor Novaga presso l'Università di Pisa nel primo semestre dell'anno accademico 2013/2014, e successivamente integrati/corretti. Come conseguenza possono essere *molto* poco chiari, difettare di qualcosa, eccetera eccetera. Sentitevi liberi di insultarmi, segnalare sviste, errori, imprecisioni, carenze eccetera presso `mennuni@mail.dm.unipi.it`. SPAM: ascoltate `www.radiocicletta.it`

Rosario "Mufasa" Mennuni

Indice

1 30/09

Il testo di riferimento è il Brezis, "Functional Analysis" (la versione in inglese è più aggiornata; meno errori e più esercizi svolti).

Il corso sarà diviso essenzialmente nelle parti

1. Spazi di Hilbert
2. Spazi di Banach
3. Spazi di Sobolev
4. Equazioni alle derivate parziali (abbastanza in parallelo col resto)

1.1 Spazi di Hilbert

Ricordiamo che

Definizione 1.1. Una *norma* su uno spazio vettoriale H è una mappa $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ tale che

1. $\forall x \, \|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \, \forall x \in H \;\; \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Per dare la definizione di *spazio di Hilbert* H, iniziamo a pensare ad uno spazio vettoriale (tipicamente su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) con prodotto scalare (o hermitiano) $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ definito positivo. In H è definita la norma indotta da $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ definita come $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ e la distanza indotta da questa norma.

Per vedere che è una norma passiamo da

Proposizione 1.2 (Cauchy-Schwarz)**.** $\forall x, y \in H \;\; |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Dividendo e usando la linearità è equivalente a

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \leq 1$$

e quindi basta mostrare per i vettori di norma unitaria che $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle \leq 1$, ma

$$0 \leq \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|^2 = \langle \widetilde{x} - \widetilde{y}, \widetilde{x} - \widetilde{y} \rangle = 1 + 1 - 2 \langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle$$

□

Verifichiamo ora che

Proposizione 1.3. $\|x\|$ definita come sopra verifica la disuguaglianza triangolare.

Dimostrazione.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \underbrace{\leq}_{\text{C-S}} \|x\|^2 + \left\|y^2\right\| + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

Spazi del genere hanno chiaramente anche una struttura di spazio metrico indotta dalla norma.

Per gli spazi normati con norma indotta da un prodotto scalare vale

Proposizione 1.4 (Identità del parallelogramma)**.** Per ogni $x, y \in H$ vale $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2}$

Dimostrazione.

$$\frac{1}{4}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle\right) + \frac{1}{4}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle\right) = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2}$$

□

Esercizio 1.5. Una norma verifica l'identità del parallelogramma se e solo se è indotta da un prodotto scalare.

Definizione 1.6. x, y sono ortogonali ($x \perp y$) se $\langle x, y\rangle = 0$.

Definizione 1.7. Uno spazio vettoriale con prodotto scalare completo (rispetto alla convergenza indotta dalla norma) si dice *spazio di Hilbert*.

Ricordiamo che con *completo* si intende che le successioni di Cauchy convergono.

Esempio 1.8. Un po' di esempi di spazi di Hilbert:

- $(\mathbb{R}^2, \langle x, y\rangle)$, con l'usuale prodotto scalare
- ℓ^2, cioè lo spazio

$$\left\{ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\} \qquad \langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

  (a patto di verificare che questo è un prodotto scalare e che lo spazio è completo)

$L^2(\Omega)$, cioè lo spazio[1]

$$\left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili} \,\middle|\, \int_\Omega |f|^2 < +\infty \right\} \qquad \langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f\cdot g$$

sempre a patto di fare le verifiche.

[1] Ad essere precisi sono le classi di equivalenza delle f per la relazione che identifica due funzioni che coincidono fuori da un insieme di misura nulla.

Notiamo che in L^2 Cauchy-Schwarz diventa $\left|\int f \cdot g\right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}$, mentre in ℓ^2 diventa $\sum x_i y_i \leq \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Osserviamo che

Proposizione 1.9. Se $\{x_i\}_{i=1}^N$ è una famiglia finita di vettori a due a due ortogonali vale $\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$

e da questo segue la

Proposizione 1.10 (Disuguaglianza di Bessel)**.** Se $\{x_i\}_{i=1}^N$ è ortonormale, allora

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle x, x_i\rangle^2}_{\text{coeff. di Fourier}} \leq \|x\|^2$$

Su uno spazio di Hilbert H considereremo la topologia indotta dalla distanza, che chiameremo *topologia forte*. Useremo la

Notazione 1.11. $B_\gamma(x) = \{y \mid \|y - x\| < \gamma\}$

In ogni caso non è l'unica topologia interessante in dimensione infinita; vedremo una certa *topologia debole*, quella generata dai semispazi aperti (che è chiaramente meno fine).

1.2 Proiezioni sui convessi

Teorema 1.12. Se $C \subseteq H$ è convesso e chiuso, allora $\exists! w \in C$ di norma minima ed è caratterizzato da

$$\begin{cases} w \in C \\ \forall x \in C \;\; \langle w, x - w\rangle \geq 0 \end{cases}$$

Chiaramente a meno di traslazioni questo vuol dire che

Corollario 1.13. Nei chiusi convessi esiste un punto di distanza minima da un punto dato.

Dimostrazione. Ovvio, traslando. □

Definizione 1.14. Un tale w si dice *proiezione* di x su C.

Potremmo rienunciare il Teorema 1.12 come "Negli spazi di Hilbert c'è proiezione unica sui convessi chiusi". Osserviamo che

Esercizio 1.15. In $\mathbb{R}^N$ vale in un certo senso il viceversa. Cioè se un chiuso ha proiezione unica, allora è convesso.

Problema aperto 1.16. Vale la stessa cosa in un generico spazio di Hilbert?

Se la norma non è indotta da un prodotto scalare non è più detto che sia vero. Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ (la palla non è strettamente convessa, cioè trovo combinazioni convesse di punti sul bordo che sono sul bordo).

Ora dimostriamo il Teorema 1.12

Dimostrazione.

- (Unicità) Se $w_1, w_2 \in C$ sono di minima norma $D = \|w_1\| = \|w_2\|$, definisco $w_3 = \frac{w_1+w_2}{2}$ che sta in C perché convesso. Per l'identità del parallelogramma ho

  $$D^2 \leq \left\| \frac{w_1 + w_2}{2} \right\|^2 = \underbrace{\frac{\|w_1\|^2}{2} + \frac{\|w_2\|^2}{2}}_{=D^2} - \left\| \frac{w_1 - w_2}{2} \right\|^2$$

  ed è immediato da questa disuguaglianza che $w_1 = w_2$.

- (Esistenza) La norma $\|\cdot\|$ è continua secondo la topologia indotta dalla sua distanza indotta. Sia $x_n \in C$ tale che $\|x_n\| \to \inf_{x \in C} \|x\| = D$. Verifichiamo che x_n è di Cauchy:

  $$0 \leq \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 = \frac{\|x_n\|^2}{2} + \frac{\|x_m\|^2}{2} - \underbrace{\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2}_{\in C} \leq \frac{\|x_n\|^2}{2} + \frac{\|x_m\|^2}{2} - D^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

  Ma allora $\exists x \in C$ tale che $x_n \to x$ e quindi $\|x_n\| \to \|x\| = D$.

- (Caratterizzazione) Se w è di minima norma

  $$\forall t \in (0,1)\ D^2 = \|w\|^2 \leq \|w + t(x-w)\|^2 = \|w\|^2 + 2t \langle w, x-w \rangle + \|x-w\|^2 t^2$$

  e quindi per ogni $t \in (0,1)$

  $$\langle w, x-w \rangle \geq -\|x-w\|^2 \frac{t}{2}$$

  Per l'altra freccia se $C \ni w$ verifica $\forall x \in C\ \ \langle w, x-w \rangle \geq 0$

  $$\|x\|^2 = \|w + x - w\|^2 = \|w\|^2 + \|x-w\|^2 + 2\langle w, x-w \rangle \geq \|w\|^2$$

  e quindi w è di minima norma.

□

Definizione 1.17. Se V è un sottospazio vettoriale chiuso $P(x) \in V$ che minimizza la distanza da x si chiama *proiezione ortogonale* di x su V ed è caratterizzato da

$$\forall y \in V\ \ \langle P(x) - x, y \rangle = 0$$

Osserviamo anche che

Proposizione 1.18. Se V è un sottospazio vettoriale chiuso, allora $V = H$ oppure $V^\perp \neq \{0\}$.

Questo rimarcare "chiuso" è perché in dimensione infinita potrei avere sottospazi non chiusi (ad esempio quello delle successioni definitivamente 0 in ℓ^2, che è denso).

2 02/10

Esercizio 2.1. Sia $C \subseteq H$ un convesso chiuso e $P\colon H \to C$ la relativa proiezione. P è 1-Lipschitziana.

Dimostrazione. Dati $x, y \in H$, per il terzo punto del Teorema 1.12 abbiamo che $\langle Py - Px, Px - x\rangle \geq 0$ e $\langle Px - Py, Py - y\rangle \geq 0$. Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Px - Py, Py - y + x - Px\rangle = \langle Px - Py, (x - y) - (Px - Py)\rangle \\ &= -\|Px - Py\|^2 + \langle Px - Py, x - y\rangle \end{aligned}$$

e quindi per Cauchy-Schwarz

$$\|Px - Py\|^2 \leq \langle x - y, Px - Py\rangle \leq \|Px - Py\| \, \|x - y\|$$

□

2.1 Spazi duali

Definizione 2.2. Se H è uno spazio di Hilbert, lo *spazio duale* di H è lo spazio vettoriale

$$H^* = \{F\colon H \to \mathbb{R} \text{ lineari e continue}\}$$

Notiamo che $F\colon H \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se[2] $x_n \to x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$.

Proposizione 2.3. $F\colon H \to \mathbb{R}$ lineare è continua se e solo se è limitata, cioè se $\exists c > 0\ \forall x \in H\ \ |F(x)| \leq c\,\|x\|$ (in particolare se F è continua è anche Lipschitziana).

Dimostrazione. Per esercizio, è importante per lo scritto. "$\Leftarrow$" si fa per $x = 0$, "$\Rightarrow$" si fa per assurdo. □

Esempio 2.4. $\forall x \in H\ F_x(y) = \langle x, y\rangle \in H^*$.

Teorema 2.5 (Riesz). $\forall F \in H^*\ \exists x \in H\ F = F_x$

Questo induce una bigezione fra H e H^*, e munisce H^* di una struttura di spazio di Hilbert, dove

$$\|F_x\| = \|x\| = \max_{\|y\| \leq 1} F_x(y)$$

[2] Se non sbaglio si dovrebbe usare il fatto che gli spazi metrici sono a base locale numerabile.

2.2 Spazi di Banach

Definizione 2.6. Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo.

Esempio 2.7. Sono spazi di Banach:

- Tutti gli spazi di Hilbert.
- $\forall p \in [1, +\infty]$, lo spazio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, dove $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ e $\|x\|_\infty = \max |x_i|$.
- $\forall p \in [1, +\infty]$, lo spazio $\ell^p = \left\{ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum |x_i|^p < \infty \right\}$ con le norme analoghe a quelle di sopra.
- $L^p(\Omega) = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili } \mid \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$, con la norma $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (ad essere precisi sono classi di equivalenza di funzioni).
- $L^\infty(\Omega)$, cioè le q. o. limitate con la norma del sup (fuori da un insieme di misura nulla) (anche qui sono classi di equivalenza).
- Dato $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, lo spazio $C(K)$ delle $f \colon K \to \mathbb{R}$ continue, con la norma $\|f\|_{C(K)} = \max_{x\in K} |f(x)|$, quella a cui è associata la convergenza uniforme.

Inoltre su $C^k(\Omega)$, con Ω aperto, possiamo dare una struttura di *spazio di Fréchet*, con una famiglia di norme, o la struttura più debole di *spazio localmente convesso.*

Esattamente come negli Hilbert si può definire lo *spazio duale* di un Banach.

Proposizione 2.8. Sia B uno spazio di Banach. B^* è uno spazio di Banach con la norma $\|F\|_{B^*} = \sup_{\|x\|_B \le 1} F(x)$.

Dimostrazione. Mostriamo la completezza. Data F_n di Cauchy, $\forall x$ fissato $F_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, e quindi $\forall x$ $F_n(x) \to F(x)$. F è lineare perché il limite è lineare. Inoltre

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n, m \ge n_\varepsilon \;\; |F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon$$

Quindi $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ ed F è continua (via test sulle successioni). $\square$

Nei Banach non c'è nessuna bigezione naturale fra uno spazio e il suo duale.

Esercizio 2.9. Capire chi sono i duali degli spazi visti prima.

Esempio 2.10. $(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Tuttavia $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ ma $(L^\infty(\Omega))^* \neq L^1(\Omega)$. Osserivamo anche che per $1 < p < \infty$ lo spazio L^p è *riflessivo*, cioè[3] $(L^p)^{**} = L^p$. Per quanto visto prima gli spazi di Hilbert sono riflessivi.

Osserviamo che, dato che ad una norma è associata una palla unitaria, che è convessa (via disuguaglianza triangolare) e simmetrica, possiamo pensare che dare una norma ad uno spazio vuol dire munirlo di un convesso chiuso simmetrico. Dato $0 \in C \subseteq B$ convesso simmetrico a parte interna non vuota posso associargli il suo *giogo*, $p_C(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \; x \in \lambda C\}$.

2.3 Il Teorema di Hahn-Banach

Teorema 2.11 (Hahn-Banach)**.** Siano E uno spazio vettoriale e $p\colon E \to \mathbb{R}$ una *seminorma*, cioè una mappa tale che

$$\begin{cases} \forall \lambda > 0 \; \forall x \in E \; p(\lambda x) = \lambda p(x) \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{cases}$$

e siano $G \subset E$ un sottospazio e $g\colon G \to \mathbb{R}$ lineare e tale che $\forall y \in G \; g(y) \leq p(y)$. Allora esiste $f\colon E \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\big(\forall y \in G \; f(y) = g(y)\big) \wedge \big(\forall x \in E \; f(x) \leq p(x)\big)$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$P = \big\{h\colon D_h \to \mathbb{R} \text{ lineari}, G \subseteq D_h \subset E, h_{|G} = g, h \leq p\big\}$$

con la struttura di poset data dalla relazione $h_1 \leq h_2$ se h_2 estende h_1. Data una catena $H \subseteq P$, la sua unione è un maggiorante e quindi posso applicare Zorn e trovare in P un elemento massimale $f\colon D_f \to \mathbb{R}$. Mostriamo che $D_f = E$. Se $x_0 \in E \setminus D_f$. Allora definiamo, per un $\alpha \in \mathbb{R}$ che fisseremo in seguito,

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

definita su $\mathrm{Span}(D_f, x_0) = D_h \supsetneq D_f$. Ora $\forall x \in D_f, \forall t \in \mathbb{R}$, vogliamo che valga

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$$

per $t \neq 0$ (altrimenti è ovvio) basta mostrare

$$f\left(\frac{x}{|t|}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{x}{|t|} + \frac{t}{|t|}x_0\right)$$

Questo ci dà delle condizioni su α, che però possiamo scegliere. Considerando i casi $t > 0$ e $t < 0$ abbiamo che deve valere

$$\sup_y f(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq \inf_x -f(x) + p(x + x_0)$$

[3]Forse più che "=" sarebbe più preciso scrivere "$\cong$".

Per mostrare l'esistenza di un tale α è ora sufficiente notare che

$$\forall x, y\ f(x)+f(y) = f(x+y) \le p(x+y) = p(x+y+x_0-x_0) \le p(x+x_0)+p(y-x_0)$$

da cui

$$f(y) - p(y - x_0) \le -f(x) + p(x + x_0)$$

e questo conclude. □

Corollario 2.12. Se E è uno spazio vettoriale normato, G è un suo sottospazio, $g\colon G \to \mathbb{R}$ è lineare e $\forall x \in G$ si ha $g(x) \le C\,\|x\|$, allora esiste $f\colon E \to \mathbb{R}$ lineare che estende g e tale che $\forall x \in E\ f(x) \le C\,\|x\|$.

Corollario 2.13. Se $x \in E$ spazio vettoriale normato, allora $\exists f \in E^*$ tale che $\|f\|_{E^*} = \|x\|_E$ e[4] $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$

Dimostrazione. Siano $G = \mathbb{R}_x = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$, $g\colon G \to \mathbb{R}$ definita come $g(tx) = t\,\|x\|^2$. Ora ponendo $p(y) = \|y\|\,\|x\|$ abbiamo $g(tx) \le p(tx)$. Sia quindi $f\colon E \to \mathbb{R}$ che estende g ed è dominata da p. Abbiamo $f(x) = g(x) = \|x\|^2$ e $f(y) \le \|x\|\,\|y\|$, quindi $\|f\|_{E^*} = \sup_{\|y\|_E \le 1} f(y) \le \|x\|$, e per l'altra disuguaglianza basta prendere $\frac{x}{\|x\|}$. □

Quindi, dato E spazio vettoriale normato, posso associare ad x un $F_x \in E^*$ tale che $\|F_x\|_{E^*} = \|x\|$ e $F_x(x) = \|x\|^2$. Se E è di Hilbert una (l'unica) tale mappa è $x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$. Se E non è Hilbert, F_x può non essere unico.

Esercizio 2.14. Capire chi sono le F_x in $\mathbb{R}^2$ con la norma $|x_1| + |x_2|$.

3 03/10 - Esercitazione

A $C^1(\bar{\Omega})$ si può dare struttura di spazio di Banach con le norme equivalenti

$$\|f\|_\infty + \sum \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty \qquad \max\left\{\|f\|_\infty, \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty\right\}$$

Esempio 3.1. $T\colon C^0[-1,1] \to \mathbb{R}$ definito come $T(f) = f(0)$ ha norma 1. $S\colon C^0[-1,1] \to \mathbb{R}$ definito come $S(f) = \int_0^1 f$ è chiaramente continuo.

Esercizio 3.2. Sia $X = \left\{f \in C^0[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0\right\}$. Mostrare che

1. X è completo
2. S definito come sopra ha norma 1.
3. Nell'analogo di X per le funzioni C^1 con relativa norma S è ancora continuo. Calcolarne la norma.

[4] Con $\langle f, x\rangle$ si intende $f(x)$.

4 07/10 - Esercitazione

Consideriamo gli spazi

$$\ell^p = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

con $p \geq 1$, oppure

$$\ell^\infty = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

Questi sono spazi vettoriali ∞-dimensionali[5], su cui mettiamo la norma

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Questi spazi sono comodi per cucinare controesempi.

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Hölder)**.** Siano $|a_n|_{n\in\mathbb{N}}$, $|b_n|_{n\in\mathbb{N}}$, $p \geq 1$ e q tale che p e q sono *coniugati*, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (con la convenzione $q = \infty$ per $p = 1$). Allora

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n \cdot b_n| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dove nel caso $p = 1$ questa va letta come

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p, \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q < \infty$. Inoltre possiamo assumere $p > 1$, perché il caso $p = 1$ si fa facilmente vedendo che è vera per tutte le somme parziali. A meno di dividere, supporremo anche che $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q = 1$.

Per concavità del logaritmo, vale

$$\forall x, y \;\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \right) \geq \frac{1}{p}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y)$$

Considerando la disuguaglianza precedente con $x = |a_n|^p$ e $y = |b_n|^q$ e passando all'esponenziale otteniamo

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; |a_n b_n| \leq \frac{1}{p}|a_n|^p + \frac{1}{q}|b_n|^q$$

ma

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

[5] Vedi Proposizione 4.5.

Corollario 4.2. Se $a \in \ell^p$ $b \in \ell^q$, con p, q coniugati, la serie prodotto (termine a termine) è in ℓ^1.

Corollario 4.3 (Disuguaglianza di Minkowski)**.** $\forall a, b \in \ell^p$, vale la disuguaglianza triangolare per $\|\cdot\|_p$.

Dimostrazione. Per esercizio. Soluzione: lo facciamo per L^p, il risultato su ℓ^p segue considerando la misura che conta i punti.

Per convessità di $x \mapsto x^p$ abbiamo $\left|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$, quindi $|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ e L^p è chiuso per somma. Ora, usando la disuguaglianza triangolare e Hölder (alla seconda riga), abbiamo

$$\int |a+b|^p = \int |a+b|\,|a+b|^{p-1} \leq \int (|a| + |b|)\,|a+b|^{p-1}$$

$$= \int |a|\,|a+b|^{p-1} + \int |b|\,|a+b|^{p-1} \leq (\|a\|_p + \|b\|_p) \left(\int |a+b|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Cioè $\|a+b\|_p^p \leq \|a+b\|_p^{p-1} (\|a\|_p + \|b\|_p)$, che è la tesi dividendo per $\|a+b\|_p^{p-1}$. □

Da quanto detto segue che ℓ^p è una norma.

Esercizio 4.4 (da fare almeno una volta nella vita)**.** Mostrare che $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach.

Proposizione 4.5. ℓ^p è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Dimostrazione. Basta considerare le indicatrici dei singoletti. □

Negli spazi di Banach ∞-dimensionali le palle non sono *mai* a chiusura compatta. Questo lo dimostreremo in seguito, per ora ci accontentiamo di un esempio.

Proposizione 4.6. Per ogni $p \in [1, \infty]$, la successione $\left\{e^j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$, dove e_j è l'indicatrice di $\{j\}$, non ha alcuna sottosuccessione di Cauchy in ℓ^p.

Dimostrazione. Basta notare che se $i \neq j$, allora $\left\|e^i - e^j\right\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ ($= 1$ nel caso $p = \infty$). □

Esercizio 4.7. Per $1 \leq p \neq \infty$, data $a \in \ell^p$, mostrare che

$$a^N = \sum_{j=0}^{N} a_j e^j \xrightarrow{N \to \infty} a$$

dove la convergenza è da intendersi chiaramente in $\|\cdot\|_p$.

Dimostrazione. Ovvio perché le code sono infinitesime, altrimenti $a \notin \ell^p$. □

D'ora in poi p sarà sempre assunto ≥ 1.

Esercizio 4.8. Per ogni $p \neq \infty$, lo spazio V è denso in ℓ^p, dove

$$V = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p \mid \exists m \; \forall n \geq m \; a_n = 0 \right\}$$

Mentre *non* lo è per $p = \infty$.

Possiamo chiederci se ℓ^p è separabile, cioè se ha un denso numerabile. La risposta, per $p \neq \infty$ è *sì*.

Esercizio 4.9. Per $p \neq \infty$, lo spazio $V \cap \{a \mid a_n \in \mathbb{Q}\}$ è denso in ℓ^p ed è numerabile.

Invece

Proposizione 4.10. ℓ^∞ *non* è separabile.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $V = \left\{ q^k \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ denso in ℓ^p. Allora la successione

$$a_n = \begin{cases} q_n^n + 1 & \text{se} \quad q_n^n \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sta in ℓ^∞ ma dista almeno 1 da ogni elemento di V. □

Proposizione 4.11. Se $T \colon X \to \mathbb{R}$ è lineare, sono equivalenti

1. T è limitato
2. T è continuo in $x = 0$
3. T è continuo
4. T è Lipschitziano.

Dimostrazione. Ricordiamo che "limitato" vuol dire "limitato sulla palla unitaria". In tal caso si ha

$$\forall x \in X \;\; |T(x)| \leq \|T\| \, \|x\|$$

e da ciò, ponendo $x = x_1 - x_2$ e usando la linearità, otteniamo

$$\forall x_1, x_2 \;\; |T(x_1) - T(x_2)| \leq \|T\| \, \|x_1 - x_2\|$$

e questo mostra che limitato $\Rightarrow$ Lipschitziano. L'unica altra implicazione non banale è che continuo in $0 \Rightarrow$ limitato. Se T è lineare e continuo in 0, per linearità $T(0) = 0$. Ora per continuità

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 \; T(B_R(0)) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

cioè $\sup |T(x)| \leq \varepsilon$, da cui si vede per linearità che è limitato su tutta la palla unitaria.

□

Teorema 4.12. Se $p < \infty$, allora $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Per $p = 1$ si ha comunque $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ ma[6] $(\ell^\infty)^* \supsetneq \ell^1$.

[6] Si intende che esiste un immersione ma che non ne esistono di surgettive.

Dimostrazione. Sia $\Phi\colon \ell^q \to (\ell^p)^*$ tale che $\Phi(b)$ è la mappa $\ell^p \to \mathbb{R}$ definita come

$$\Phi(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$$

che è ben definita per Hölder. Inoltre, sempre per Hölder, $\Phi(b)$ è limitato. È facile vedere che Φ è lineare, quindi per mostrare che è iniettivo basta mostrare che $\mathrm{Ker}(\Phi) = 0$. Se $\Phi(b) = 0$, allora è nulla l'applicazione $\Phi(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$. Allora o b è la successione identicamente nulla, oppure se $b_m \neq 0$, prendere $a_n = e^m$ falsifica quanto detto sopra. Resta da vedere la surgettività. Sia $T \in (\ell^p)^*$. Definisco b come

$$b_n = T(e^n)$$

Sia a_N la proiezione di a_n su $\langle e_0, \dots, e_N \rangle$. Per linearità e continuità di T

$$T(a) = \lim_{N\to\infty} T(a^N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j T(e^j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j b_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j b_j$$

Per concludere è sufficiente mostrare che $b \in \ell^q$. Se $a \in \ell^p$ so che

$$|T(\tilde{a})| \leq \|T\| \cdot \|\tilde{a}\|_p$$

Scelgo $\tilde{a} = \sum_{n=0}^{N} |b_n|^{q-2} b_n e^n$. Vale

$$T(\tilde{a}) = \sum_{n=0}^{N} |b_n|^{q-2} b_n \underbrace{T(e^n)}_{b_n} = \sum_{n=0}^{N} |b_n|^q$$

e combinando otteniamo

$$\sum_{n=0}^{N} |b_n|^q = |T(\tilde{a})| \leq \|T\| \, \|\tilde{a}\|_p$$

e

$$\|\tilde{a}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{N} \left| |b_n|^{q-2} b_n \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=0}^{N} |b_n|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

e dato che $(q-1)p = q$

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q \leq \|T\| \left(\sum_{n=0}^{N} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

dato che possiamo supporre[7] $\|b\| \neq 0$ otteniamo

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |b_n|^q \right)^{1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}} \leq \|T\|$$

e passando al sup su N abbiamo $b \in \ell^q$. □

[7] La b nulla ha come controimmagine 0.

Esercizio 4.13. $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$.

Esercizio 4.14. Provare a capire perché $(\ell^\infty)^* \ncong \ell^1$.

Hint. Capire chi è il duale delle successioni che tendono a 0. □

5 09/10

5.1 Altre conseguenze di Hahn-Banach

Corollario 5.1. $\forall x \in E$ si ha $\|x\|_E = \sup_{\|f\|\leq 1} \langle f, x\rangle$.

Dimostrazione. In generale vale $\forall \|f\| \leq 1$ $\|x\| \geq |\langle f, x\rangle|$. Per l'uguaglianza basta prendere f come nel Corollario 2.13 e considerare $\frac{f}{\|f\|}$. □

Definizione 5.2. Se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è lineare non costante[8] e $\alpha \in \mathbb{R}$, un *iperpiano* è un oggetto della forma $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, denotato anche $\{f = \alpha\}$.

Proposizione 5.3. L'iperpiano $\{f = \alpha\}$ è chiuso se e solo se $f \in E^*$, cioè se f è continua.

Dimostrazione. La freccia "$\Leftarrow$" è ovvia per continuità. Viceversa, dato che f non è costante, $\{f = \alpha\} \neq E$, quindi $\exists x_0 \notin \{f = \alpha\}$, da cui

$$f(x_0) < \alpha \Rightarrow \exists B_\gamma(x_0)\ f(x) < \alpha\ \forall x \in B_\gamma(x_0)$$

e per linearità concludiamo traslando questa palla nell'origine ed usando la[9] Proposizione 4.11. □

Teorema 5.4 (di Hahn-Banach in forma geometrica)**.** Siano E uno spazio vettoriale normato, A, B convessi disgiunti di E. Allora

1. Se A è aperto esistono $f \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tali che $\{f = \alpha\}$ *separa* A *e* B *in senso debole*, cioè $f < \alpha$ su A e $f \geq \alpha$ su B.
2. Se A è chiuso e B è compatto esistono $f \in E^*$ e $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tali che $\{f = \alpha\}$ *separa* A *e* B *in senso stretto*, cioè $f \leq \alpha - \varepsilon$ su A e $f \geq \alpha + \varepsilon$ su B.

Dimostrazione. 1. Dividiamo il primo punto in due casi:

(a) Sia $B = \{x_0\} \subset E$ e, a meno di traslazioni, supponiamo $0 \in A$. Consideriamo la seminorma[10] $p_A\colon E \to \mathbb{R}$ data dal *giogo*[11] di A

$$p_A(x) = \inf\{\lambda \mid x \in \lambda A\}$$

[8] A meno di voler considerare anche gli iperpiani banali E e $\emptyset$.

[9] O comunque ragionando in maniera analoga alla dimostrazione della

[10] La verifica della subadditività si fa per convessità prendendo $t = \frac{p_A(x)}{p_A(x)+p_A(y)}$ e facendo combinazione dei $\frac{z}{p_A(z)}$ (più o meno, bisogna anche autisticare con gli ε perché è un inf).

[11] In sostanza mi dice quanto devo "dilatare" A per incontrare x.

Ora consideriamo[12] $\mathbb{R}x_0 < E$ e la mappa $f\colon \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ tale che $f(tx_0) = t$. Dato che $x_0 \notin A$, si ha $f(x_0) = 1 \leq p_A(x_0)$. Per Hahn-Banach posso estendere f ad una $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E\ \tilde{f}(x) \leq p_A(x)$ (e $p_A(x) \leq M\,\|x\|$ perché A contiene una palla centrata in 0, quindi $\tilde{f}$ è continuo), $\tilde{f}(x_0) = 1$ e $\forall x \in A\ \tilde{f}(x) \leq p_A(x) < 1$ ($p_A(x) < 1$ perché A è aperto).

(b) Sia A aperto, B convesso disgiunto da A. Sia

$$C = A - B = \bigcup_{b \in B} (-b + A)$$

che è un aperto convesso tale che $0 \notin C$ perché $A \cap B = \emptyset$. Applicando il punto precedente a C e 0 troviamo $f \in E^*$ tale che $\forall x \in C\ f(x) < 0$, ovvero $\forall x \in A, y \in B\ f(x) - f(y) = f(x-y) < 0$. Da questo segue che $\sup_A f \leq \inf_B f$ e quindi comnuque scelto α tale che $\sup_A f \leq \alpha \leq \inf_B f$ si ha che $\{f = \alpha\}$ separa A e B .

2. Se A è chiuso e B è compatto e disgiunto da A, osserviamo da subito che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\operatorname{dist}(A, B) \geq 2\varepsilon$, cioè[13]

$$(A + B_\varepsilon) \cap (B + B_\varepsilon) = \emptyset$$

Infatti se così non fosse esisterebbero una successione x_n di punti di A e una y_n di punti di B tali che $\|x_n - y_n\| \to 0$, $y_n \to y \in B$, e quindi $\|x_n - y\| \to 0$ e $y \in A$ (qui stiamo usando chiusura e compattezza). Per il punto precedente allora esistono f ed α tali che

$$\forall x \in A + B_\varepsilon\ f(x) \leq \alpha \qquad \forall y \in B + B_\varepsilon\ f(x) \geq \alpha$$

Da qui segue che, $\forall x \in A$, $\forall z \in B_1$

$$f(x + \varepsilon z) = f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha$$

e quindi se z_0 è tale che $f(z_0) > 0$ si ha

$$\forall x \in A\ f(x) \leq \alpha - \varepsilon f(z_0) < \alpha \qquad \forall y \in B\ f(y) \geq \alpha + \varepsilon f(z_0) > \alpha$$

□

Corollario 5.5. Se $F < E$ ed F non è denso in E, allora esiste $f \in E^*$, diversa dalla costante 0, tale che $F \subseteq \{f = 0\} = \operatorname{Ker}(f)$.

Dimostrazione. Basta applicare il secondo punto del Teorema precedente ad $A = \bar{F}$ (che non è tutto E per ipotesi) e a $B = x_0 \notin \bar{F}$, trovando $f \in E^*$ tale che $f(x_0) = \alpha > 0$ e $\forall x \in \bar{F}\ f(x) < \alpha$. Per linearità si ha $\bar{F} \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. □

[12] Il "$<$" d'ora in avanti indica l'essere un sottospazio.

[13] Con B_ε indichiamo la palla di raggio 0 e centro ε.

Corollario 5.6. Le curve di livello di un funzionale non limitato sono dense. Anzi, se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è lineare e diversa dalla costante 0, allora

$$\begin{aligned} f \notin E^* &\Leftrightarrow \{f = \alpha\} \text{ è denso} \\ f \in E^* &\Leftrightarrow \{f = \alpha\} \text{ iperpiano chiuso diverso da } E \end{aligned}$$

5.2 Il Teorema di Banach-Steinhaus

D'ora in poi lavoreremo in spazi di Banach.

Lemma 5.7 (Baire)**.** Se (X, d) è uno spazio metrico completo e $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di chiusi a parte interna vuota, allora la sua unione ha parte interna vuota. Equivalentemente, passando ai complementari, se $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di aperti densi, la loro intersezione è densa.

Dimostrazione. Dimostriamo la versione con gli aperti densi. È chiaro che basta mostrare che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ interseca tutte gli aperti. Sia quindi A un aperto. $O_1 \cap A$ è per ipotesi non vuoto, quindi sia $x_1 \in A \cap O_1$, che è aperto, per cui posso trovare $B_{r_1}(x_1) \subseteq A \cap O_1$, con $r_1 \leq \frac{1}{2}$. Iterativamente O_{n+1} è denso, quindi trovo un punto $x_{n+1} \in B_{r_n}(x_n) \cap O_{n+1}$, che è aperto, e da qui trovo $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \cap O_{n+1}$ per un certo $r_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. È chiaro che $x_i \to x \in A$, e ovviamente $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, che è la tesi. $\square$

Definizione 5.8. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} x_i e_i, \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, e_i \text{ base}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

Corollario 5.9. Non esistono strutture di spazio di Banach su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ovvero ogni norma su un tale spazio non è completa.

Dimostrazione. Dato che i sottospazio finito-dimensionali sono chiusi, potrei scrivere $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come unione numerabile di chiusi a parte interna vuota. $\square$

Più in generale lo stesso argomento mostra che

Corollario 5.10. Uno spazio di Banach ha dimensione finita o più che numerabile.

Definizione 5.11. Se E, F sono spazi di Banach, denotiamo con $L(E, F)$ lo spazio di Banach delle $f\colon E \to F$ lineari e continue con la norma

$$\|f\|_{L(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|f(x)\|_F$$

Osserviamo che, ancora una volta, $f\colon E \to F$ lineare è limitato (al solito, sulle palle), se e solo se è continuo.

Teorema 5.12 (Banach-Steinhaus, o uniforme limitatezza)**.** Siano E, F spazi di Banach, $\{T_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi $T_i \in L(E,F)$. Allora

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < \infty \Leftrightarrow \forall x \in E \; \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < \infty$$

Dimostrazione. La frecca "$\Rightarrow$" segue dal fatto che $\|T_i(x)\| \leq \|T_i\| \cdot \|x\|$ per definizione. Viceversa definiamo, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x \in E \mid \forall i \in I \;\; \|T_i(x)\|_F \leq n\} \subset E$$

che è un chiuso. Dato che sotto le nostre ipotesi si ha $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = E$, per il Lemma di Baire $\exists \bar{n}\; X_{\bar{n}} \supseteq B_{\bar{r}}(\bar{x})$. Quindi $\forall x \in B_{\bar{r}}(\bar{x}) \;\; \|T_i(x)\| \leq \bar{n}$, da cui scrivendo $x = \bar{x} + ry$ con $y \in B_1$, otteniamo

$$\forall y \in B_1 \;\; \|T_i(y)\| \leq \frac{1}{r}(\|T_i(\bar{x})\| + \|T_i(x)\|) \leq \frac{2\bar{n}}{\bar{r}}$$

$\square$

Corollario 5.13. Se $T_n \in L(E,F)$, $T_n \to T$ puntualmente, allora $T \in L(E,F)$ e $\|T\| \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$.

Dimostrazione. Dato che $\forall x \sup_n \|T_n(x)\| < \infty$, per Banach-Steinhaus

$$\exists c \; \forall n \; \forall x \in B_1 \; \|T_n(x)\| \leq c\,\|x\|$$

da cui $\|T(x)\| \leq c\,\|x\|$, cioè $T \in L(E,F)$. Se n_k è tale che $\|T_{n_k}\| \xrightarrow{k} \liminf_n \|T_n\|$ allora

$$\|T(x)\| = \|\lim_k T_{n_k}(x)\| = \lim_k \|T_{n_k}(x)\| \leq \lim_k \|T_{n_k}\| \cdot \|x\| = \liminf \|T_n\| \cdot \|x\|$$

$\square$

Osserviamo che in generale $T_n \not\to T$ in $L(E,F)$, e può succedere che $\|T\| < \liminf_n \|T_n\|$.

Esempio 5.14. Sia $H = L^2(0,2\pi)$ e sia $T_n = \sin(nx) \in H^* \cong H$, cioè

$$T_n(f) = \int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x)\, dx$$

Si ha chiaramente $\forall f \; T_n(f) \xrightarrow{n} 0$, ma comunque

$$\|\sin(nx)\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin(nx))^2\, dx} = \sqrt{\pi} > 0$$

6 10/10

6.1 Un corollario di Banach-Steinhaus

Corollario 6.1. Se $A \subset E$, allora A è limitato se e solo se per ogni $f \in E^*$ si ha $f(A)$ limitato.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" è ovvio per continuità. Per "$\Leftarrow$" consideriamo per $a \in A$ il funzionale di valutazione $T_a \in E^{**}$ definito come $T_a(f) = f(a)$. Le nostre ipotesi fanno scattare Banach-Steinhaus e quindi $\sup_{a \in A} \|T_a\| < \infty$. Tuttavia, per il Corollario 5.1 abbiamo $\|T_a\| = \|a\|$. □

Notiamo che con lo stesso trucco (il Corollario 5.1) si mostra che l'immersione $E \hookrightarrow E^{**}$ è isometrica.

6.2 Mappa Aperta e Grafico Chiuso

Teorema 6.2 (della Mappa Aperta)**.** Se $T \in L(E, F)$ è surgettiva, allora è aperta.

Dimostrazione.

1. Come prima cosa mostriamo che esiste c tale che $\overline{T(B_1)} \supset B_{2c}$. Per surgettività abbiamo $\bigcup_n \overline{T(B_n)} = F$; per Baire quindi un certo $\overline{T(B_n)} = n\overline{T(B_1)}$ ha parte interna non vuota, e dunque $\overline{T(B_1)}$ conterrà una palla $B(y_0, 4c)$. Per linearità anche $-y_0 \in \overline{T(B_1)}$, e per convessità
$$\overline{T(B_1)} \supset \frac{B(y_0, 4c) - y_0}{2} \supset B_{2c}$$
2. Ora mostriamo che $T(B_1) \supset B_c$: questo è equivalente alla tesi per linearità. Se $y \in B_c$ allora per quanto visto $y \in \overline{T(B_{1/2})}$ e quindi esiste $x_1 \in B_{1/2}$ tale che $\|Tx_1 - y\| < \frac{c}{2}$. Dunque $Tx_1 - y \in B_{c/2} \subset \overline{T(B_{1/4})}$. Iterando troviamo una successione di x_i tali che $x_i \in B_{2^{-i}}$ e $\left\| y - \sum_{j \le i} Tx_j \right\| \le \frac{c}{2^i}$. $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$, che esiste per completezza, è tale che $T(x) = y$ e $x \in B_1$.

□

Corollario 6.3. Se $T \in L(E, F)$ è bigettiva, T^{-1} è continua.

Corollario 6.4. Se E è uno spazio di Banach rispetto a due norme e queste sono confrontabili, cioè esiste una costante C per cui $\|\cdot\|_2 \le C \|\cdot\|_1$, allora sono equivalenti, cioè esiste anche una costante K per cui $\|\cdot\|_1 \le K \|\cdot\|_2$.

Dimostrazione. L'identità è lineare, continua e surgettiva da $(E, \|\cdot\|_1)$ a $(E, \|\cdot\|_2)$, quindi lo è anche la sua inversa, che è la tesi. □

Teorema 6.5 (del Grafico Chiuso)**.** $T \colon E \to F$ lineare fra spazi di Banach è continua se e solo se il suo grafico è chiuso.

Dimostrazione. Se T è continua e $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ allora per continuità $y = Tx$. Vediamo il viceversa. Consideriamo su E la *norma del grafico*

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

Dato che T ha grafico chiuso, E è completo per questa norma. Infatti x_n è di Cauchy per $\|\cdot\|_1$ se e solo se lo è per $\|\cdot\|_E$ e Tx_n lo è per $\|\cdot\|_F$; dunque data x_n di Cauchy per $\|\cdot\|_1$, abbiamo $x_n \to x$ e, usando la chiusura del grafico, $Tx_n \to Tx$ per le norme "vecchie", quindi $\|x_n - x\|_1 \to 0$. Dato che $\|x\|_E \leq \|x\|_1$, per il Corollario 6.4 otteniamo per una certa C

$$\|T(x)\|_F \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|_E$$

cioè T è continuo. $\square$

Definizione 6.6. Se $A < E$, un operatore lineare $T\colon A \to F$ si dice *chiuso* se ha grafico chiuso in $A \times F$.

Se $A \neq E$ non è più detto che T è chiuso se e solo se continuo.

7 14/10

7.1 Supplementare topologico

Definizione 7.1. Se E è uno spazio di Banach, $G < E$ un sottospazio chiuso, $L < E$ è *supplementare topologico* di G se

- L è chiuso,
- $L + G = E$
- $L \cap G = \{0\}$.

Proposizione 7.2. $\forall z \in E$ esistono unici x, y tali che $x \in G$, $y \in L$. Quindi esistono $P_G\colon E \to G$, $P_L\colon E \to L$ proiezioni lineari.

La richiesta di chiusura topologica serve ad assicurare la continuità. Questa è una conseguenza del seguente

Teorema 7.3. Se G, L sono sottospazi chiusi di E e $G + L$ è chiuso, allora $\exists C > 0$ $\forall z \in G + L$ $\exists x \in G$ $\exists y \in L$ tali che $z = x + y$, $\|x\| \leq C \|z\|$ e $\|y\| \leq C \|z\|$.

Se $G \cap L \neq \{0\}$ la decomposizione $z = x + y$ non è unica.

Corollario 7.4. Se $G + L = E$, P_G, P_L sono lineari e continui.

Dimostriamo il Teorema.

Dimostrazione. Consideriamo $G \times L$ con la norma $\|(x,y)\|' = \|x\| + \|y\|$ e sia $T\colon G \times L \to G + L \leq E$ definita come $T(x,y) = x + y$. T è continua, surgettiva, lineare (in generale non iniettiva), e per il Teorema della Mappa Aperta si ha $T(B_1^{G\times L}) \supseteq B_r^{G+L}$, cioè $\forall z \in G+L$ tale che $\|z\| \leq r$ esistono x, y tali che $\|x\|+\|y\| \leq 1$ e $z = x+y$. Per linearità vale la tesi con $C = \frac{1}{r}$. □

Niente assicura l'esistenza di supplementari topologici, e anche se questi esistono non sono in generale unici (si pensi a due rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$ distinte).

Esercizio 7.5 (non facile)**.** Consideriamo lo spazio c_0 delle successioni reali a limite 0 con la norma $\|x\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Si ha che $c_0 < \ell^\infty$ è un sottospazio chiuso. Anzi, si può mostrare che $c_0^* = \ell^1$ e $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, e quindi ℓ^∞ è il biduale di c_0 e la mappa $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ è un immersione isometrica. c_0 non ammette supplementare topologico in ℓ^∞.

Proposizione 7.6. Se G è chiuso e ha dimensione o codimensione finita[14] ha sempre supplementare topologico.

Dimostrazione. Se G ha codimensione finita, ogni suo supplementare algebrico è chiuso in quanto di dimensione finita. Se invece G ha dimensione finita, in particolare è chiuso. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è una base di G, considero $f_i \in E^*$ tale che $f_i(x_i) = 1$ e $f_i(x_j) = 0$ per $i \neq j$, e $L = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}(f_i)$ è chiuso ed è il supplementare di G. Infatti dato $x \in E$ si ha $x - \sum f_i(x)x_i \in L$. □

Proposizione 7.7. Se $G < H$ e H è di Hilbert, allora se G è chiuso ha un supplementare topologico $L = G^\perp = \{x \mid \forall y \in G\ \langle x, y\rangle = 0\}$ e tale che $\|z\| = \|x\| + \|y\|$.

Curiosità: si può mostrare che vale il viceversa: in ogni spazio di Banach che non sia di Hilbert esiste un sottospazio chiuso che non ammette supplementare topologico.

7.2 Invertibilità degli operatori lineari continui

Studiamo l'invertibilità degli operatori lineari continui fra due spazi di Banach, quindi dei $T \in L(E,F)$.

Proposizione 7.8. Se T è bigettivo, allora $T^{-1} \in L(F,E)$.

Dimostrazione. T^{-1} è lineare, e dato che T è surgettivo, per il Teorema della Mappa Aperta T^{-1} è continuo. □

Cosa possiamo dire se T è solo iniettivo o surgettivo?

Definizione 7.9. Dati $T \in L(E,F)$ ed $S \in L(F,E)$, diciamo che S è *inverso destro* (*sinistro*) di T se $T \circ S = \mathrm{Id}_F$ ($S \circ T = \mathrm{Id}_E$).

[14] Si intende che esiste un supplementare algebrico di dimensione finita.

Teorema 7.10. Sia $T \in L(E, F)$

- Se T è surgettivo ha un inverso destro se e solo se $\operatorname{Ker}(T)$ ha un supplementare topologico.
- Se T è iniettivo ha un inverso sinistro se e solo se $\operatorname{Im}(T)$ è chiuso ed ha un supplementare topologico.

Ad esempio $c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ non ha un inverso sinistro.

Dimostrazione.

- Se T è surgettivo ed ha un inverso destro S, allora $\operatorname{Im}(S)$ è il supplementare topologico di $\operatorname{Ker}(T)$ (la chiusura è facile da controllare sulle successioni). Se viceversa $\operatorname{Ker}(T)$ ha un supplementare topologico L, l'inverso destro è dato dal proiettore $P_L \colon E \to L$ nella seguente maniera. Dato $y \in F$ e $x \in T^{-1}(y)$, definisco $S(y) = P_L(x)$. Questa è una buona definizione, cioè non dipende dalla scelta di x, perché se $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)$, allora $x_1 - x_2 \in T^{-1}(0) = \operatorname{Ker}(T)$, e quindi $P_L(x_1) - P_L(x_2) = P(\underbrace{x_1 - x_2}_{\in \operatorname{Ker}(T)}) = 0$. P_L è continuo per il Corollario 7.4.
- Se T è iniettivo ed ha inverso sinistro S, allora $\operatorname{Ker}(S)$ è supplementare topologico di $\operatorname{Im}(T)$ (la chiusura di $\operatorname{Im}(T)$ è di nuovo facile da vedere con le successioni). Se viceversa $\operatorname{Im}(T)$ ha supplementare topologico L definisco, per ogni $y \in F$, $S(y) = T^{-1}(P_{\operatorname{Im}(T)}(y))$ ed S è continua perché composizione di mappe continue.

$\square$

7.3 Topologie deboli

Definizione 7.11. Se E è uno spazio di Banach, la *topologia debole* $\sigma(E, E^*)$ è la topologia meno fine su E che rende continui tutti gli $f \in E^*$, cioè quella generata dagli $f^{-1}(A)$ al variare di $f \in E^*$ e di $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto.

Una base di questa topologia è la famiglia degli oggetti del tipo $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(A_i)$.

Proposizione 7.12. Se $0 \in \Omega \in \sigma(E, E^*)$, allora esiste $\varepsilon > 0$ ed $f_1, \dots, f_n$ tali che $\bigcap_{i=1}^n \{x \mid |f_i(x)| < \varepsilon\} \subseteq \Omega$.

In altre parole è la topologia generata dalle intersezioni finite di strisce, dove una stricia è un insieme del tipo $\{x \mid a < f(x) < b\}$ (mentre la topologia forte era generata dalle palle). Se la dimensione di E è infinita, allora ogni intorno di 0 contiene una retta, anzi contiene uno spazio di codimensione finita [15], quindi è illimitato.

[15]

Dimostrazione (non fatta a lezione). $\bigcap f_i^{-1}(-r, r) \supset \bigcap \operatorname{Ker} f_i$. Se $\operatorname{Ker} f_i = \{0\}$ la mappa $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ embedda lo spazio in uno a dimensione finita. Ancora più direttamente, i singoli Ker sono iperpiani, e quindi hanno codimensione 1. $\square$

Proposizione 7.13. In dimensione finita la topologia debole coincide con quella forte.

Dimostrazione (non fatta a lezione). Basta mostrare che c'è un aperto debole in ogni palla $B(x_0, r)$. Se f_i è la proiezione sull'i-esima cordinata di una fissata base, basta notare che

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_i(x - x_0)|$$

E basta prendere come aperto debole

$$\bigcap_{i=1}^{k} \left\{ x \;\middle|\; |f_i(x - x_0)| < \frac{r}{k} \right\}$$

□

Notazione 7.14. Denoteremo la convergenza secondo la topologia debole con $x_n \rightharpoonup x$

Proposizione 7.15.

- $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$
- $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall f \in E^* \; f(x_n) \to f(x)$

Esempio 7.16. In ℓ^2, se $x_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, con l'1 in posizione i-esima, allora $\|x_i\| = 1$, ma $x_i \rightharpoonup 0$. Se $y \in \ell^2$ si ha $\langle y, x_i \rangle = y_i \xrightarrow{i \to \infty} 0$.

Può succedere, anche in dimensione infinita (ma non negli Hilbert), che anche se le due topologie sono diverse, abbiano le stesse successioni convergenti, ad esempio in ℓ^1 si ha $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow x_n \to x$. La topologia debole, dato che ha meno aperti, ha più compatti[16]. Questo è uno dei motivi per cui torna comoda.

Proposizione 7.17. Se E ha dimensione infinita, la chiusura debole della sfera unitaria è la palla unitaria, cioè $\overline{\{x \mid \|x\| = 1\}}^{\text{deb}} = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$.

Dimostrazione (non fatta a lezione). La palla è chiusa perché la possiamo scrivere come $\bigcup_{\|f\| \leq 1} f^{-1}[-1, 1]$. Se $\|x_0\| < 1$, mostriamo che ogni suo intorno della base interseca la sfera (cioè la palla aperta è inclusa nella chiusura della sfera). Un intorno della base contiene una retta e questa interseca la sfera: basta considerare la funzione $\|x_0 + ty\|$, dove $\{x_0 + ty \mid t \in \mathbb{R}\}$ parametrizza la retta; questa vale meno di 1 in $t = 0$ e va a $+\infty$, e si conclude per continuità. □

Corollario 7.18. Se E ha dimensione infinita e $\emptyset \neq \Omega \subseteq E$ è un aperto della topologia forte *limitato*, allora $\Omega \notin \sigma(E, E')$, anzi $\text{int}^{\text{deb}}(\Omega) = \emptyset$.

[16] I compatti sono *belli*.

Dimostrazione (non fatta a lezione). Altrimenti intersecandone il complementare con la palla chiusa otterrei che chiusura debole della sfera è inclusa strettamente nella palla. □

Teorema 7.19. Se $C \subseteq E$ è convesso, allora è chiuso nella topologia forte se e solo se è chiuso nella topologia debole.

Dimostrazione. È chiaro che un chiuso della topologia debole è anche chiuso nella topologia forte. Viceversa sia C un convesso chiuso forte e sia $x_0 \notin C$. Dato che C è chiuso e x_0 è compatto, possiamo separarli in senso forte, cioè esistono $f \in E^*$ ed $\alpha_{x_0} \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0) < \alpha_{x_0}$ e $\forall x \in C\ f(x) > \alpha_{x_0}$. Quindi $\Omega = \bigcup_{x_0 \in E \setminus C} \{f < \alpha_{x_0}\} \in \sigma(E, E^*)$ è aperto, ma $E \setminus C = \Omega$ (o, più velocemente, abbiamo mostrato che il complementare è intorno di ogni suo punto). □

Notiamo che abbiamo mostrato di più: la topologia debole non solo è T2, ma separa i punti dai convessi chiusi. Se C è un convesso chiuso, allora

$$C = \bigcap_{\substack{f \in E^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \\ C \subseteq \{f \leq \alpha\}}} \{f \leq \alpha\}$$

Corollario 7.20. Se $\varphi \colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è convessa, allora è inferiormente semicontinua (cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \varphi^{-1}(-\infty, \alpha] \subseteq E$ è chiuso) se e solo se è inferiormente semicontinua in senso debole.

Dimostrazione. $\varphi^{-1}(-\infty, \lambda]$ è convesso, quindi è chiuso forte se e solo se è chiuso debole. □

Tutto questo per dire che un altro motivo per studiare le topologie deboli è trovare minimi degli operatori. Per questo mi basta la semicontinuità inferiore (posso "saltare" solo in giù, per i minimi mi va bene).

Proposizione 7.21. Se $x_n \rightharpoonup x$, allora

1. $\|x_n\| \leq C$ e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
2. Se $f_n \to f$ in E^*, allora $f_n(x_n) \to f(x)$
3. Esiste y_n, successione di combinazioni convesse di x_n, tale che $y_n \to x$.

Dimostrazione.
1. Per ogni $f \in E^*$ si ha $f(x_n) \to f(x)$, quindi $T_n \colon f \mapsto f(x_n)$ è puntualmente limitata, e perciò per Banach-Steinhaus è uniformemente limitata, dunque $\|x_n\| = \|T_n\| \leq C$. Inoltre $f(x_n) \leq \|f\| \|x_n\|$, e quindi $f(x) = \lim_n f(x_n) \leq \liminf_n \|x_n\| \|f\|$, dunque $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} f(x) \leq \liminf_n \|x_n\|$

2. $|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)|$ e questa quantità è maggiorata da

   $$|f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \cdot \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| \to 0$$

3. Dato che x sta nella chiusura debole di $\bigcup\{x_n\}$, a maggior ragione sta nella chiusura debole del suo involucro convesso. Ma per i convessi chiusura debole e forte coincidono.

□

8 16/10 - Esercitazione

Se X è uno spazio normato, la chiusura di un suo sottospazio è ancora un sottospazio per linearità del limite. Un esempio di sottospazio non chiuso è quello dei polinomi in $C^0[0,1]$.

La chiusura di c_0^0 (le successioni definitivamente 0) in ℓ^1 è ℓ^1. Mentre in ℓ^∞ è c_0 (le successioni a limite 0).

Se V è un sottospazio chiuso e $y \notin V$, $V \oplus y$ è un sottospazio chiuso: se $x_n + \alpha_n y \to w$, allora α_n è limitata (altrimenti giocando coi limiti si mostra $y \in V$) e ha una sottosuccessione che tende a un certo α. Allora

$$V \ni x_{n_k} = x_{n_k} + \alpha_{n_k} y - \alpha_{n_k} y \xrightarrow{k\to\infty} w - \alpha y$$

Questo mostra che i sottospazi di dimensione finita sono chiusi.

Per mostrare la non chiusura di qualcosa si può usare il fatto che

Proposizione 8.1. Le funzioni uniformemente continue si estendono alla chiusura in modo unico.

Esercizio 8.2. I sottospazi propri hanno parte interna vuota.

Lemma 8.3. I Banach non hanno mai base numerabile.

Dimostrazione. Baire. □

Esercizio 8.4. Il sottospazio delle successioni a limite finito è chiuso in ℓ^∞.

Dimostrazione. Si scrive come $c_0 \oplus 1$ (si intende la costante). □

Esercizio 8.5. c_0^0 ha base numerabile (e quindi non ammette strutture di spazio di Banach).

Esercizio 8.6. Se un insieme è convesso lo è anche la sua chiusura.

Esercizio 8.7. Se un insieme è convesso la sua chiusura debole coincide con la sua chiusura forte.

Notiamo inoltre che

Proposizione 8.8. La topologia debole è T2.

Dimostrazione. Hahn-Banach in forma geometrica. $\square$

$\{e^j\}$ converge debolmente a 0 in L^p per $1 < p < \infty$.

Esercizio 8.9. $\{e^j\} \not\rightharpoonup 0$ in ℓ^1 e non ammette sottosuccessioni convergenti.

Esempio 8.10. $f_n(x) = \sin(nx)$ converge debolmente (ma non fortemente) a 0 in $L^1[0, 2\pi]$.

9 17/10 - Esercitazione

Per $p \leq q$ vale $\ell^p \subset \ell^q$, perché le code della serie sono infinitesime e quindi i singoli termini sono definitivamente minori di 1 in modulo. Inoltre con Hölder si mostra che l'inclusione è lineare e continua.

Esercizio 9.1. Trovare la costante c per cui $\|a\|_{\ell^q} \leq c\, \|a\|_{\ell^p}$.

Per vedere che ℓ^1 non esaurisce $(\ell^\infty)^*$ si può considerare il funzionale che manda una successione nel suo limite (prima definito sul sottospazio delle successioni che ammettono limite finito e poi esteso con Hahn-Banach). Questo non può essere della forma $\{a_n\} \mapsto \sum a_n b_n$ (basta testare sugli e^j).

Esercizio 9.2. Il duale di $(c_0, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ (che è Banach perché chiuso in un Banach) è isomorfo ad ℓ^1. $\varphi\colon \ell^1 \to (c_0)^*$ che mappa $\varphi(b)(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ è un'isometria surgettiva.

$\forall p \geq 1$ si ha $e_j \in \ell^p$. Studiamo la convergenza debole di $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Proposizione 9.3. $\{e_j\} \rightharpoonup 0$ in ℓ^p per $p > 1$ o $p = \infty$, ma $\{\ell_j\} \not\rightharpoonup 0$ in ℓ^1.

Dimostrazione. Per studiare la convergenza debole di $\{x_k\}$ in X sfruttiamo il fatto che

$$x_k \rightharpoonup x_\infty \Leftrightarrow \forall T \in X^*\; T(x_k) \to T(x_\infty)$$

Consideriamo $b = \{b_n = 1\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ e $\Phi\colon \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ e definiamo $T = \Phi(b)$. $T(e_j) = \sum (e_j)_n b_n = 1 \xrightarrow{j\to\infty} 1 \neq 0$. $\square$

Esercizio 9.4. $\{e_j\} \rightharpoonup 0$ in ℓ^p, $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$.

Dimostrazione. Testo tutti i funzionali in $(\ell^p)^* = \mathrm{Im}(\Phi)$. Fissato T esiste $b \in \ell^q$ tale che $T(e_j) = \sum (e_j)_n b_n = b_j$. Allora $\lim T(e_j) = \lim b_j = 0$ perché $b \in \ell^q$. Cosa succede a $T(e_j)$ se $p = \infty$? Basta studiare cosa succede su $T_{|c_0}$ e rifare il ragionamento precedente. $\square$

Esercizio 9.5. Si consideri il sottoinsieme dello spazio di Banach $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ definito come

$$A = \left\{ f \in C^0([0,1]) \mid f(0) - 2f(1) = 1 \right\}$$

Studiare la chiusura forte e debole di A.

Esercizio 9.6. Sia $T\colon (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ definito come

$$T(f)(x) = \int_0^1 f(|x-y|)\, dy$$

- Dimostrare che T è ben definita, lineare e continua; inoltre calcolare $\|T\|_{(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty),(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)}$.
- Calcolare $\|T\|$ come funzionale da $(C^0[0,1], \|\cdot\|_1)$ a $(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
- Dire se T si estende ad $(L^1, \|\cdot\|_1)$ e se si estende in modo unico.

Dimostrazione. $x \mapsto \int_0^1 f(|x-y|)\, dy$ è ben definita perché composizioni di continue e quindi integrabile. È continua per convergenza dominata applicata a $g_n = f(|x_n - y|)$ dove $x_n \to x_0$. La linearità di T è una verifica. Per mostrare che T è continua basta vedere che è limitata.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 f(|x-y|)\, dy \right| \\ &\le \int_0^1 |f(|x-y|)|\ dy \le \int_0^1 \|f\|_\infty\ dy = \|f\|_\infty \\ &\|Tf\|_\infty \le \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\| \le 1 \end{aligned}$$

Se rendo ottimale la maggiorazione precedente ho calcolato la norma di T. Se $f \equiv 1$, ho che $\|f\|_\infty = 1$. Quindi $Tf(x) = 1 \Rightarrow \|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty \Rightarrow \|T\|_{(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty),(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)} = 1$.

Consideriamo ora $T\colon (C^0, \|\cdot\|_1) \to (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. T è ancora limitata.

$$\|Tf\|_\infty \overset{?}{\le} C \|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\ dt$$

$$|Tf(x)| = \left| \int_0^1 f(|x-y|)\, dy \right| = \dots$$

ponendo $t = |x-y|$ (o prima sviluppando $|\cdot|$ e poi sostituendo) maggioro il tutto con $2\int_0^1 \|f\|(t)\, dt$. Ne segue che per ogni $x \in [0,1]$ vale $|Tf(x)| \le 2\|f\|_{L^1}$, e basta passare al sup. Per finire bisogna mostrare che $\|T\|_{(C^0,\|\cdot\|_1),(C^0[0,1],\|\cdot\|_\infty)} = 2$. □

Esercizio 9.7. Sia $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ definita da

$$\{T(\{a_n\})\}_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$$

- Dimostrare che è lineare e continua e calcolarne la norma.
- Dire se esiste $a \in \ell^2$ tale che $\|T(a)\|_{\ell^2} = \|T\| \, \|a\|_{\ell^2}$.

Esercizio 9.8. Sia H uno spazio di Hilbert. Dimostrare che sono equivalenti:

1. $\dim_{\text{alg}}(H) < \infty$
2. Ogni chiuso $C \subset H$ non vuoto ammette un elemento di minima norma.

Esercizio 9.9. Siano X un Banach ed $F \in L(X, X)$ bigettiva. Mostrare che $\forall \{x_n\} \subseteq X$ tale che $\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ si ha $\|F(x_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

Esercizio 9.10. Sia $C_0^0(\mathbb{R}^+)$ l'insieme delle $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

- Dimostrare che $(C_0^0(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|\,\infty)$ è un Banach.
- Sia $B = \left\{ f \in C_0^0(\mathbb{R}^+) \ \lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0 \right\}$. Dire se B è chiuso forte e debole.

Esercizio 9.11. $B(0,1)$ non è aperta debole, e la chiusura debole di $\{x \mid \|x\| = 1\}$ è $\{x \mid \|x\| \le 1\}$.

10 21/10

10.1 Topologia debole⊛

Definizione 10.1. Sia E uno spazio di Banach. La *topologia debole⊛* su E^*, denotata con $\sigma(E^*, E)$ è la meno fine che rende continui tutti i funzionali in $J(E) \subseteq E^{**}$, dove $J\colon E \to E^{**}$ è la mappa $x \mapsto v_x$ dove $\forall f \in E^*$ $v_x(f) = f(x)$ ($\|x\|_E = \|v_x\|_E$). Denoteremo la convergenza in questa topologia con $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$.

Se J è surgettiva, cioè se E è riflessivo, allora $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ (la topologia debole coincide con la debole⊛).

Osserviamo che, ad esempio in $L^\infty = (L^1)^*$ e $\ell^\infty = (\ell^1)^*$, le due topologie sono effettivamente diverse.

Proposizione 10.2. La topologia debole⊛ ha le seguenti proprietà:

- è T2[17]
- $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$ se e solo se $\forall x \in E$ $f_n(x) \to f(x)$
- se $f_n \rightharpoonup f$, allora $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$

[17] Anche la topologia debole è T2, si usa Hahn-Banach.

- se $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$, allora $\|f_n\|_{E^*} \leq C$ e $\|f\|_{E^*} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E^*}$
- se $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$, allora $f_n(x_n) \to f(x)$

Dimostrazione. Il fatto che questa topologia sia T2 segue dal fatto che se $f, g \in E^*$, ed $f \neq g$, allora fissato x tale che $f(x) < \alpha < g(x)$, gli aperti che separano queste due sono

$$A = \{h \mid h(x) < \alpha\} \qquad B = \{h \mid h(x) > \alpha\}$$

Gli altri punti si fanno essenzialmente come per la topologia debole. □

Teorema 10.3 (Banach-Alaoglu)**.** La palla chiusa $\overline{B_R^{E^*}}$ è debole⊛-compatta.

Dimostrazione. Sia $X = \mathbb{R}^E$ con la topologia prodotto[18], che ricordiamo essere generata dagli insiemi

$$\{f \in X \mid f(x_1) \in A_1, \ldots, f(x_n) \in A_n\}$$

con gli A_i aperti dell'i-esima copia di $\mathbb{R}$. Ora, non solo $E^* < X$, ma la topologia debole⊛ è la restizione ad E^* della topologia prodotto su X. Inoltre

$$f \in \overline{B_R^{E^*}} \Leftrightarrow (f \in E^*) \wedge (\forall x \in E \; f(x) \leq R\|x\|) \Leftrightarrow (f \in E^*) \wedge \left(f \in \prod_{x \in E} [-R\|x\|, R\|x\|] \right)$$

e il prodotto a destra è compatto per Tychonoff. Dato che E^* è chiuso nella topologia prodotto[19], l'intersezione $E^* \cap \prod_{x \in E} [-R\|x\|, R\|x\|]$ è chiusa in un compatto ed è quindi compatta. □

10.2 Relazioni con la riflessività

Corollario 10.4. In uno spazio riflessivo le palle chiuse sono debolmente compatte.

Dimostrazione. $J\colon E \to E^{**}$ è un'isometria surgettiva, quindi tutti i funzionali $E^* \to \mathbb{R}$ si identificano con un elemento di E, per cui su E^{**} la topologia debole e la debole⊛ coincidono. □

Tanto per cambiare $\overline{B_1^{\ell^1}}$ non è debolmente compatta. Basta considerare $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Questa se converge deve convergere a 0 (perché lo fa puntualmente), ma non lo fa perché l'elemento del duale dato associato alla successione di

[18] Ricordiamo, la meno fine che rende continue le valutazioni (o proiezioni che dir si voglia) $v_x(f) = f(x)$.

[19] Ci si può fare il conto oppure invece che con E^* si interseca con le lineari, tanto la continuità è gratis dall'altro pezzo dell'intersezione. Le funzioni $f \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ e $f \mapsto f(\lambda x) - \lambda f(x)$ (per x, y, λ fissati) sono continue e basta prendere la controimmagine di 0 e scrivere le lineari come intersezione di chiusi.

tutti 1 valutato in e_i fa sempre 1. Guardando il preduale, ricordando che ℓ^1 è il duale di c_0, se $f \in c_0$ allora $f(e_n) = f_n \to 0$ (e deve andare così per Banach-Alaoglu).

L'isometria $J\colon E \to E^{**}$ è lineare, continua ed iniettiva ed è surgettiva se e solo se E è riflessivo. $J(E) < E^{**}$ è un sottopazio chiuso in senso debole (e quindi anche forte)[20]. Tuttavia vale

Teorema 10.5 (Goldstine)**.** *$J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ rispetto alla topologia debole⊛; in particolare $J(E)$ è denso in E^{**}.*

Questo mostra che se lo spazio non è riflessivo la topologia debole e la debole⊛ sono effettivamente distinte, perché abbiamo appena detto che $J(E)$ è un chiuso debole.

Dimostrazione. Sia A un intorno aperto debole⊛ di $\eta \in B_{E^{**}}$: mostriamo che interseca $J(B_E)$. È sufficiente mostrarlo per gli A della forma

$$A = \{\zeta \in E^{**} \mid |\zeta(f_i) - \eta(f_i) < \varepsilon|\,, f_1, \ldots, f_n \in E^*\}$$

al variare di $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ e $\varepsilon > 0$. Sia $\varphi\colon B_E \to \mathbb{R}^n$ che mappa $x \mapsto (f_1(x) \ldots, f_n(x))$, con le f_i come sopra. Basta mostrare[21] che $(\eta(f_1), \ldots, \eta(f_n)) \in \overline{\varphi(B_E)}$. Se questo non è vero, dato che $\overline{\varphi(B_E)}$ è un convesso chiuso, esiste un iperiano che li separa, cioè esistono $b \in \mathbb{R}^n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in B_E \ \sum_{i=1}^n b_i f_i(x) < \alpha < \sum_{i=1}^n b_i \eta(f_i)$$

Allora $\|\sum b_i f_i\|_{E^*} \leq \alpha < \sum b_i \eta(f_i)$. Dato che $\|\eta\| \leq 1$ si ha

$$\left|\sum b_i \eta(f_i)\right| = \left|\eta\left(\sum b_i f_i\right)\right| \leq \left\|\sum b_i f_i\right\|$$

e questo è assurdo. Quindi si ha, comunque scelti $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $J(B_E) \cap A_{\eta, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon} \neq \emptyset$, e questo succede se e solo se $\overline{J(B_E)} = B_{E^{**}}$. □

Teorema 10.6 (Kakutani)**.** *E è riflessivo se e solo se $\overline{B_E}$ è debolmente compatta.*

Dimostrazione. Una freccia è il Corollario 10.4. Per il viceversa, notiamo che J è continua da E con la topologia debole a E^{**} con la topologia debole⊛: dato che è continua fra le topologie forti perché isometrica, è continua fra le

[20] Dato che è convesso basta mostrarlo in senso forte. Dato che J è isometrica, se v_{x_n} è di Cauchy lo è pure x_n. Allora $x_n \to x$ ed è facile mostrare che $v_{x_n} \to v_x$.

[21] Questo perché $(\eta(f_1), \ldots, \eta(f_n))$ sta nella chiusura di X se e solo se ogni suo intorno interseca $\varphi(B_E)$, e con gli intorni in $\|\cdot\|_\infty$ è esattamente la tesi.

topologie deboli (vedi prossima lezione). A maggior ragione è continua se in partenza c'è la topologia debole e in arrivo la debole⊛, che è meno fine[22].

Dall'ipotesi B_E compatto debole abbiamo dunque che $J(B_E)$ è compatto e quindi chiuso per la topologia debole⊛. Ma per Goldstine $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$, dunque $J(B_E) = B_{E^{**}}$ e per linearità si ha la tesi. □

11 23/10

11.1 Ancora su topologie deboli e riflessività

Proposizione 11.1. Un operatore lineare $T\colon E \to F$ è continuo fra le topologie forti se e solo se lo è fra le topologie deboli.

Dimostrazione (non fatta a lezione). Supponiamo T continuo fra le topologie forti. Ci basta mostrare, per ogni $f \in F^*$, la continuità di $f \circ T$; questo è un funzionale in E^* ed è quindi continuo per la topologia debole. Se invece T è continuo fra le topologie deboli il suo grafico è chiuso in $E \times F$ con la topologia debole[23]. Dunque il grafico è anche un chiuso forte e per il Teorema del Grafico Chiuso T è continua fra le topologie forti. □

Con lo stesso argomento si dimostra che le condizioni precedenti sono equivalenti anche alla continuità da E con la topologia forte a F con la topologia debole.

Osserviamo anche che la topologia debole non è mai metrizzabile (o almeno non in maniera che lo spazio sia completo) in dimensione infinta per Baire, perché le palle sono chiusi a parte interna vuota e si può scrivere lo spazio come $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Teorema 11.2 (Eberlein-Šmulian)**.** E è riflessivo se e solo se B_E è debolmente sequenzialmente compatta.

Dunque, usando questo risultato in combinazione con Kakutani, abbiamo che in un Banach le palle sono debolmente compatte se e solo se debolmente sequenzialmente compatte. Per la topologia debole⊛ la questione è diversa: mentre per Banach-Alaoglu la palla unitaria è sempre debole⊛-compatta, la successione $\left\{e^j\right\}$ vista immersa in $(\ell^\infty)^*$ non ha sottosuccessioni debole⊛-convergenti, perché per una sottosuccessione convergente $\left\{e^{j_k}\right\}$ si dovrebbe avere che $\left\{e^{j_k}(y)\right\} = \{y_{j_k}\}$ converge per ogni $y \in \ell^\infty$.

Dai risultati visti la volta scorsa discendono anche i seguenti corollari:

[22] Dimostrazione alternativa: basta mostrare che per ogni $f \in E^*$ è continua la composizione $v_f \circ J\colon E \to \mathbb{R}$, perché quando una topologia su X è definita come la meno fine che rende continue certe mappe $f_i\colon X \to Y_i$, per controllare che $\varphi\colon Z \to X$ è continua basta controllare che lo siano tutte le $f_i \circ \varphi$ (la dimostrazione di questo è ovvia una volta scritte le cose). Ma $v_f \circ J(x) = \langle Jx, f\rangle = f(x)$, che è continua da E con la topologia debole.

[23] È indifferente prendere la topologia prodotto delle deboli su E ed F o considerare direttamente la topologia debole di $E \times F$.

Corollario 11.3. Se M è un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo E, allora anche M è riflessivo.

Dimostrazione. La palla di M è intersezione del chiuso M e del compatto B_E, e quindi è compatta. □

Corollario 11.4. E è riflessivo se e solo se lo è E^*.

Dimostrazione. Se $E \simeq E^{**}$ allora $E^* \simeq E^{***}$. Più precisamente, se $\varphi \in E^{***}$, si verifica che questa è l'immagine di $(x \mapsto \langle \varphi, Jx \rangle) \in E^*$. Viceversa se E^* è riflessivo su E^{**} la topologia debole coincide con la debole⊛. Dato che $J(E)$ è un chiuso debole ed un denso debole⊛, J è surgettiva. □

Corollario 11.5. Se E è riflessivo, $\varphi\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è convessa, inferiormente semicontinua e $\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty$, allora ha minimo.

Dimostrazione. Per le ipotesi assunte $\{x \mid \varphi(x) \leq t\}$ è un convesso debolmente chiuso. Per riflessività la topologia debole e la debole⊛ coincidono, quindi la sua intersezione con una palla sufficientemente grande, che è compatta per Banach-Alaoglu, è chiusa in un compatto. □

11.2 Separabilità e metrizzabilità

Definizione 11.6. E è separabile se ha un denso (forte) numerabile.

Esempi di spazi separabili sono c_0, ℓ^p per $p < \infty$, $C(K)$ con K compatto. ℓ^∞ e L^∞ non lo sono, ed esistono anche spazi di Hilbert non separabili.

Proposizione 11.7. Se E^* è separabile, E è separabile.

Dimostrazione. Prendiamo un denso $\{f_n\}$ e scegliamo $x_n \in B_E$ tale che $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$. $L = \mathrm{Span}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ è chiaramente separabile, quindi basta mostrarne la densità. Per il Corollario 5.5 ci basta mostrare che, per ogni $f \in E^*$, se $f(x) = 0$ su L allora $f = 0$ su E. Data $f \in E^*$ prendiamo $f_k \to f$ e abbiamo che

$$\frac{\|f_k\|}{2} \leq f_k(x_k) = f(x_k) + (f_k - f)(x_k) = (f_k - f)(x_k) \leq \|f_k - f\| \to 0$$

e dunque $\|f\| = \lim \|f_k\| = 0$. □

Il viceversa è falso: ad esempio $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ non è separabile.

Corollario 11.8. E è riflessivo e separabile se e solo se E^* è riflessivo e separabile.

Teorema 11.9. E è separabile se e solo se la topologia debole⊛ su B_{E^*} è metrizzabile.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Sia x_n un denso numerabile in B_E. Definiamo la distanza
$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2^n} \leq \|f-g\|_{E^*}$$
e mostriamo che la topologia indotta coincide con la debole$\circledast$.

- Sia V un intorno debole$\circledast$ di $f \in B_{E^*}$, WLOG di base, cioè
$$V = \{g \in B_{E^*} \mid \forall i \leq m \ |g(y_i) - f(y_i)| < \varepsilon\}$$
per certe $y_1, \dots, y_m$ e un certo $\varepsilon > 0$. Per ogni i scegliamo per densità x_{n_i} tale che $\|x_{n_i} - y_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Ora consideriamo $U_r = \{g \mid d(g,f) < r\}$, con $r < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}}$ per ogni i fra 1 ed m. Se $g \in U_r$ abbiamo ($\|g-f\| \leq 2$)
$$|(g-f)(y_i)| \leq |(g-f)(y_i - x_{n_i}) + (g-f)(x_{n_i})| < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{n_i} d(f,g) < \varepsilon$$
e dunque $U_r \subseteq V$.
- Sia U_r un intorno metrico di f. Fissati $\varepsilon < \frac{r}{2}$ ed n, che sceglieremo in seguito, poniamo
$$V = \{g \in B_{E^*} \mid \forall i \leq n \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$
Abbiamo che
$$d(g,f) = \sum_{i\leq n} \frac{|g(x_i) - f(x_i)|}{2^i} + \sum_{i>n} \frac{|g(x_i) - f(x_i)|}{2^i} < \frac{r}{2} + \sum_{i>n} \frac{2}{2^i}$$
e per n sufficientemente grande $V \subseteq U_r$ (stiamo sempre usando $\|g-f\| \leq 2$).

"$\Leftarrow$" Se B_{E^*} è metrizzabile $U_n = \left\{ g \;\middle|\; d(0,g) \leq \frac{1}{n} \right\}$ è una base di intorni di 0 per la topologia debole$\circledast$. Per ogni n sia ora V_n un intorno della base "standard" della topologia debole$\circledast$ tale che $V_n \subseteq U_n$, cioè
$$V_n = \{g \in U_n \mid \forall y \in A_n \ |g(y)| < \varepsilon_n\} \qquad (A_n \text{ finito})$$
Poniamo $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dato che $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(D)$ è denso in $\mathrm{Span}(D) = L$ ed è numerabile, ci basta mostrare che L è denso. Se $f(x) = 0$ su L, allora $\forall n \, \forall x \in A_n \ f(x) = 0$, per cui per ogni n abbiamo $f \in V_n \subseteq U_n$. Dunque $f = 0$ e L è denso per il Corollario 5.5.

$\square$

Corollario 11.10. Se E è separabile B_{E^*} è sequenzialmente compatta nella topologia debole$\circledast$.

Da questo segue che ℓ^∞ non è separabile (anche se avevamo già visto una dimostrazione diretta).

Corollario 11.11. Se E è riflessivo B_E è debolmente sequenzialmente compatta.

Dimostrazione. Sia x_n una successione in B_E. $L = \overline{\text{Span}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})} < E$ è riflessivo e separabile, dunque lo è anche il suo (pre)duale. Quindi $B_L = B_E \cap L$ è metrizzabile e debolmente compatta per Kakutani (L è riflessivo perché sottospazio chiuso di un riflessivo), e dunque è debolmente sequenzialmente compatta, per cui x_n ha una sottosuccessione debolmente convergente in L, e a maggior ragione in E (ogni funzionale su L è restrizione di uno su E per Hahn-Banach). □

Questo è meta Eberlein-Šmulian. Osserviamo che un esempio di successione limitata senza sottosuccessioni debolmente convergenti in ℓ^1 è $\{e^j\}$. Un analogo del Teorema precedente è

Teorema 11.12. E^* è separabile se e solo se la topologia debole su B_E è metrizzabile.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Come nel Teorema precedente.

"$\Leftarrow$" Il ragionamento precedente funziona solo sui funzionali in $J(E)$, ma questo è comunque sufficiente (non andiamo oltre).

□

12 24/10 - Esercitazione

In ℓ^1 la convergenza forte e la debole coincidono anche se le topologie sono diverse.

Esempio 12.1. $L^p(\Omega)$ è separabile per $p \neq \infty$, $C^0(K)$, con K compatto, è separabile, ℓ^p è separbile se $p \neq \infty$. L^p è riflessivo per $1 < p < \infty$.

Esercizio 12.2. Sia $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}$. Dire se converge forte, debole, debole⊛ in $L^p(\mathbb{R})$ per $1 < p < \infty$.

Dimostrazione. f_n non converge forte perché dovrebbe convergere a 0 (lo fa puntualmente) ma la norma di f_n è costantemente 1. La topologia debole e debole⊛ coincidono perché per i nostri p lo spazio L^p è riflessivo. Per riflessività la palla è debolmente sequenzialmente compatta. Se $g \in L^q$, allora

$$T_g(f_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_n^{n+1} g \to 0$$

e dunque $f_n \rightharpoonup 0$. □

Per $p = 1$ non c'è nemmeno convergenza debole (basta prendere l'indicatrice dell'unione degli intervalli che vanno da $2n$ a $2n + 1$).

Esercizio 12.3. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n \colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ non negative. Allora Se $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 1)$ si ha $f_n \to 0$ in $L^1(0, 1)$.

Proposizione 12.4. Se H è un Hilbert, $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, allora $x_n \to x$.

Dimostrazione. Dato che $\langle \cdot, x\rangle \in H^*$

$$\langle x_n - x, x_n - x\rangle = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2} + \|x\|^2 - 2\underbrace{\langle x_n, x\rangle}_{\to\|x\|^2}$$

□

Esercizio 12.5. Sia f_n una successione in $L^2(0, 1)$ tale che $f_n \rightharpoonup f$ in L^2 e $f_n^2 \rightharpoonup f^2$ in L^1. Allora $f_n \to f$ in L^2.

Dimostrazione. Basta mostrare che $\|f_n\|_{L^2}^2 \to \|f\|_{L^2}^2$. Basta considerare il funzionale $T \in (L^1)^*$ definito da $T(h) = \int_0^1 1 \cdot h$ su f_n^2. □

Esercizio 12.6. Sia X separabile e $C \subseteq X^*$. Allora C è compatto debole⊛ se e solo se è debole⊛-sequenzialmente compatto.

Dimostrazione. Se C non è limitato esiste $\{f_n\} \subset C$ tale che $\|f_n\| \to \infty$, e questa non ammette sottosuccessioni convergenti deboli⊛ per Banach-Steinhaus. Dunque se C è sequenzialmente compatto è limitato, cioè è incluso in una palla, dove la topologia è metrizzabile, e quindi C è compatto debole⊛.

Se C è compatto debole⊛, comunque scelto $T \in J(X)$ abbiamo che $T(C)$ è compatto in $\mathbb{R}$, quindi $T(C)$ è limitato. Dunque C è limitato per Banach-Steinhaus. □

13 28/10

13.1 Palle in dimensione infinita

Lemma 13.1 (Riesz)**.** Sia $M \neq E$ un sottospazio chiuso di uno spazio vettoriale normato E. Allora $\forall\varepsilon\ \exists x_\varepsilon$ tale che $\|x_\varepsilon\| = 1$ e $\operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) \geq 1 - \varepsilon$.

Dimostrazione. Se $x \in E \setminus M$ e $d = \operatorname{dist}(x, M)$, fissato ε sappiamo esistere $m_\varepsilon \in M$ tale che $d \leq \|x - m_\varepsilon\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$ per definizione di $\operatorname{dist}(x, M) = \inf_{m\in M} \|x - m\|$. Inoltre, dato che M è un sottospazio, per ogni $m \in M$

$$\left\| m - \frac{x - m_\varepsilon}{\|x - m_\varepsilon\|} \right\| = \frac{\|\bar{m} - x\|}{\|x - m_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{\|x - m_\varepsilon\|} \geq 1 - \varepsilon$$

Dunque $x_\varepsilon = \frac{x-m_\varepsilon}{\|x-m_\varepsilon\|}$ soddisfa quanto richiesto. □

Se E è un Hilbert, $x \in M^\perp \cap \partial B_E \Rightarrow \|x\| = \operatorname{dist}(x, M) = 1$.

Corollario 13.2. $\overline{B_E}$ è compatta se e solo se E ha dimensione finita.

Dimostrazione. In dimensione finita le palle sono compatte. Se la dimensione è infinita, scelgo $x_1 \in \partial B_E$, definisco $E_1 = \langle x_1 \rangle < E$ chiuso, fisso $x_2 \in \partial B_E$ tale che $\operatorname{dist}(x_2, E_1) = \frac{1}{2}$ grazie al lemma precedente, considero $E_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$, e così via trovo una catena di sottospazi $E_n < E$ chiusi tali che $\operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Quindi $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ e la successione non ha sottosuccessioni di Cauchy. □

13.2 Ortogonalità in spazi di Banach

Definizione 13.3. Se M è un sottospazio di uno spazio di Banach E, definiamo il suo *ortogonale* come

$$M^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in M \ f(x) = 0\} < E^*$$

questo è un sottospazio chiuso, che è anche chiuso debole perché convesso. Se $N < E^*$ invece definiamo il suo ortogonale come

$$N^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in N \ f(x) = 0\} < E$$

che è sempre un sottospazio chiuso.

Proposizione 13.4. Sia $M < E$. Allora $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$. Se invece $N < E^*$, allora $(N^\perp)^\perp \supseteq \overline{N}$.

Dimostrazione. Sia $u \in M$. Allora $\forall f \in M^\perp \ f(u) = 0$, e quindi $u \in (M^\perp)^\perp$. Per chiusura ho che $(M^\perp)^\perp = \overline{(M^\perp)^\perp} \supseteq \overline{M}$ (un ortogonale è chiuso perché intersezione di kernel). Il discorso analogo si fa per N. Mostriamo l'uguaglianza per M. Supponiamo che esista $u \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$. Allora esiste $f \in E^*$ che separa u da $\overline{M}$, cioè $\forall x \in \overline{M} \ f(x) = 0$ (è un sottospazio) e $f(u) > 0$. Dunque $f \in M^\perp$, e $u \notin (M^\perp)^\perp$ contro l'ipotesi. Questo funziona dando anche l'altra inclusione per N se lo spazio E è riflessivo. □

È vero che

Proposizione 13.5. $(N^\perp)^\perp$ è la chiusura di N rispetto alla topologia debole⊛ di E^*.

Dimostrazione. Omessa. □

Esempio 13.6. Sia $E = \ell^1$, $E^* = \ell^\infty$ e $N = c_0 < \ell^\infty$, che è chiuso. Si ha

$$N^\perp = \left\{ u \in E^* \,\middle|\, \forall v \in c_0 \sum u_n v_n = 0 \right\} = \{0\} \Rightarrow (N^\perp)^\perp = \ell^\infty$$

questo dipende dal fatto che c_0 è debole⊛-denso.

Proposizione 13.7. Se $G, H < E$ sono chiusi, allora

1. $G \cap H = (G^\perp + H^\perp)^\perp$
2. $G^\perp \cap H^\perp = (G + H)^\perp$
3. $(G \cap H)^\perp \supseteq \overline{G^\perp + H^\perp}$
4. $(G^\perp \cap H^\perp)^\perp = \overline{G + H}$

Dimostrazione. Notiamo subito che 1⇒3 e che 2⇒4 per la proposizione precedente. Mostriamo 1. Se $u \in G \cap H$, allora $\forall f \in G^\perp, h \in H^\perp$, abbiamo $(\alpha f + \beta h)(x) = 0$, e quindi $u \in (G^\perp + H^\perp)^\perp$. Dunque $G \cap H \subseteq (G^\perp + H^\perp)^\perp$. Viceversa $G^\perp \subseteq G^\perp + H^\perp$ e $(G^\perp + H^\perp)^\perp \supseteq G^{\perp^\perp} = G$ per chiusura, e analogamente per H. La 2 si mostra analogamente. □

In generale la somma di sottospazi chiusi non è chiusa (nemmeno negli Hilbert). È facile nei casi di dimensione o codimensione finita.

Esercizio 13.8. Trovare due sottospazi del genere in ℓ^2.

Proposizione 13.9. Se $G, H < E$ sono chiusi, allora $G + H$ è chiuso se e solo se $G^\perp + H^\perp$ è chiuso, se e solo se $(G \cap H)^\perp = G^\perp + H^\perp$, se e solo se $(G^\perp \cap H^\perp)^\perp = G + H$.

Dimostrazione. Omessa. □

13.3 Operatori aggiunti

Studieremo anche operatori non limitati, ad esempio perché uno di questi è la derivata seconda.

Definizione 13.10. Siano E, F spazi di Banach. Sia $A\colon \operatorname{dom}(A) \to F$ lineare (non necessariamente continuo), con $\operatorname{dom}(A) < E$ dominio di A, che supponiamo denso in E. Definiamo il domino dell'*aggiunto* $\operatorname{dom}(A^*) < F^*$ come

$$\operatorname{dom}(A^*) = \{v \in F^* \mid \exists c\ \forall u \in \operatorname{dom}(A)\ \underbrace{v(Au)}_{\langle v, Au\rangle} \le c\,\|u\|_E\}$$

e definiamo l'*aggiunto* $A^*\colon \operatorname{dom}(A^*) \to E^*$ come

$$\langle A^* v, u\rangle : = \langle v, Au\rangle \le c\,\|u\|_E$$

per gli $u \in \operatorname{dom}(A)$, dopodiché lo estendiamo con Hahn-Banach (perché vogliamo che A^*v sia definito su tutto E) e abbiamo $\forall u \in E\ \langle A^*v, u\rangle \le c\,\|u\|_E$, e l'estensione è unica per densità. Dunque $A^*v \in E^*$.

Osserviamo che

Proposizione 13.11. Se $A \in L(E, F)$ (cioè se è continuo), allora

- $\mathrm{dom}(A) = E$
- $\mathrm{dom}(A^*) = F^*$
- $A^* \in L(F^*, E^*)$
- $\|A\| = \|A^*\| \Rightarrow$ l'aggiunto è un'isometria lineare $*\colon L(E, F) \to L(F^*, E^*)$.
- $A, B \in L(E, F) \Rightarrow (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ (i coniugati sono per il caso complesso)
- se A è invertibile con $A^{-1} \in L(F, E)$, allora A^* è invertibile e $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Proposizione 13.12. Se A è chiuso (cioè ha grafico chiuso) e $\mathrm{dom}(A)$ è denso in E, allora sono equivalenti:

1. $A \in L(E, F)$
2. $A^* \in L(F^*, E^*)$
3. $\mathrm{dom}(A) = E$
4. $\mathrm{dom}(A^*) = F^*$

Dimostrazione. Omessa. La parte difficile è 2⇒1, per il resto si dovrebbe usare il Teorema del grafico chiuso. □

Proposizione 13.13. Se A è chiuso e $\mathrm{dom}(A)$ è denso, allora A^* è chiuso.

Dimostrazione. Vedi lezione 15. □

Esempio 13.14. Se $A\colon \ell^1 \to \ell^1$ è l'operatore $(Ax)_n = \frac{x_n}{n}$, abbiamo

$$\|Ax\|_{\ell^1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|}{n} \leq \|x\|_{\ell^1}$$

visto che[24] $A \in L(\ell^1)$ si ha $A^* \in L(\ell^\infty)$ e

$$\sum v_n \frac{x_n}{n} = \langle v, Ax \rangle = \langle A^* v, x \rangle \Rightarrow (A^* v)_n = \frac{v_n}{n}$$

Abbiamo $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(A^*) = \{0\}$ e

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ v \;\middle|\; \sum n\, |v_n| < \infty \right\}$$

che è denso ma non esaurisce ℓ^1, e quindi non è chiuso.

[24] Si intende $L(\ell^1, \ell^1)$.

Esempio 13.15. Sia $s\colon \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore di shift definito come $(s(u))_n = u_{n+1}$.

$$\|s(u)\|_{\ell^2}^2 = \sum_n s(u)^2 = \sum u_{n+1}^2 = \|x\|_{\ell^2}^2$$

dunque s è limitato. Capiamo chi è $s^* \in L(\ell^2)$:

$$\sum_n (s^*(u))_n u_n = \langle s^*(u), u\rangle = \langle v, s(u)\rangle = \sum_n v_n u_{n+1}$$

quindi $(s^*(v))_n$ è v_{n+1} se $n > 1$ e 0 per $n = 1$. Questo operatore non è autoaggiunto, al contrario di quello dell'esempio precedente (quando ristretto ad ℓ^2). Si ha anche

$$\operatorname{Ker}(s) = \left\{u \in \ell^2 \mid \forall n > 1\ u_n = 0\right\}$$

mentre l'immagine è banalmente tutto. Quindi l'operatore di shift è surgettivo ma non iniettivo, mentre il suo aggiunto è iniettivo, ma la sua immagine è

$$\operatorname{Im}(s^*) = \{u \mid u_1 = 0\} = \operatorname{Ker}(s)^\perp$$

inoltre

$$\operatorname{Im}(s)^\perp = \operatorname{Ker}(s^*) = \{0\}$$

14 30/10 - Esercitazione

Esempio 14.1. Sia $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$ la funzione indicatrice dell'intervallo.

- Controlliamo la limitatezza uniforme $\|f_n\|_{L^p(\Omega)}$.
- Controlliamo la convergenza puntuale (se converge fortemente a meno di sottosuccessioni converge puntualmente).

Mostriamo che

- f_n non converge forte in $L^p(\Omega)$ perché non è di Cauchy.
- $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $\mathbb{R} \ni p > 1$

  Idea: conosco il duale di $L^p(\Omega)$ e per ogni $g \in L^q(\Omega)$ vale $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f^\infty(x)g(x)\,dx$. Si vede che $f^\infty \equiv 0$ è il limite debole. Questo succede se e solo se $\int_n^{n+1} g(x)\,dx \xrightarrow{x\to\infty} 0$, ma

$$\left|\int_n^{n+1} g\right| \le \int_n^{n+1} |g| \le \left(\int_n^{+\infty} |\chi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_n^{+\infty} |g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

E dato che $g \in L^q(\Omega)$ allora

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} |g|^q = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} |g|^q \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{n} |g|^q \, dx + \int_{n}^{+\infty} |g|^q \, dx$$

e quindi $\int_n^{+\infty} |g|^q \, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Per $p = 1$ f_n non converge debolmente a 0, perché $T(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dx \in (L^1(\mathbb{R}))^*$ ($g \equiv 1$ nel teorema di dualità). Più complicato è vedere che 0 è l'unico candidato limite debole.

Studiamo la convergenza debole in $L^\infty(\Omega)$ (non conosco il duale[25]).

Dico che $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$. Fisso un $T \in (L^\infty(\mathbb{R}))^*$. Definisco

$$a_n = \sup \left\{ |T(f)| \;\middle|\; \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le 1, \operatorname{supp}(f) \subseteq [n, n+1] \right\}$$

Dato che $\|T\|_{(L^\infty)^*} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |T(f)|$, vale chiaramente $\forall n$ $a_n \le \|T\|_{(L^\infty)^*}$. Inoltre per ogni n vale $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\|f_n\|_{L^\infty} = 1$ e $\operatorname{supp}(f_n) \subseteq [n, n+1]$, quindi $|T(f_n)| \le a_n$. Dimostro che $a_n \to 0$, e questo implica che $f^\infty \equiv 0$ è il limite debole. Per assurdo, supponiamo che esista a_{n_k} tale che $a_{n_k} \ge 2\delta > 0$ per un qualche $\delta > 0$. Dato che $a_{n_k} = \sup \ldots$, allora esiste $h_{n_k} \in L^\infty\mathbb{R}$ tale che $\|h_{n_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$, $\operatorname{supp}(h_{n_k}) \subseteq [n_k, n_k + 1]$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $|T(h_{n_k})| \ge \delta > 0$. Poniamo

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{n_k}(x)$$

Ora per linearità si ha $\forall N \in \mathbb{N}$

$$T\left(\sum_{k=1}^{N} h_{n_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} T(h_{n_k}) \ge N \cdot \delta$$

dunque $T(g^N) \ge N\delta$ ma $\left\|g^N\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ e per questo avrei l'assurdo $\|T\|_{L^\infty} = \infty$. Dunque a_n deve andare a 0.

Su ℓ^1 convergenza debole e forte coincidono. Su $L^1(\mathbb{R})$ no.

Esempio 14.2. Consideriamo $L^1(0, 2\pi)$ ed $f_n(x) = \sin(nx) \in L^1(0, 2\pi)$ (è limitata e quindi sta in tutti gli L^p). Per $p > 1$ tutte le successioni limitate sono debolmente convergenti. Comunque f_n non converge forte perché non ha sottosuccessioni che convergono puntualmente (neanche per $p > 1$). In ogni caso, anche in $L^1(0, 2\pi)$, $f_n \rightharpoonup 0$. Mostriamolo:

1. Mostro che $\forall g \in C^1([0, 2\pi])$ si ha $\int_0^{2\pi} f_n(x) g(x) \, dx \to 0$.

2. Uso la densità di $C^1([0, 2\pi])$ in $C^0([0, 2\pi])$ e la limitatezza $\|f_n\|_{L^1} \le 1$ per ottenere che $\forall g \in C^0([0, 2\pi])$ $\int_0^{2\pi} f_n g \to 0$.

[25] In realtà è tipo le misure di Radon, ma è un cannone teorico.

3. Dimostro che per ogni $A \subset [0, 2\pi]$ misurabile $\int_0^{2\pi} f_n \cdot \chi_A \, dx \to 0$. Per linearità ne segue che è vero rimpiazzando χ con una qualunque funzione semplice φ.

4. Uso la densità delle funzioni semplici in $L^\infty([0, 2\pi])$.

1. (Lemma di Riemann-Lebesgue) $\int \sin(nx) g(x) \, dx \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Si vede integrando per parti e maggiorando con $\|g'\|_\infty$ (qua serve l'ipotesi C^1).

2. Fissata $g \in C^0([0, 2\pi])$, mostriamo che $\int f_n g \to 0$. $\forall \varepsilon > 0$ fissato esiste $\varphi \in C^1[0, 2\pi]$ tale che $\|g - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

$$\int f_n g = \int f_n (g - \varphi) + \int f_n \varphi$$

l'integrale più a destra va a 0 per il punto precedente, inoltre

$$\left| \int_0^{2\pi} f_n (g - \varphi) \, dx \right| \leq \|g - \varphi\|_\infty \int |f|_n \leq \dots$$

3. Posso approssimare in L^1 una funzione caratteristica χ_A con una funzione continua. Questo per l'interna-esterna regolarità della misura di Lebesgue. Cioè esistono un aperto U ed un compatto K tale che $U \supset A \supset K$ e $m(U \setminus K) < \varepsilon$ (con m misura di Lebesgue). Per il Lemma di Urysohn esiste $\varphi \colon [0, 2\pi] \to [0, 1]$ continua che vale 1 sul complementare di U e 0 su K. A questo punto

$$\int f_n \chi_A = \int_A (f_n (\chi_A - \varphi)) + \underbrace{\int f_n \varphi}_{\to 0}$$

$$\left| \int f_n (\chi_A - \varphi) \right| \leq \int |\chi_A - \varphi| \, dx \leq m(U \setminus K) \leq \varepsilon$$

4. Segue per densità in L^∞. Data $g \in L^\infty([0, 2\pi])$, fissato $\varepsilon > 0$, scelgo φ semplice tale che $\|g - \varphi\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$.

Dunque $\{\sin(nx)\}$ in $L^1([0, 2\pi])$ non converge forte, non converge puntualmente, ma converge debolmente. La non-convergenza puntuale è necessaria, perché

Teorema 14.3 (Vitali)**.** Convergenza puntuale e convergenza debole implicano convergenza forte in L^1.

Esempio 14.4. In uno spazio non riflessivo esistono successioni che convergono debolmente⊛ ma non debolmente. Un esempio è $\{f_j\} = \{e_j\}$ vista in ℓ^1, che non è riflessivo ed è il duale di c_0. Si va in porto con i soliti discorsi. Ad esempio se consideriamo $L^\infty[0, 2\pi]$ si ha che $f_n(x) = \sin(nx) \underset{*}{\rightharpoonup} 0$ ma non converge debolmente. La convergenza debole⊛ si vede allo stesso modo di prima. Per vedere che non converge debolmente dobbiamo esibire un adeguato funzionale $T\colon L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineare e continuo. Fissiamo x_0 tale che $\frac{\pi}{x_0} \notin \mathbb{Q}$ e consideriamo il funzionale T che estende (usando Hahn-Banach) $\tilde{T}(f) = f(x_0)$, definito per le $f \in L^\infty([0, 2\pi]) \cap C^0([0, 2\pi])$.

Definizione 14.5. T è chiuso se il grafico

$$G(T) = \{(u, Tu) \mid u \in \operatorname{dom}(T)\}$$

è chiuso in $X \times Y$.

Esempio 14.6. Un operatore lineare chiuso ma non limitato è dato da $X = C^0([0, 1])$, $\operatorname{dom}(T) = C^2([0, 1])$ e

$$T(u) = u''$$

Ora $C^2([0, 1]) \subsetneq C^0([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ è denso e $T\colon \operatorname{dom}(T) \to X$. T non è limitato perché trovo funzioni C^2 di norma unitaria con derivata seconda arbitrariamente alta (esercizio). T tuttavia ha grafico chiuso perché fissata $\{u_n\} \subseteq C^2$ che tende a u in $\|\cdot\|_\infty$ e $u_n'' \to v$ (sempre secondo $\|\cdot\|_\infty$) mostro che $u \in C^2$ e $v = u''$. u_n'' converge uniformemente a v e quindi $\int_0^x u_n''(t)\,dt \to \int_0^x v(t)\,dt$. Tuttavia questo è $u_n'(x) - u_n'(0)$. Vediamo che u è C^2.

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt = u_n(0) + \int_0^x \left[u_n'(0) + \int_0^t u_n''(s)\,ds\right] dt$$

mi basta vedere che $u_n'(0)$ converge (a meno di sottosuccessioni). Per mostrare questo applico Ascoli-Arzelà a $\{u_n'\}$. Questo perché u_n' ha derivata convergente, quindi limitata e u_n' è perciò equicontinua (provare a dimostrare l'equilimitatezza).

Esercizio 14.7. 1 14 del Brezìs. Fornisce due spazi chiusi la cui somma non è chiusa.

15 31/10

15.1 Ancora sull'aggiunto

Proposizione 15.1. Se $T \in L(E, F)$, allora esiste $T^{**} \in L(E^{**}, F^{**})$ e $T^{**}_{|E} = T$.

Proposizione 15.2. Se T è chiuso e $\mathrm{dom}(T)$ è denso, allora

1. T^* è chiuso[26]
2. se F è riflessivo $\mathrm{dom}(T^*)$ è denso.

Dimostrazione. 1. $G(T) < E \times F$ è chiuso per ipotesi, inoltre $G(T)^\perp < E^* \times F^* = (E \times F)^*$ è anche chiuso. Consideriamo $J\colon F^* \times E^* \to E^* \times F^*$ definita come $J(u,v) = (-v,u)$. Per mostrare che T^* è chiuso mostriamo che $J(G(T^*)) = G(T)^\perp$. Abbiamo

$$G(T)^\perp = \{(f,g) \in E^* \times F^* \mid \forall u \in \mathrm{dom}\, T\ f(u) + g(Tu) = 0\}$$

Quindi

$$\begin{aligned}(f,g) \in J(G(T^*)) &\Leftrightarrow (g,-f) \in G(T^*) \Leftrightarrow f + T^*g = 0\\ &\Leftrightarrow \forall u \in \mathrm{dom}\, T\ f(u) + \underbrace{g(Tu)}_{T^*g(u)} = 0 \Leftrightarrow (f,g) \in G(T)^\perp\end{aligned}$$

2. Ci basta mostrare che per ogni $\varphi \in F^{**} = F$ tale che $\forall v \in \mathrm{dom}\, T^*\ v(\varphi) = 0$ allora $\varphi = 0$. Se per assurdo $\varphi \neq 0$, allora $(0,\varphi) \notin G(T)$; dato che $G(T)$ è un sottospazio chiuso di $E \times F$ possiamo separarli con $(f,v) \in E^* \times F^*$. Quindi abbiamo $v(\varphi) \neq 0$ e, per ogni $u \in \mathrm{dom}\, T$, $f(u) + v(Tu) = 0$. Da quest'ultima cosa otteniamo però $v \in \mathrm{dom}\, T^*$, per cui per ipotesi $v(\varphi) = 0$ e questo è assurdo.

□

Se F non è riflessivo in generale $\mathrm{dom}\, T^*$ è solo un denso debole⊛[27].

Corollario 15.3. Se E, F sono riflessivi e T è chiuso, allora esiste T^{**} e coincide con T.

Dimostrazione. L'esistenza segue dal fatto che, per la Proposizione precedente, $\mathrm{dom}\, T^*$ è denso. Si mostra che il dominio è uguale o, in alternativa, che i grafici sono uguali: infatti, se J è definita come nella Proposizione precedente, $J(G(T^{**})) = G(T^*)^\perp$, e inoltre

$$J(G(T^*)) = G(T)^\perp \Rightarrow (JG(T^*))^\perp = G(T)^{\perp\perp} = G(T)$$

Dunque $G(T^{**}) = J^{-1}(G(T^*)^\perp)$, e questo è uguale (esercizio) a $(JG(T^*))^\perp$, cioè a $G(T)$. □

Corollario 15.4. Se F è riflessivo esiste $T^{**}\colon E^{**} \to F$ ed estende T.

[26] Qui sembra che l'ipotesi T chiuso non si usi; in effetti il Brezìs non la assume: anche se $G(T)$ non è chiuso il suo ortogonale lo è perché intersezione di Ker di funzioni continue.

[27] Si vede con la dimostrazione di prima usando il fatto che $M^{\perp\perp}$ è la chiusura debole⊛ di M.

Esempio 15.5. Un operatore non limitato in ℓ^2 è $(Tu)_n = nu_n$, definito su

$$\operatorname{dom} T = \left\{ u \in \ell^2 \;\middle|\; \sum n^2 u_n^2 < \infty \right\}$$

che è un denso perché contiene le successioni definitivamente nulle. Questo operatore ha a che fare con gli operatori di derivazione in $L^2(-\pi, \pi) \simeq \ell^2$. T è chiuso: se $u^k \to u$ e $w^k = Tu^k \to w$ abbiamo (a meno di sottosuccessioni), per ogni n, $u_n^k \to u_n$ e $(Tu^k)_n = nu_n^k \to w_n$. Dunque $w_n = nu_n$ e $w = Tu$. Inoltre abbiamo

$$\langle u, T^* v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \sum (nu_n) v = \sum u_n (nv_n)$$

e quindi $T^* = T$. T si dice *autoaggiunto.*

L'operatore $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ definito da $(Tu)_n = a_n u_n$ è chiuso con dominio denso. Se $|a_n| \leq C$ si ha $T \in L(\ell^2)$. Per questa famiglia di operatori esiste una base ortonormale di ℓ^2 (gli e^i) fatta di autovettori di T, dato che $Te^i = a_i e^i$.

Esempio 15.6. Consideriamo $(Tu)_n = nu_n$ come operatore $T\colon \ell^1 \to \ell^1$. T è chiuso, e il suo aggiunto $T^*\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ è anche chiuso. Il suo dominio è

$$\operatorname{dom} T^* = \{ u \in \ell^\infty \mid |nu_n| \leq c \}$$

e la sua chiusura è c_0. La sua chiusura debole è la stessa di c_0, cioè ℓ^∞.

Proposizione 15.7. Sia $T\colon E \to F$ chiuso e $\overline{\operatorname{dom} T} = E$. Allora

1. $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$
2. $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$
3. $(\operatorname{Ker} T)^\perp \supseteq \overline{\operatorname{Im} T^*}$
4. $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$

Dimostrazione. Notiamo subito che le prime due implicano le ultime per la Proposizione 13.4. Poniamo

- $H = E \times F$
- $G = G(T) < H$ (che è chiuso)
- $L = E \times \{0\}$

Valgono

- $G \cap L = \operatorname{Ker} T \times \{0\}$
- $L + G = E \times \operatorname{Im} T$

- $G^\perp \cap L^\perp = \{0\} \times \operatorname{Ker} T^*$
- $G^\perp + L^\perp \operatorname{Im} T^* \times F^*$

Da cui, per la Proposizione 13.7 (stiamo usando che G ed L sono chiusi), otteniamo

$$\{0\} \times (\operatorname{Im} T)^\perp = (E \times \operatorname{Im} T)^\perp = (G + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp = \{0\} \times \operatorname{Ker} T^*$$

e questo prova il secondo punto. Per il primo

$$(\operatorname{Im} T^* \times F^*)^\perp = (\operatorname{Im} T^*)^\perp \times \{0\} = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L = \operatorname{Ker} T \times \{0\}$$

□

Nel terzo punto l'inclusione può essere stretta: prendiamo l'operatore $T \in L(\ell^1)$ definito da $(Tu)_n = \frac{u_n}{n}$. Abbiamo $T^* \in L(\ell^\infty)$ e $(T^*u)_n = \frac{u_n}{n}$. T è iniettivo, dunque $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \ell^\infty$, mentre $\operatorname{Im} T^* = \{u \in \ell^\infty \mid \{nu_n\} \in \ell^\infty\}$ è denso in c_0, dunque la sua chiusura è c_0. Inoltre T è denso, cioè la chiusura della sua immagine è densa.

Proposizione 15.8. Sia $T \colon E \to F$ chiuso con dominio denso. Allora sono equivalenti

1. $\operatorname{Im} T$ è chiuso
2. $\operatorname{Im} T^*$ è chiuso
3. $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$
4. $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \operatorname{Im} T$

15.2 Operatori compatti

Definizione 15.9. Un operatore $T \in L(E, F)$ è *compatto* se $\overline{T(B_E)}$ è compatto in F. Indichiamo il sottospazio degli operatori compatti con $K(E, F) < L(E, F)$. Un operatore ha *rango finito* se $\dim \operatorname{Im} T < \infty$.

Osserviamo che se T ha rango finito allora ha immagine chiusa ed è compatto.

Proposizione 15.10. $K(E, F)$ è chiuso in $L(E, F)$.

Dimostrazione. Se $T_n \to T$ in $L(E, F)$, con i T_n compatti, allora per ogni ε esiste n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ si ha $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Per vedere che $T(B_E)$ ha chiusura compatta ci basta mostrare che è totalmente limitato. Dato che $T_n(B_E)$ è ricoperta da $N_{\varepsilon,n}$ palle di raggio ε centrate in certi $T_n x_i$, fissato $\bar{n} > n_\varepsilon$, $T(B_E)$ è ricoperta da $N_{\varepsilon,\bar{n}}$ palle di raggio 3ε centrate in Tx_i; questo si vede facilmente scrivendo

$$\|Tx - Tx_i\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - Tx_i\|$$

□

Corollario 15.11. Se $T = \lim T_n$ e i T_n hanno rango finito T è compatto.

Il viceversa è falso, ma è vero con ipotesi aggiuntive.

Esercizio 15.12. Sia a_n una successione e $T\colon \operatorname{dom} T \subset \ell^2 \to \ell^2$ definito da $(Tu)_n = a_n u_n$. Caratterizzare le a_n per cui T è compatto.

16 04/11

16.1 Ancora sugli operatori compatti

Proposizione 16.1. Se $T \in K(E,F)$ è compatto e F è di Hilbert, allora esiste una successione T_n di operatori di immagine finita[28] che converge a T in $L(E,F)$.

Dimostrazione. Componendo l'operatore con opportune proiezioni. Per compattezza di $\overline{T(B_E)}$, possiamo trovare per ogni $n \in \mathbb{N}$ delle $f_i \in F$ tale che

$$\overline{T(B_E)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B\left(f_i, \frac{1}{n}\right)$$

Se P_n è la proiezione ortogonale $F \to \langle f_1, \ldots, f_N \rangle$, $T_n = P_n \cdot T$ ha rango finito. Se $x \in B_E$ si ha

$$|T(x) - T_n(x)| \leq |T(x) - f_i| + |f_i - T_n(x)| \leq 2\,|T(x) - f_i| \leq \frac{2}{n}$$

perché $T(x) \in B\left(f_i, \frac{1}{n}\right)$ e le proiezioni sono 1-Lipschitziane, e quindi T_n converge a T. □

Proposizione 16.2. $T \in K(E,F)$ se e solo se $T^* \in K(F^*, E^*)$.

Dimostrazione. Mostriamo il "⇒", cioè che $\overline{T^*(B_{F^*})}$ è compatta in E^*. Consideriamo una generica successione $v_n \in B_{F^*}$. Sia $C = \overline{T(B_E)} \subseteq F$, che è compatto. Dato che le v_n stanno nella palla unitaria e che C in quanto compatto è limitato, le $v_{n|C}$ sono equilimitate, e dato che sono lineari sono anche equicontinue. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà esiste allora una sottosuccessione (che, a meno di passare a sottosuccessioni, per noi sarà sempre $v_{n|C}$) uniformemente convergente ad una certa $v_{|C}$. Allora

$$\|T^*(v_m) - T^*(v_n)\| = \sup_{u \in B_E} |T^* v_m(u) - T^* v_n(u)| = \sup_{u \in B_E} |v_m(T(u)) - v_n(T(u))|$$
$$\leq \sup_{y \in C} |v_n(y) - v(y)| + \sup_{y \in C} |v_m(y) - v(y)| \leq \varepsilon$$

[28] Nel senso che ha dimensione finita.

Per il "$\Leftarrow$" sia $T^* \in K(F^*, E^*)$. Per il punto precedente $T^{**} \in K(E^{**}, F^{**})$ e quindi $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ è compatto in F^{**}. Dato che $T^{**}_{|E} = T$ (T è continuo) abbiamo (le chiusure sono da intendersi in F^{**})

$$\overline{T(B_E)} = \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$$

che è compatto in F^{**}. Dato che $F < F^{**}$ è chiuso, la chiusura di $T(B_E)$ è la stessa anche in F e abbiamo la tesi. □

Il seguente Teorema può essere generalizzato a operatori fra due spazi diversi, ma per semplicità espositiva dimostreremo un risultato più debole.

Teorema 16.3 (dell'alternativa di Fredholm)**.** Sia $T \in K(E)$, con E spazio di Banach. Allora:

1. $\mathrm{Ker}(I - T)$ ha dimensione finita
2. $\mathrm{Im}(I - T)$ è chiuso
3. Valgono le precedenti sostituendo T^* a T
4. $\mathrm{Im}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)^\perp$ e $\mathrm{Im}(I - T^*) = \mathrm{Ker}(I - T)^\perp$
5. $\mathrm{Ker}(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I - T) = E$
6. $\dim(\mathrm{Ker}(I - T)) = \dim(\mathrm{Ker}(I - T^*))$

Prima della dimostrazione notiamo che

- Il punto 5 mi dice che $I - T$ è iniettivo se e solo se è surgettivo.
- Il 4 mi dice che $u - Tu = f \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker}(I - T^*)^\perp$. Se $d^* = \dim(\mathrm{Ker}(I - T^*))$, si ha $d^* < \infty$. In altre parole ho d^* relazioni di ortogonalità su f.
- Sempre dal punto 4 abbiamo che $\mathrm{Im}(I - T)^\perp = \mathrm{Ker}(I - T^*)$ e che $\mathrm{Im}(I - T^*)^\perp = \mathrm{Ker}(I - T^*)$. Inoltre $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I - T)) = \dim {}^{E}\!/_{\mathrm{Im}(I - T)} = \dim(\mathrm{Ker}(I - T^*)) = d^*$ e $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I - T^*)) = d$.

Dimostrazione.

1. $\overline{B_E} \cap \mathrm{Ker}(I - T) \subseteq \overline{B_E} \cap \overline{T(B_E)}$ che è compatto. Dunque $\mathrm{Ker}(I - T) < E$ ha dimensione finita d perché ha la palla compatta.
2. Sia $f_n \in \mathrm{Im}(I - T)$ convergente a f in E; scriviamo $f_n = u_n - T(u_n)$ per un'opportuna $u_n \in E$. Sia ora $v_n \in \mathrm{Ker}(I - T)$ tale che[29] $\|u_n - v_n\|_E = \mathrm{dist}(u_n, \mathrm{Ker}(I - T))$. Ci basta mostrare che esiste C tale che $\|u_n - v_n\| \leq C$: infatti mostrato questo, per compattezza di

[29] Qui usiamo il fatto che ha dimesione finita, altrimenti bastava mettere un 2 da qualche parte.

T, abbiamo che (a meno di sottosuccessioni) $T(u_n - v_n) \to \ell$; dunque, dato che $v_n \in \operatorname{Ker}(I-T)$, possiamo scrivere $f_n = u_n - v_n - T(u_n - v_n)$ e ottenere $u_n - v_n \to f + \ell$. Posta $g = f + \ell = \lim u_n - v_n$ vale dunque $g - T(g) = f$ e quindi $f \in \operatorname{Im}(I - T)$.

Se non esistesse una tale C possiamo scegliere una sottosuccessione tale che $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$ e definire $w_{n_k} = \frac{u_{n_k} - v_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|}$. Sempre usando il fatto che $v_{n_k} \in \operatorname{Ker}(I - T)$,

$$w_{n_k} - T(w_{n_k}) = \frac{u_{n_k} - T(u_{n_k}) - v_{n_k} + T(v_{n_k})}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} = \frac{f_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} \to 0$$

Sempre per compattezza di T si ha (a meno di un'ulteriore sottosuccessione) $T(w_{n_k}) \to w$. Ma allora per quanto sopra anche $w_{n_k} \to w$ e $w - T(w) = 0$, quindi $w \in \operatorname{Ker}(I - T)$. Ma questo è assurdo perché, per scelta dei v_n,

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(w, \operatorname{Ker}(I-T)) = \lim_{n_k \to \infty} &= \operatorname{dist}(w_{n_k}, \operatorname{Ker}(I-T)) \\ = \lim_{n_k \to \infty} \frac{\operatorname{dist}(u_{n_k}, \operatorname{Ker}(I-T))}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} &= \lim_{n_k \to \infty} \frac{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} = 1 \end{aligned}$$

3. Usando i primi due punti su T^*.

4. $I - T$ è continuo e quindi chiuso, e usando la Proposizione 15.8 otteniamo $\overline{\operatorname{Im}(A)} = \operatorname{Ker}(A^*)^\perp$, $\overline{\operatorname{Im}(A^*)} = \operatorname{Ker}(A)^\perp$, e per quanto visto in precedenza $\operatorname{Im}(A)$ e $\operatorname{Im}(A^*)$ sono chiuse.

5. Dimostriamo "iniettivo $\Rightarrow$ surgettivo". Per assurdo, sia $E_1 = \operatorname{Im}(I - T) < E$ chiuso proprio. Possiamo definire $E_n = \operatorname{Im}((I - T)^n) < E_m$ chiuso e usando l'iniettività si vede facilmente che $E_n \neq E_{n+1}$. Sia $u_n \in E_n$ una successione di vettori di norma unitaria con $\operatorname{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ (esiste per il Lemma di Riesz). Questo rimane vero per tutti gli E_m con $m > n$. Per compattezza $T(u_n) - T(u_m)$ deve andare a zero (modulo sottosuccessioni). Mostriamo che questo non succede ottenendo un assurdo:

$$\begin{aligned} &\|T(u_n) - T(u_m)\| = \Big\| \underbrace{(I-T)(u_m)}_{\in E_{n+1}} - \underbrace{(I-T)(u_n)}_{\in E_{n+1}} - \underbrace{u_m}_{\in E_{n+1}} + u_n \Big\| \\ &\geq \operatorname{dist}(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Per "surgettivo $\Rightarrow$ inettivo" abbiamo, usando quanto già dimostrato,

$$\operatorname{Im}(I-T) = E \Rightarrow \operatorname{Ker}(I-T^*) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im}(I-T^*) = E \Rightarrow \operatorname{Ker}(I-T) = \{0\}$$

6. Siano $d = \dim(\mathrm{Ker}(I-T))$ e $d^* = \dim(\mathrm{Ker}(I-T^*))$. Mostriamo prima che $d^* \leq d$. Abbiamo $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I-T)) = d^*$ e $\dim(\mathrm{Ker}(I-T)) = d$. Quindi $\mathrm{Im}(I-T)$ ha supplementare topologico F di dimensione d^*. Dato che ha dimensione finita, $\mathrm{Ker}(I-T)$ ha proiezione continua $P\colon E \to \mathrm{Ker}(I-T)$. Se per assurdo fosse $d < d^*$, esisterebbe $\Lambda\colon \mathrm{Ker}(I-T) \to F$ lineare iniettiva e non surgettiva[30]. Poniamo $S = T + \Lambda \circ P$ e notiamo che è compatto[31]. Inoltre $I - S$ è iniettiva, perché se $u \in \mathrm{Ker}(I-S)$, cioè $u - T(u) - \Lambda \circ P(u) = 0$, si ha

$$0 = \underbrace{(I-T)u}_{\in \mathrm{Im}(I-T)} - \underbrace{\Lambda \circ P(u)}_{\in F}$$

e questo succede se e solo se $(I-T)(u) = 0$ (cioè $u \in \mathrm{Ker}(I-T)$) e $\Lambda(u) = 0$ (perché $P(u) = u$) e l'inettività di Λ conclude. Per il punto precedente allora $\mathrm{Im}(I-S) = E$. Ma dato che Λ non è surgettiva e F è il supplementare di $\mathrm{Im}(I-T)$ otteniamo l'assurdo

$$\mathrm{Im}(I-S) \subseteq \mathrm{Im}(I-T) + \mathrm{Im}(\Lambda) \subsetneq E$$

Mostriamo l'altra disuguaglianza. Per il punto precedente applicato a T^* abbiamo $\dim(\mathrm{Ker}(I-T^{**})) \leq d^*$. Tuttavia $I - T^{**}_{|E} = I - T$. Perciò $\mathrm{Ker}(I-T)$ è un sottospazio di $\mathrm{Ker}(I-T^{**})$, per cui $d \leq \dim(\mathrm{Ker}(I-T^{**})) \leq d^*$.

□

16.2 Operatori di Fredholm

Da questo Teorema parte tutta una teoria (che noi non vedremo) degli *operatori di Fredholm*:

Definizione 16.4. Un operatore $T \in L(E)$, con E Banach, si dice *di Fredholm* se

- $\dim \mathrm{Ker}(T) < \infty$
- $\mathrm{Im}(T)$ è chiuso e $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T)) = \dim E/_{\mathrm{Im}(T)} = \dim \mathrm{Im}(T)^\perp < \infty$

Se T è compatto $I - T$ è di Fredholm, ma il viceversa non vale. Un controesempio è l'operatore di shift su ℓ^2, che è surgettivo ma non iniettivo, ha nucleo di dimensione 1 e immagine di codimensione 0.

Definizione 16.5. Se T è di Fredholm definiamo il suo *indice* $i(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T)) \in \mathbb{Z}$.

[30] Ovvio per ragioni di algebra lineare perché siamo su uno spazio finito-dimensionale.
[31] $\Lambda \circ P\colon E \to F$ ha rango finito.

Ad esempio l'indice dell'operatore di shift è 1 e per quanto visto l'indice degli operatori del tipo $I - T$ con T compatto è 0. In realtà gli operatori di Fredholm di indice 0 sono sostanzialmente[32] quelli di questo tipo. Si dimostra una generalizzazione del Teorema dell'alternativa:

Teorema 16.6. Se T è di Fredholm lo è anche T^* e

1. $\dim \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{codim} \operatorname{Im}(T^*)$
2. $\dim \operatorname{Ker}(T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Im}(T)$
3. $i(T) + i(T^*) = 0$.

Altri risultati che enunciamo su questi operatori sono:

Teorema 16.7. T è di Fredholm se e solo se esiste $S \in L(E)$ tale che $T \circ S = I - A$ e $S \circ T = I - B$, con A, B, compatti.

Osserviamo che se $i(T) = 0$ posso scegliere S bigettivo (invertibile), in altre parole

Corollario 16.8. T è Fredholm con indice 0 se e solo se $T = S - A$ con $S \in L(E)$ invertibile e $A \in K(E)$.

Proposizione 16.9. L'insieme $F(E)$ degli operatori di Fredholm su E è un aperto di $L(E)$ e la funzione indice è costante sulle sue componenti connesse.

Di contro $F(E)$ non è un sottospazio.

17 06/11

17.1 Spettro di operatori compatti...

Teorema 17.1 (delle Contrazioni)**.** Se $f\colon X \to X$ è una *contrazione* in uno spazio metrico completo X, cioè esiste $k < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, allora f ha un unico punto fisso.

Dimostrazione. Senza troppi dettagli:

- Per l'unicità: se x_1, x_2 sono punti fissi allora $d(x_1, x_2) \leq kd(x_1, x_2)$, e quindi $x_1 = x_2$.
- Per l'esistenza: fissato x_0 basta definire $x_{n+1} = f(x_n)$. Per ipotesi questa è di Cauchy e si vede che si il suo limite è un punto fisso.

□

Definizione 17.2. Se $T \in L(E)$, definiamo

[32] Nel senso di "a meno di composizione con un operatore invertibile (bigettivo)".

- il suo *spettro* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ non è bigettivo}\}$,
- il suo *risolvente* $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ è bigettivo}\}$,
- i suoi *valori principali* $\mathrm{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ non è iniettivo}\}$.

I valori principali vengono anche chiamati *autovalori* ($\mathrm{EV}(T)$). Se $\lambda \in \mathrm{VP}(T)$ e $0 \neq u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ diciamo che u è un *autovettore*.

Proposizione 17.3. Se T è compatto $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Per Fredholm, se $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ è iniettivo se e solo se è surgettivo. □

Proposizione 17.4. Se T è limitato, allora $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$ e $\sigma(T)$ è compatto.

Dimostrazione. Mostriamo che se $|\lambda| > \|T\|$ allora $T - \lambda I$ è bigettivo. Se $f \in E$ dobbiamo mostrare che $\exists! u \; Tu - \lambda u = f$. È sufficiente allora notare che la mappa $\varphi(u) = \frac{Tu-f}{\lambda}$ è una contrazione, perché

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \left\| \frac{T(u-v)}{\lambda} \right\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$$

Per la compattezza è sufficiente vedere che $\rho(T)$ è aperto, perché allora $\sigma(T)$ è chiuso in un compatto. Mostriamo quindi che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \subseteq \rho(T)$, cioè tale che se $\lambda' \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ l'equazione $Tu - \lambda' u = f$ ha un'unica soluzione. Siccome $T - \lambda I$ è per ipotesi invertibile,

$$Tu - \lambda' u = f \Leftrightarrow Tu - \lambda u = f + (\lambda' - \lambda)u \Leftrightarrow u = (T - \lambda I)^{-1}[f + (\lambda' - \lambda)u] = \varphi(u)$$

e scegliendo $\varepsilon < \frac{1}{\|(T-\lambda I)^{-1}\|}$ la nostra φ è una contrazione, perché

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \left\|(\lambda' - \lambda)(T - \lambda I)^{-1}(u - v)\right\| \leq \left|\lambda' - \lambda\right| \left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| \|u - v\|$$

□

Teorema 17.5. Sia E Banach di dimensione infinita e $T \in K(E)$. Allora

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$
3. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ è finito oppure è una successione convergente a 0 (equivalentemente, 0 è l'unico possibile punto di accumulazione dello spettro).

Dimostrazione. 1. Se $0 \notin \sigma(T)$ allora T è bigettiva. Allora $B_E = T \circ T^{-1}(B_E)$ è compatta (o, alternativamente, $T(B_E)$ ha parte interna non vuota), il che è assurdo perché $\dim E = \infty$.

2. Proposizione 17.3.

3. Supponiamo $\lambda_n \to \lambda$, dove $\lambda_n \neq \lambda_m \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ per $n \neq m$. Per il punto precedente $\lambda_n \in \mathrm{VP}(T)$, quindi scegliamo $e_n \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_n I)$ tale che $\|e_n\| = 1$. Definiamo poi $E_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle < E$. Ogni E_n è chiuso perché di dimensione finita e $E_n \subsetneq E_{n+1}$ perché se $m \neq n$ gli autovettori e_m ed e_n sono relativi ad autovalori diversi e non nulli. Per il Lemma di Riesz esistono quindi $u_n \in E_n \setminus E_{n-1}$ tali che $\|u_n\| = 1$ e $\mathrm{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Se, per assurdo, $\lambda \neq 0$, abbiamo, per $m < n$

$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \underbrace{\frac{(T - \lambda_n I)u_n}{\lambda_n}}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\frac{(T - \lambda_m I)u_m}{\lambda_m}}_{\in E_{m-1} \subset E_{n-1}} + u_n - u_m \right\| \geq \mathrm{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Ma per compattezza di T, a meno di sottosuccessioni, per $m = n - 1$ quella quantità dovrebbe essere infinitesima.

□

17.2 ...autoaggiunti in spazi di Hilbert

Definizione 17.6. Se H è uno spazio di Hilbert, $T \in L(H)$ è autoaggiunto se per ogni $x, y \in H$ vale $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.

Definizione 17.7. Una forma bilineare $a(u, v) \colon H \times H \to \mathbb{R}$ si dice

- *continua* se $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$
- *coerciva* se $a(u, u) \geq K \|u\|^2$
- *simmetrica* se $a(u, v))a(v, u)$.

Esempio 17.8. $\langle u, v \rangle$ è continua, simmetrica e coerciva. Se viceversa $a(u, v)$ verifica queste tre ipotesi, definisce un prodotto scalare su H con norma equivalente a quella di H, e in particolare verifica Cauchy-Schwarz.

Teorema 17.9 (Lax-Milgram)**.** Se $a(u, v)$ è una forma bilineare continua, simmetrica e coerciva, per ogni $\varphi \in H^*$ esiste un unico u che risolve

$$\forall v \in H \; a(u, v) = \varphi(v) \qquad (\text{cioè } a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle)$$

Inoltre u è l'unico minimo di $\frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u)$.

Dimostrazione. Mostriamo prima che $f(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u)$ ha un unico minimo. L'esistenza è conseguenza del fatto che f è continua e coerciva (cioè $\lim_{\|u\| \to \infty} f(u) = \infty$) e gli spazi di Hilbert sono riflessivi, per cui possiamo applicare il Corollario 11.5. Il minimo è unico perché f è strettamente convessa, dato che è somma di due funzioni convesse e $a(u,u)$ lo è strettamente perché le seguenti sono equivalenti:

$$\begin{aligned}
&a(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda a(x,x) + (1-\lambda)a(y,y)\\
&\lambda^2 a(x,x) + (1-\lambda)^2 a(y,y) + 2\lambda(1-\lambda)a(x,y) < \lambda a(x,x) + (1-\lambda)a(y,y)\\
&2\lambda(1-\lambda)a(x,y) < \lambda(1-\lambda)a(x,x) + \lambda(1-\lambda)a(y,y)\\
&0 < \lambda(1-\lambda)a(x-y,x-y)
\end{aligned}$$

e per coercività $a(x-y,x-y) \geq K\|x-y\| > 0$ se $x \neq y$.

Per l'altra parte del Teorema è sufficiente mostrare che $\forall v \ \ a(u,v) - \varphi(v) = 0$ se e solo se u è un minimo per f. Intanto notiamo che

$$\partial_v f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}a(u+tv,u+tv) - \varphi(u+tv) - \frac{1}{2}a(u,u) + \varphi(u)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{ta(u,v) - t\varphi(v) + \frac{t^2}{2}a(v,v)}{t} = \lim_{t\to 0} a(u,v) - \varphi(v) + \frac{t}{2}a(v,v) = a(u,v) - \varphi(v)$$

"$\Leftarrow$": Dato che u è un minimo per f vale $\forall v \ \partial_v f(u) \geq 0$ e quindi $\forall v \ a(u,v) - \varphi(v) \geq 0$ e $\forall v \ a(u,v) - \varphi(v) = 0$ per linearità.

"$\Rightarrow$": Se $\forall v \ a(u,v) = \varphi(v)$ abbiamo

$$f(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = -\frac{1}{2}a(u,u) \leq \frac{1}{2}a(w,w) - a(u,w) = f(w)$$

dove la disugaglianza vale sempre per coercività, quindi u è di minimo per f.

□

Corollario 17.10. Se $T \in L(H)$ è autoaggiunto, $a(u,v) = \langle Tu, v\rangle$ è simmetrica è continua. Se è anche coerciva allora per ogni $\varphi \in H$ l'equazione $Tu = \varphi$ ha un unica soluzione.

Osserviamo anche che la coercività di a implica l'inettività di T.

Proposizione 17.11. Dato $T \in L(H)$ autoaggiunto, siano $m = \inf_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$ e $M = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle$. Allora $\{m, M\} \subseteq \sigma(T) \subseteq [m, M]$.

Dimostrazione. Vediamo la prima inclusione. Se $a(u,v) = \langle (MI - T)u, v\rangle$, per definizione di M si ha $\forall u \ \ a(u,u) \geq 0$. Allora per Cauchy-Schwarz abbiamo

$$|\langle (MI-T)u, v\rangle| \leq \langle (MI-T)u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle (MI-T)v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$$

e quindi $\|(MI-T)u\| \leq C\langle (MI-T)u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$. Prendiamo ora una successione tale che $\|u_n\| = 1$ e $\langle Tu_n, u_n\rangle \to M$. Abbiamo $\langle (MI-T)u_n, u_n\rangle \to 0$, quindi $(MI - T)u_n = Mu_n - Tu_n \to 0$, perché gli u_n hanno norma 1. Se $M \in \rho(T)$ otteniamo l'assurdo $u_n = (MI - T)^{-1}\big((MI - T)u_n\big) \to 0$. La dimostrazione che $m \in \sigma(T)$ è analoga.

Per la seconda inclusione, se $\lambda > M$ abbiamo

$$\langle (\lambda I - T)u, u\rangle \geq (\lambda - M) \|u\|^2$$

quindi per Lax-Milgram $(\lambda I - T)u = \varphi$ ha un unica soluzione, cioè $\lambda \in \rho(T)$. Anche questa volta per m è analogo, basta osservare che A è invertibile se e solo se lo è $-A$. $\square$

Corollario 17.12. Se $T \in L(H)$ è autoaggiunto e $\sigma(T) = \{0\}$, allora $T = 0$.

Dimostrazione. Per il Teorema $\forall u \ \langle Tu, u\rangle = 0$, ma allora

$$2\langle Tu, Tu\rangle = \langle Tu, Tu\rangle + \langle u, T^2u\rangle = \langle u + Tu, T(u + Tu)\rangle = 0$$

$\square$

18 07/11 - Esercitazione

Un operatore compatto è per definizione sempre lineare e limitato (dato che siamo in spazi metrici compatto implica limitato). Di solito sono operatori integrali. È vero che

$T \in L(E, F)$ se e solo se è lineare e $\forall u_n \ u_n \to u_0 \Rightarrow Tu_n \to Tu_0$. Inoltre se $u_n \rightharpoonup u_0$ allora $Tu_n \rightharpoonup Tu_0$.

Proposizione 18.1. Se $T \in K(E, F)$ allora $\forall u_n \ u_n \rightharpoonup u_0 \Rightarrow Tu_n \to Tu_0$.

Dimostrazione. Dato che u_n converge debolmente è limitata per Banach-Steinhaus. Dunque Tu_n ha chiusura forte compatta. Ogni limite forte è anche limite debole e questo è unico. $\square$

Il vicerversa è falso in generale. È vero assumendo che lo spazio sia riflessivo.

Esempio 18.2. Sia $E = F = \ell^1$. L'identità $\mathrm{Id}\colon \ell^1 \to \ell^1$ è lineare e limitata, $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow u_n \to u$ forte in ℓ^1, quindi la proprietà è verificata. $\mathrm{Id}(B_{\ell^1}) = B_{\ell^1}$ non è compatta perché ℓ^1 ha dimensione infinita è sappiamo che la palla è compatta se e solo se la dimensione è finita.

Esercizio 18.3. Se $\dim E = \infty$,

$$\forall T \in K(E, F) \ \exists u_n \ \ \|u_n\|_E = 1, \|T(u_n)\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Dimostrazione. Consideriamo $\inf_{\|v\|_E=1} \|T(v)\|_F \in [0, \|T\|]$. Se questo inf è 0 ho la tesi. Altrimenti per un certo $c > 0$ abbiamo

$$\forall u \in E \, \|Tu\|_F \geq c \, \|u\|_E$$

Da questo segue per linearità che T è iniettiva. Inoltre T ha anche immagine chiusa[33], perché usando la stima precedente è facile mostrare la controimmagine di successioni di Cauchy è di Cauchy. Dunque $T \colon E \to \mathrm{Im}(T)$ è continua, lineare, bigettiva, e per il Teorema della mappa aperta è anche aperta, quindi T^{-1} è continua e manda compatti in compatti. Ma $T(B_E)$ è compatto e avremmo che $T^{-1}(T(B_E)) = B_E$ è compatta, il che é assurdo perché siamo in dimesione infinita. $\square$

Nota: l'alternativa di Fredholm vale per $\lambda I + \mu T$ con $\lambda, \mu \neq 0$.

Consideriamo $E = F = C^0([0,1])$. Un esempio di operatore compatto è $Tu(x) = \int_0^x u(s)\,ds$. Questo è lineare, limitato ($\|T\| \leq 1$) ed è compatto perché manda limitati in sottoinsiemi delle funzioni C^1 che valgono 0 in 0 e sono equicontinue (e quindi possiamo usare Ascoli-Arzelà). Nel dettaglio se $\|u_n\|_{C^0} \leq 1$ allora abbiamo $T(u_n)(0) = 0$, $\|T(u_n)\| = 1$ e le $T(u_n)$ sono equicontinue, perché

$$|(Tu_n)(x) - (Tu_n)(y)| = \left| \int_x^y u_n(s)\,ds \right| \leq \left| \int_x^y \underbrace{|u_n(s)|}_{\leq 1} \,ds \right| \leq |x-y|$$

$\mathrm{Im}\, T$ non è chiusa. In particolare $T(B_1)$ non è chiuso. Basta prendere una funzione $v \in C^0 \setminus C^1$ che vale 0 in 0 (ad esempio un triangolo verso il basso), che verifica $v \notin T(B_1)$. Possiamo considerare la successione v_n (scalino da -1 tra 0 e $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ a 1 fra $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ e 1 collegato con retta in mezzo). Abbiamo

$$T(u_n) = \underbrace{\int_0^x u_n(s)\,ds}_{\in \mathrm{Im}\, T} \xrightarrow{\text{unif.}} \underbrace{v(x)}_{\notin \mathrm{Im}\, T}$$

T è inettivo (facile da vedere) ma non surgettivo. Possiamo applicare l'alternativa di Fredholm per risolvere problemi del tipo "Per quali $v \in C^0$ esiste $u \in C^0$ tale che $\forall x \in [0,1] \, u(x) - \int_0^x u(s)\,ds = v(x)$?" (che a ben vedere è un'equazione differenziale). Senza Fredholm diremmo che se $v \in C^1$ allora una tale u esiste. Basta notare che $u' - u = v' \Leftrightarrow u(x) - \int_0^x u(s)\,ds = v(x)$ (e se aggiungiamo $u(0) = v(0)$ la soluzione è unica). E abbiamo[34]

$$u(x) = v(0)e^x + \int_0^x e^{x-t} v'(t)\,ds$$

[33] Serve per dare la struttura di spazio di Banach a $\mathrm{Im}(T)$.

[34] Magari ricontrollare che sia effettivamente questa.

Se $v \in C^0 \setminus C^1$ seleziono $v_n \in C^1$ tale che $v_n \to v$ in C^0. Per v_n so che esiste $u_n \in C^0$

$$u_n(x) - \int_0^x u_n(t) = v_n(x) \to v(x)$$

Integrando per parti

$$u_n(x) = v_n(0)e^x + \int_0^x e^{x-t} v_n(t)\,dt + v_n(x) - e^x v_n(0)$$

e il limite

$$u(x) = \int_0^x e^{x-t} v(t)\,dt + v(x)$$

Invece di ammazzarsi di conti a mano invece potevamo dire (accontentandoci dell'esistenza, senza costruire la soluzione): T è compatto. $u(x) - \int_0^x u(s)\,ds = ((I-T)u)(x)$. Mi chiedo se $I-T$ è surgettiva. Per Fredholm $I-T$ è surgettiva se e solo se $I-T$ è iniettiva. Quest'ultima cosa è vera perché

$$(I-T)u \equiv 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1]\, u(x) = \int_0^x u(s)\,ds$$

dunque $u \in C^1$, $u' = u$, e dunque $u(x) = e^{\lambda x}$, $u_0 = 0$, per cui $\lambda = 0$ e $u(x) = 0$. Da questo segue che $I-T$ è iniettiva, per cui $(I-T)u = v$ ha soluzione unica per ogni $v \in C^0[0,1]$.

Guardiamo lo stesso esempio in $L^p[0,1]$, con $p \neq \infty$ (altrimenti l'abbiamo praticamente già fatto). $T\colon L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ definito come

$$T(u)(x) = \int_0^x u(s)\,ds$$

Dimostriamo che $\forall p \geq 1$ l'operatore T è compatto. Se prendo $\|u_n\|_{L^p[0,1]} \leq 1$ devo vedere che Tu_n è precompatto in $L^p[0,1]$. Se $p > 1$ $T(u_n)$ verifica le ipotesi di Ascoli-Arzelà. $\|T(u_n)\|_{C^0}$ è limitata, perché usando Hölder

$$|Tu_n(x)| = \left|\int_0^x 1 \cdot u_n(s)\,ds\right| \leq \left(\int_0^x 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |u_n(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$$

E inoltre

$$|Tu_n(x) - Tu_n(y)| \leq \left|\int_x^y u_n(s)\,ds\right| \leq |x-y|^{\frac{1}{q}}$$

e abbiamo l'equicontinuità. Nel caso $p = 1$ abbiamo che $T(B_{L^1})$ è precompatto grazie al Teorema di Fréchet-Kolmogorov. Ora vogliamo:

Esercizio 18.4.
- Calcolare $\mathrm{VP}(T)$ e $\sigma(T)$.
- $\forall \lambda \in \rho(T)$ dare una forma esplicita a $(T - \lambda I)^{-1}$
- calcolare T^*.

Uso il Teorema per cui se $T \in K(E)$ allora $\textsc{vp} \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$, $0 \in \sigma(T)$ se $\dim E = \infty$. Calcolo $\textsc{vp}(T)$: sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(u) = \lambda u$ per $u \neq 0$.

$$\forall x \in [0,1]\, \lambda u(x) = \int_0^x u(s)\, ds \Leftrightarrow \lambda u' = u \text{ su } [0,1]$$

$u(0) = 0 \Rightarrow u \equiv 0$. Hint per i punti successivi: $(T - \lambda I)u = v \Leftrightarrow (T - \lambda I)^{-1} v = u$. Risolvere con la formula integrale nel caso v regolare ed estendere la formula trovata a $v \in L^p$. Per il calcolo di T^* usare la definizione e la dualità in L^p.

$$T^*(v) \in L^q \sim (L^p)^* \qquad \langle T^*(v), u\rangle_{L^q, L^p} = \int_0^1 T^* v(s) u(s)\, ds$$

T^* deve anche verificare che

$$\langle T^*(v), u\rangle_{L^q, L^p} = \langle v, T(u)\rangle_{L^q, L^p} = \int_0^1 v(x) \left(\int_0^x u(s)\, ds \right) dx$$

integro per parti per avere la formula esplicita di $T^*(v)$.

Esercizio 18.5. L'immersione $i\colon L^p(0,1) \to L^q(0,1)$ è continua se $p \geq q$. Tuttavia non è mai compatta.

Esercizio 18.6. Sia $T\colon \ell^p \to \ell^q$ lineare e limitato. Caratterizzare T, p, q per cui T è anche compatto.

19 11/11 - Esercitazione

Sia $T\colon \ell^p \to \ell^q$ l'operatore $T(x) = \{\alpha_n x_n\}$, con $\{\alpha_n\}$. Se $p = q$, T è compatto se e solo se $\alpha_n \to 0$. Chiediamoci sotto quali ipotesi su α_n abbiamo che T è limitato. Se $p < q$ c'è un'inclusione naturale continuo $\ell^p \subset \ell^q$. T è limitato se e solo se $\|x\|_{\ell^q} \leq c \|x\|_{\ell^p}$. Quindi se $\alpha_n \in \ell^\infty$ sicuramente T è continua. Chiediamoci se questa condizione è anche necessaria. Se T è limitato esiste $c = \|T\| > 0$ tale che

$$\|T(x)\|_{\ell^q} \leq c \|x\|_{\ell^p}$$

Ora $T(e_j) = \alpha_j e_j$, quindi $\|T(e_j)\|_{\ell^q} = |\alpha_j| \leq \|T\| \|e_j\|_{\ell^q} = \|T\|$. Quindi $T\colon \ell^p \to \ell^q$, con $p \leq q$, è limitato se e solo se $|\alpha_n| \in \ell^\infty$.

Che ipotesi dobbiamo dare su α_n, sempre nel caso $p \leq q$, perché T sia compatto? $\{\alpha_n\} \in \ell^\infty$ non basta (basta prendere $\alpha_n = 1$ e la successione $\{e_j\}$ non ha sottosuccessioni convergenti). Chiediamoci se è sufficiente che $\alpha_n \to 0$. Se prendo x^k successione di elementi di ℓ^p con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^k \right|^p = 1$$

Devo dimostrare che $T(x^k)$ è precompatto in ℓ^q. Fissato $\varepsilon > 0$ mostro che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \geq N} \left| x_n^k \right|^q < \varepsilon$$

Fissato N_0 appropriato per ε (che esiste perché $\alpha_n \to 0$) ho

$$\sum_{n \geq N} \left| \alpha_n x_n^k \right|^q \leq \varepsilon \sum_{n \geq N_0} \left| x_n^k \right|^q \leq \varepsilon$$

Mostriamo che $T(x^k)$ è precompatto. Fissato $\varepsilon > 0$ ho che

$$\alpha_1 x_1^k, \ldots, \alpha_N x_N^k$$

sono N successioni limitate in $\mathbb{R}$ (perché verificano $\left|\alpha_n x_n^k\right| \leq \left\|T(x^k)\right\| \leq \|T\|$). Dunque esiste una sottosuccessione di Cauchy $x_n^{k_n}$. Claim: è di Cauchy anche $T(x^{k_n})$.

$$\left\| T(x^{k_h}) - T(x^{k_j}) \right\|_{\ell^q}^q \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \alpha_n (x_n^{k_h} - x_n^{k_j}) \right|^q \leq \sum_{n=1}^{N} |\ldots|^q + \sum_{n > N} |\ldots|^q \leq \varepsilon + 2\varepsilon$$

Se invece $p > q$ ho $\ell^p \supsetneq \ell^q$. Quindi $\alpha_n \in \ell^\infty$ non basta a garantire la continuità. Questo si vede al solito prendendo $\alpha_n = 1$ e $x_n \in \ell^p \setminus \ell^q$. Scriviamo

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n x_n|^q = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^q \, |x_n|^q = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot b_n$$

dato che $x_n \in \ell^q$ abbiamo $b_n \in \ell^r$ con $r = \frac{p}{q}$ (basta fare il conto). Uso Hölder e ottengo

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^{qr'} \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{r}}$$

dove r' è l'esponente coniugato ad r, cioè $\frac{p}{p-q}$. Se ora $\{\alpha_n\} \in \ell^{\frac{p}{p-q}}$, allora

$$\|T(x)\|_{\ell^q}^q \leq \left(\sum |\alpha_n|^{qr'} \right)^{\frac{1}{r'}} \|x\|_{\ell^p}^{\frac{p}{r}}$$

Se parto da $\|x\|_{\ell^p} \leq 1$ ho $\|T(x)\|_{\ell^q} \leq c$. Se $\{\alpha_n\} \in \ell^{\frac{p}{p-q}}$ allora T è continua. La condizione è anche necessaria. Questo si fa scegliendo x tale che

$$\sum_{n=0}^{N} |\alpha_n|^q \, |x_n|^q = \left(\sum |\alpha_n|^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum |x_n|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

impongo $\|x_n\| = \lambda \|\alpha_n\|^\alpha$ (trovo l'α giusto imponendo $=$).

Ho anche che T è compatto. Facendo lo stesso conto di prima e data x^k limitata in ℓ^p, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n \geq N} |\alpha_n| \left|x_n^k\right|^q < \varepsilon$$

$\|T(x)\|_{\ell^q}^q < \infty$ e

$$\sum |\alpha_n|^q \left|x_n^k\right|^q \leq \left(\sum_{n \geq N} |\alpha_n|^{qr'}\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\sum_{n \geq N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{r}}$$

usando che $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^{qr'} < \infty$ esiste N_0 tale che $\forall n \geq N_0$ si ha $\sum_{n \geq N} |\alpha_n|^{qr'} \leq \varepsilon$.

Si dovrebbe riuscire a fare la caratterizzazione anche senza l'ipotesi che T sia di quella forma, ma non vedremo la dimostrazione.

Non tutte le applicazioni $\ell^p \to \ell^q$ sono della forma sopra: ad esempio lo shift. Questo non è compatto nonostante sia limitato e lineare, è iniettivo e non è surgettivo.

Esercizio 19.1. Sia $V = C^2[-1,1] \subset L^2[-1,1] = X = Y$. Sia $T\colon V \to X$ definito come $T(u) = -u'' + 2xu$. Calcolare T^*.

Dimostrazione. Calcolo

$$\langle T^*(v), u\rangle = \int_{-1}^{1} T^*v(x)u(x)\,dx \stackrel{?}{=} \int_{-1}^{1} v(x)Tu(x)\,d(x)$$

$$\int_{-1}^{1} v(x)\cdot(-u''(x) + 2xu(x))\,dx = -\int_{-1}^{1} v(x)u''(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2xv(x)u(x)\,dx$$

$$= -\left. v(x)u'(x)\right|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2xv(x)u(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} u'v'\,dx = uv' \left.\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} uv''\,dx$$

$$\langle T(u), v\rangle = \int_{-1}^{1} (-v''-2xv)u(x)\,dx + u(x)v'(1) - u(-1)v'(-1) - v(1)u'(x) + v(-1)u'(-1)$$

Se definisco invece

$$\tilde{T}\colon \left\{u \in C^2[-1,1] \mid u(1) = u(-1) = u'(-1) = u'(1) = 0\right\} \to L^2[-1,1]$$

allora $\tilde{T}^*(v) = -v'' + 2xv = \tilde{T}(v)$. $\square$

Esercizio 19.2. $T\colon C^2 \to L^2$. Calcolare il nucleo e immagine di T. Fare il conto analogo con $\tilde{T}$.

Esercizio 19.3. Sia $H = \left\{u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ misurabile}, \int_{\mathbb{R}} u^2(x)e^{-x^2}\,dx < \infty\right\}$. Dimostrare che $\|u\| = (\int \dots)^{\frac{1}{2}}$ è una norma su H che lo rende completo e che è indotta da un prodotto scalare. Inoltre H contiene tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Se M è lo spazio generato da $u_1(x) \equiv 1$ e $u_2(x) \equiv x$, calcolare la proiezione $P_M\colon V \to M$, cioè data $v \in H$ calcolare $P_M(v)$.

Hint. Per l'ultimo punto trovo una base ortonormale di M e scrivo la proiezione in termini di prodotto scalare con gli elementi di questa base. □

20 13/11

20.1 Decomposizione spettrale

Teorema 20.1. Se H è uno spazio di Hilbert separabile e $T \in K(H)$ è autoaggiunto, allora esiste $\{e^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base di Hilbert di H fatta di autovettori di T.

Dimostrazione. Sappiamo già che $\lambda_0 = 0$ è un autovalore[35] e gli altri λ_n sono finiti o sono numerabili e convergono a 0. Sia $E_n = \operatorname{Ker}(T - \lambda_n I)$ l'autospazio relativo a λ_n. Per Fredholm abbiamo $\dim E_n < \infty$ per ogni $n > 0$. Inoltre, dato che T è autoaggiunto, abbiamo $E_n \perp E_m$ se $n \neq m$, perché dati $v \in E_n$ e $u \in E_m$ abbiamo

$$\lambda_n \langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \lambda_m \langle u, v\rangle$$

e quindi $\lambda_n \neq \lambda_m \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0$. Sia ora $E = \operatorname{Span}(E_n \mid n \in \mathbb{N})$. E è denso se e solo se $E^\perp = \{0\}$, che è quello che mostreremo. T è un endomorfismo di E, perché $T(E_0) = \{0\}$ e $T(E_n) = E_n$ se $n > 0$, ed è anche un endomorfismo di $E^\perp$, perché se $u \in E^\perp$ abbiamo che per ogni $v \in E$ vale $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = 0$. Dato che $E^\perp < H$ è chiuso è a sua volta un Hilbert separabile, e $\tilde{T} = T_{|E^\perp}$ è ancora autoaggiunto e compatto. Inoltre $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$, dato che $0 \in \sigma(\tilde{T})$ per compattezza e se $0 \neq \lambda \in \sigma(\tilde{T})$ e v è un suo autovettore abbiamo $\tilde{v} = \lambda v = Tv$, quindi per un certo n avremmo $\lambda = \lambda_n$ e l'assurdo $v \in E^n$. Dato che $\tilde{T}$ è autoggiunto, per il Corollario 17.12 $\tilde{T} = 0$. Quindi

$$E^\perp \subseteq \operatorname{Ker} T = E_0 \subseteq E \Rightarrow E^\perp \subseteq E \cap E^\perp = \{0\} \Rightarrow E^\perp = \{0\}$$

Ora usiamo (per la prima volta) la separabilità scegliendo una base di Hilbert per E_0 e unendoci una base ortonormale per ogni E_n, che se $n > 0$ ha dimensione finita. □

Osserviamo che scrivendo $u \in H$ come $\sum_n u_n$, dove $u_n = P_{E_n}(u)$, abbiamo $T(u) = \sum \lambda_n u_n$.

[35] In realtà ad essere precisi sappiamo solo che è nello spettro. Ma se non è un autovettore l'autospazio relativo a 0 è solo $\{0\}$ e il resto della dimostrazione non è inficiata.

Esempio 20.2. Sia $H = L^2(0, 2\pi)$ con la base ortonormale

$$e_n = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \qquad \tilde{e}_n = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$$

e sia T definito come

$$T(u) = f \Leftrightarrow \begin{cases} f'' = u \\ f \text{ è periodica}^{36} \end{cases}$$

Allora, posti $c_k = \langle u, e_n \rangle$ e $\tilde{c}_k = \langle u, \tilde{e}_n \rangle$, abbiamo

$$u = \sum_k c_k e_k + \tilde{c}_k \tilde{e}_k \qquad T(u) = \sum_k -\frac{c_k}{k^2} e_k - \frac{\tilde{c}_k}{k^2} \tilde{e}_k$$

e T è compatto e autoaggiunto.

20.2 Spazi di Sobolev

Esempio 20.3. Consideriamo l'ODE

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

con $f \in C^0(a, b)$, che chiamiamo *forma forte*. La *forma debole* è

$$\forall \varphi \in C_c^1(a, b) \ \int_a^b (-u'' + u)\varphi = \int_a^b f\varphi \tag{2}$$

o, integrando per parti,

$$\forall \varphi \in C_c^1(a, b) \ \int_a^b (u'\varphi' + u\varphi - f\varphi) = 0$$

Chiaramente una *soluzione forte*, cioè una $u \in C^2$ che risolva la (1), è anche una *soluzione debole*, cioè risolve anche la (2). In generale si cercano prima soluzioni deboli e poi si vede se sono anche soluzioni forti, cosa che non succede sempre. Gli spazi di Sobolev sono utili per la ricerca di soluzioni deboli.

Definizione 20.4. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto e $p \in [1, \infty]$, definiamo

$$W^{1,p}(A) = \left\{ u \in L^p(A) \,\middle|\, \exists v \in L^p(A)\ \forall \varphi \in C_c^1(A) \ \int_A u\varphi' = -\int_A v\varphi \right\}$$

una tale v è univocamente definita e se $u \in L^p \cap C^1$ coincide con u', per cui la indicheremo con u' e la chiameremo *derivata debole*.

[36] Forse serve che anche f' sia periodica.

Su $W^{1,p}(A)$ mettiamo la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \left\|u'\right\|_{L^p}$$

Possiamo pensare quindi $W^{1,p}$ come sottospazio di $L^p \times L^p$. C'è di più:

Proposizione 20.5. $(W^{1,p}, \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ è uno spazio di Banach. In particolare è chiuso in $L^p \times L^p$.

Dimostrazione. Se $\{u_n\}$ è di Cauchy in $W^{1,p}$, allora $\{u_n\}$ e $\{u_n'\}$ sono di Cauchy in L^p. Per completezza di L^p allora $u_n \to u$ e $u_n' \to v$ in L^p. Inoltre usando Hölder abbiamo che per ogni $\varphi \in C_c^1$

$$\int u\varphi' \leftarrow \int u_n\varphi' = -\int u_n'\varphi \to -\int v\varphi$$

□

Alcune proprietà che $W^{1,p}$ eredita immediatamente in quanto sottospazio chiuso di $L^p \times L^p$ sono le seguenti.

Corollario 20.6. Per $1 < p < \infty$ lo spazio $W^{1,p}$ è riflessivo. Per $1 \leq p < \infty$ è separabile.

Definizione 20.7. Definiamo $H^1(A) = W^{1,2}(A)$ e lo muniamo del prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u, v'\rangle_{L^2}$$

Nonostante valga $C^1([a,b]) \subseteq W^{1,p}([a,b])$, in generale non vale l'uguaglianza:

Esempio 20.8. $|x| \in W^{1,p} \setminus C^1$, e la sua derivata debole è la funzione segno. Stiamo allargando lo spazio alle funzioni Lipschitziane.

Teorema 20.9. Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste $\tilde{u} \in C^0(I)$ tale che $u = \tilde{u}$ q.o. su I e $\forall a, b \in I$ $\tilde{u}(a) - \tilde{u}(b) = \int_a^b u'$

Dimostrazione. Supponiamo $I = (A, B)$. Definiamo $\hat{u}(x) = \int_A^x u'$. Abbiamo

$$|\hat{u}(x) - \hat{u}(y)| \leq \int_x^y \left|u'(t)\right| \, dt = \int_I \left|u'(t)\right| \chi_{[x,y]}(t) \, dt \leq \left\|u'\right\|_{L^p} \left\|\chi_{[x,y]}\right\|_{L^q} = \left\|u'\right\|_{L^p} |x-y|^{\frac{1}{q}}$$

e quindi $\hat{u}(x)$ è $\frac{1}{q}$-Hölderiana, e in particolare continua. Inoltre

$$\int_I \hat{u}\varphi' = \int_I \int_A^x u'(y)\varphi'(x) \, dydx = \int_I \int_y^B u'(y)\varphi'(x) \, dxdy = -\int_I u'(y)\varphi(y) \, dy$$

(la seconda uguaglianza è ottenuta con Fubini-Tonelli, essenzialmente stiamo integrando sul triangolo inferiore di un quadrato con i lati che vanno da A a B su entrambi gli assi). Quindi $\hat{u} \in W^{1,p}$ e $\hat{u}' = u'$. In particolare

$$\forall \varphi \in C_c^1 \int_I (\hat{u} - u)'\varphi = 0 \Rightarrow \hat{u} = u + c \text{ q.o.}$$

Definisco allora $\tilde{u} = \hat{u} - c$, quindi $\tilde{u} = u$ q.o. (e $\hat{u}$ è continua) e

$$\tilde{u} \in C^{\frac{1}{q}}(I) \subseteq C(I) \qquad \int_I \tilde{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi$$

da cui deriva l'ultima parte; per mostrarlo vorremmo usare le funzioni caratteristiche, che però non sono C^1. Usiamo l'approssimazione $\varphi_\varepsilon \to \chi_{[x,y]}$ (c'è convergenza in ogni L^r, in particolare per $r = q$), dove[37]

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq x \text{ o } t \geq y \\ 1 & \text{se } x + \varepsilon < t < y - \varepsilon \\ \frac{t-x}{\varepsilon} & \text{se } x < t < x + \varepsilon \\ \frac{y-t}{\varepsilon} & \text{se } y - \varepsilon < t < y \end{cases}$$

allora, notando che i passaggi al limite sono giustificati dalla continuità di $\tilde{u}$ e indicando $\fint_a^b f = \frac{1}{a-b}\int f$,

$$\int_I \tilde{u}\varphi_\varepsilon' = \underbrace{\fint_x^{x+\varepsilon} \tilde{u}}_{\to \tilde{u}(x)} - \underbrace{\fint_{y-\varepsilon}^{y} \tilde{u}}_{\to \tilde{u}(y)} = \underbrace{-\int u'\varphi_\varepsilon}_{\to \int_x^y u'}$$

□

Rimarchiamo che qui stiamo parlando di rappresentanti, dato che maneggiamo classi di equivalenza.

La definizione che "avremmo voluto dare" di $W^{1,p}$ sarebbe stata "la chiusura di C^1 rispetto a $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$". Quello che abbiamo definito è a priori un spazio più grande, a meno che non mostriamo che le C^1 sono dense in $W^{1,p}$. Questo si farà in modo simile a come si dimostra che C^1 è denso in L^p, cioè usando le regolarizzazioni per convoluzione. Il problema è che la convoluzione si può fare per funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Per L^p bastava definire la funzione come 0 fuori da I, ma non è detto che una tale estensione stia ancora in $W^{1,p}$.

21 14/11

21.1 Spazi BV

Proposizione 21.1. Se A è limitato e $p \geq q$ allora $W^{1,p}(A) \subseteq W^{1,q}(A)$.

[37] In realtà andrebbero prese C^1, o forse si sistema con qualche discorso di densità.

Dimostrazione. Segue dal fatto che è vero per gli L^p. □

Definizione 21.2. $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(A)$ se e solo se per ogni limitato $B \subseteq A$ si ha $u_{|B} \in W^{1,p}(B)$.

Esercizio 21.3. Se $p > 1$, $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(A)$, $u_n \to u$ in L^p e $\forall n\ \|u_n'\|_{L^p} \leq c$ allora $u \in W^{1,p}$.

Hint. Per $p > 1$ lo spazio L^p ha un preduale e quindi si può applicare Banach-Alaoglu e le palle sono compatte deboli⊛ (per $p \neq \infty$ quindi anche compatte deboli, dato che lo spazio è riflessivo). Quindi esiste[38] $u_{n_k} \underset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ in $W^{1,p}$, cioè $u_{n_k} \underset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ in L^p e $u_{n_k}' \underset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}'$[39] sempre in L^p. Ma allora per unicità del limite $\tilde{u} = u$ e $u \in W^{1,p}$. □

Per $p = 1$ c'è un controesempio: prendiamo una funzione $\rho \in C_c(\mathbb{R})$ tale che $\int \rho = 1$ e $\rho \geq 0$ e consideriamo $\rho_n = n\rho(nx)$. Abbiamo $\int \rho_n = 1$, ma ρ_n converge q.o. alla funzione 0, per cui se il limite in L^1 esiste deve essere questo. Ne segue che nessuna sottosuccessione di ρ_n converge in L^1. Vogliamo quindi una successione di funzioni f_n le cui derivate deboli si comportino come le ρ_n. Definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Abbiamo $f_n' = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$, per cui $\|f_n'\|_{L^1} = 1$, e $f_n \xrightarrow{L^1} \chi_{[0,b]}$, quindi le ipotesi sono rispettate (a parte $p > 1$, chiaramente), ma $\chi_{[0,b]} \notin W^{1,1}$ perché non è continua, o meglio non ha rappresentanti continui.

Definizione 21.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, allora

$$u \in \text{BV}(A) \Leftrightarrow u \in L^1(A) \wedge \exists c\ \forall \varphi \in C_c^1(A)\ \int_A u\varphi' \leq c\, \|\varphi\|_\infty$$

inoltre definiamo la *variazione totale* di u in A

$$|Du|(A) = \sup \left\{ \int u\varphi' \;\middle|\; \|\varphi\|_\infty \leq 1, \varphi \in C_c^1 \right\}$$

e mettiamo su BV(A) la norma

$$\|u\|_{\text{BV}(A)} = \|u\|_{L^1(A)} + |Du|(A)$$

[38] Bisogna anche usare il fatto che il preduale di L^p è separabile e quindi si può applicare il Corollario 11.10

[39] Che questo limite è proprio $\tilde{u}'$ si vede facilmente pensando l'integrale contro $\varphi \in C_c^1$ come elemento di $J(L^{p'})$.

Analogamente si può definire anche $\text{BV}_{\text{loc}}(A)$.

Proposizione 21.5. $W^{1,1}(A) < \text{BV}(A)$ e $|Du|(A) = \int_A u'$.

Consideriamo ora l'operatore $T\colon \varphi \mapsto \int u\varphi'$, definito sulle $C^1_c(A)$. Questo spazio è denso in $C^0(A)$, inoltre T è lineare e $T\varphi < C\|\varphi\|_\infty$, quindi possiamo estenderlo in maniera unica per densità a $\tilde{T} \in (C^0(A))^*$ (misure di Radon finite) e possiamo scrivere formalmente

$$\tilde{T}\varphi = \int u\varphi' = -\int u'\varphi$$

quindi possiamo dire $u' = -T$ e $u' \in \mu(A)$ (insieme delle misure di Radon).

Proposizione 21.6. $\text{BV}(A)$ è uno spazio di Banach. Inoltre, se $u_n \to u$ in L^1 e

$$\|u_n\|_{\text{BV}} \leq c \qquad (\Leftrightarrow |u_n'|(A) \leq c \Leftrightarrow \|u_n'\|_{(C^0(A))^*} \leq c)$$

allora $u \in \text{BV}(A)$.

La ragione per cui abbiamo introdotto questo spazio è per risolvere il problema che L^1 e $W^{1,1}$ non hanno preduale, e che quindi non potevamo usare Banach-Alaoglu.

21.2 Equicontinuità delle traslazioni

Proposizione 21.7. Siano $p > 1$ e $I = (a,b)$. Allora, posto $\tau_h u(x) = u(x+h)$ e $I_h = (a + \|h\|, b - \|h\|)$, vale

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow \forall h > 0\ \|\tau_h u - u\|_{L^p(I_h)} \leq c|h|$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Abbiamo (usando la sostituzione $t = x + sh$)

$$|u(x+h) - u(x)|^p = \left|\int_x^{x+h} u'(t)\,dt\right|^p = \left|\int_0^1 u'(x+sh)\,ds\right|^p \cdot |h|^p$$

Usando Jensen con la funzione convessa $|\cdot|^p$ otteniamo

$$\|\tau_h u - u\|^p_{L^p} = \int_{I_h} |u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_{I_h}\int_0^1 |u'(x+sh)|^p\, dsdx$$

$$\leq |h|^p \int_0^1 \int_{I_h} |u'(x+sh)|^p\, dxds \leq |h|^p \int_0^1 \int_I |u'(x)|^p\, dxds = |h|^p \|u'\|^p_{L^p(I)}$$

Notiamo che questa freccia, con la stessa dimostrazione, vale anche per $p = 1$.

"$\Leftarrow$": Usando Hölder e la nostra ipotesi abbiamo

$$\left|\int (\tau_h u(x) - u(x))\varphi(x)\right| = \left|\int u(x+h)\varphi(x) - \int u(x)\varphi(x)\right| \le C\,|h|\,\|\varphi\|_{L^q}$$

quindi, cambiando variabile in uno degli integrali,

$$\left|\int u(x)\left(\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right)\right| |h| \le C\,|h|\,\|\varphi\|_{L^q}$$

Dividendo per $|h|$ e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo

$$\left|\int u\varphi'\right| \le c\,\|\varphi\|_{L^q}$$

Quindi abbiamo che il funzionale $\varphi \mapsto \int u\varphi'$, definito su C^1_c, che è denso in L^q perché $p > 1$, è continuo, e quindi si estende a un funzionale che possiamo rappresentare per Riesz come $\int g\varphi$ con $g \in L^p$. Quindi $\int u\varphi' = \int g\varphi$, per cui $u \in W^{1,p}$.

□

Notiamo che per $p = 1$ possiamo concludere che $\left|\int u\varphi'\right| \le c\,\|\varphi\|_\infty$, cioè che $u \in \mathrm{BV}$.

Corollario 21.8. $u \in W^{1,\infty}$ se e solo se u è quasi ovunque Lipschitziana.

Avevamo già visto che se $u \in W^{1,p}$ allora $u \in C^{\frac{1}{q}}$. In generale non vale il viceversa

Esercizio 21.9. Trovare $u \in C^{\frac{1}{2}} \setminus H^1$.

Esercizio 21.10. Sia I un intervallo. Allora $u \in \mathrm{BV}(I)$ se e solo se $u = u_1 - u_2$ con u_1, u_2 monotone.

Data $u \in W^{1,p}$, anche se scegliamo un rappresentante non continuo, vale per quasi ogni $x, y \in I$

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'$$

perché vale per i punti di Lebesgue (cioè quelli dove la funzione coincide con la propria media), ovvero quelli in cui coincide col suo rappresentante continuo.

21.3 Teoremi di estensione e densità

Mostreremo ora la densità[40] di C^1_c in $W^{1,p}$. I passaggi saranno i seguenti:

[40] In realtà non è così liscia, guardare l'enunciato preciso per capire perché.

- Estenderemo una funzione $W^{1,p}(I)$ a una $W^{1,p}(\mathbb{R})$ in modo che l'operatore di estensione sia continuo (questo è più difficile in $\mathbb{R}^n$).
- Approssimeremo l'estesa tramite convoluzioni e prenderemo la restrizione delle approssimanti.

Teorema 21.11 (di estensione)**.** Sia I un intervallo. Esiste un operatore di estensione $T \in L(W^{1,p}(I), W^{1,p}(\mathbb{R}))$ tale che $(Tu)_{|I} = u$.

Dimostrazione. Se $I = \mathbb{R}$ basta prendere $T = \mathrm{Id}$. Se $I = (a, +\infty)$ prendiamo

$$Tu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x > a \\ u(2a - x) & \text{se } x < a \end{cases}$$

che riflette la funzione, per cui $\|Tu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. La linearità è ovvia. Il caso $I = (-\infty, a)$ è chiaramente analogo, e ci basta quindi considerare (a meno di traslazioni e omotetie) $I = (0,1)$. Fissiamo $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $0 \le \eta(x) \le 1$ e

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

e per ogni f su $(0,1)$ definiamo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Allora se $u \in W^{1,p}(I)$ abbiamo $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$ e $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'$. Scriviamo ora $u = \eta u + (1-\eta)u$. Possiamo estendere ηu prima a $(0,+\infty)$ attraverso $\eta\tilde{u}$, e poi a $\mathbb{R}$ per riflessione ottenendo $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ che verifica

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 2\|u\|_{L^p(I)} \qquad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le C_1 \|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

Analogamente estendiamo $(1-\eta)u$ a $(-\infty, 1)$ ponendola pari a 0 su $(-\infty, 0)$ e poi riflettendo rispetto a 1, ottenendo $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ che estende $(1-\eta)u$ e verifica

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 2\|u\|_{L^p(I)} \qquad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le C_2 \|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

allora basta porre $Tu = v_1 + v_2$. □

Teorema 21.12 (di densità)**.** Sia $p < \infty$ e $u \in W^{1,p}$. Allora esiste[41] $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $u_{n|I} \to u$ in $W^{1,p}(I)$.

Osserviamo che il caso $p = \infty$ è escluso per lo stesso motivo per cui è escluso per L^∞.

[41] Si può fare di meglio e richiedere anche che le u_n siano a supporto compatto. Nella dimostrazione basta moltiplicare u_n per $\zeta(x/n)$, dove ζ è una cutoff.

Dimostrazione. Per estensione possiamo supporre $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Poniamo $u_n = u * \varphi_n$, dove $\rho_n = n\rho(nx)$, per una certa $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\rho \geq 0$ e $\int \rho = 1$. Per le proprietà della convoluzione abbiamo $u_n \in C^\infty$ e $u_n' = u' * \rho_n$ perché, posta $\tilde{\rho}_n(x) = \rho_n(-x)$,

$$\int (u * \rho_n)\varphi' = \int u(\tilde{\rho}_n * \varphi') = \int u(\tilde{\rho}_n * \varphi)' = -\int u'(\tilde{\rho}_n * \varphi) = -\int (u' * \rho_n)\varphi$$

e quindi, sempre per le proprietà della convoluzione, $u_n' \to u'$ e $u_n \to u$, dove entrambe le convergenze sono in L^p. □

In generale non possiamo chiedere $u_n \in C_c^\infty(I)$. In generale infatti

$$\overline{C_c^\infty(I)} = W_0^{1,p}(I) < W^{1,p}(I)$$

che è un sottospazio chiuso e proprio se $I \neq \mathbb{R}$.

22 18/11

22.1 Teoremi di immersione

Per $p = \infty$ riusciamo a dire che se I è limitato $C_c^1(\mathbb{R})$ è denso in $L^\infty(I)$.

Teorema 22.1. Esiste $C \in \mathbb{R}$ indipendente da p tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

Possiamo sostituire a $\|\cdot\|_{L^\infty(I)}$ la norma $\|\cdot\|_{C^0(\bar{I})}$, perché le funzioni in $W^{1,\infty}$ sono limitate e continue. Questo ci dice che

Corollario 22.2. La mappa $W^{1,p}(I) \to L^\infty(I)$ (o $C^0(\bar{I})$) è un'immersione continua.

Dimostriamo il Teorema:

Dimostrazione. A meno di estendere le funzioni tramite il Teorema 21.11 possiamo supporre $I = \mathbb{R}$. Inoltre possiamo supporre $p < \infty$, perché per $p = \infty$ l'enunciato è banale, e quindi usare il risultato di densità dimostrato la volta scorsa (Teorema 21.12). Sia $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e scriviamo

$$\begin{aligned} |v(x)|^p = & \int_{-\infty}^x p\,|v(t)|^{p-2}\, vv'\, dt \leq p \int_{-\infty}^x |v|^{p-1} \left|v'\right| dt \\ \leq & p \left\|v'\right\|_{L^p} \cdot \left\| |v|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} = p \left\|v'\right\|_{L^p} \|v\|_{L^p}^{p-1} \end{aligned}$$

Dato che questo è vero per ogni x, è vero anche per la norma infinito, quindi

$$\|v\|_{L^\infty} \leq p^{\frac{1}{p}} \left\|v'\right\|_{L^p}^{\frac{1}{p}} \cdot \|v\|_{L^p}^{\frac{1}{p'}} \leq C \left\|v'\right\|_{L^p}^{\frac{1}{p}} \cdot \|v\|_{L^p}^{\frac{1}{p'}} \leq C \|v\|_{W^{1,p}}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da Young. Ora se $v_n \to v$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$, ho che per ogni I limitato $v_n \to v$ in $L^\infty(I)$.

$$\|v\|_{L^\infty(I)} \leftarrow \|v_n\|_{L^\infty(I)} \leq \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\,\|v_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \xrightarrow{n} C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$$

e $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_I \|v\|_{L^\infty(I)}$. □

Teorema 22.3. Se I è limitato e $p > 1$, l'immersione $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$ è compatta.

Dimostrazione.

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_x^y u'\right| \leq \int_x^y |u'| = \int_{\mathbb{R}} |u'|\,\chi_{[x,y]} \leq \|u'\|_{L^p} |x-y|^{\frac{1}{p'}}$$

inoltre per il Teorema precedente $|u(x)| \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}}$, e quindi se $\|u\|_{W^{1,p}} \leq 1$ abbiamo $\|u\|_\infty \leq C$ e $|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{p'}}$, e quindi l'immagine della palla è contenuta in

$$\left\{u \;\middle|\; \|u\|_\infty \leq C, |u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{p'}}\right\}$$

che è precompatto per Ascoli-Arzelà perché I è limitato. □

Se prendiamo $p = 1$ e come u_n la successione di funzioni che valgono 0 fino a 0, 1 da $\frac{1}{n}$ in poi e il raccordo è lineare, abbiamo che $\|u_n\|_{W^{1,1}} \leq 2$ ma il limite puntuale non è continuo e quindi la successione non converge in norma $\|\cdot\|_\infty$.

Proposizione 22.4. Se I è limitato e $p < \infty$, $\mathrm{BV}(I)$ (e quindi anche $W^{1,1}(I)$) si immerge in $L^p(I)$, e l'immersione è compatta.

Come conseguenza del Teorema abbiamo che

Corollario 22.5. Se $p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(a, +\infty)$, allora $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Dimostrazione. Sia $u_{n|I} \to u$ in $W^{1,p}$, $u_n \in C^1_c(\mathbb{R})$. Allora per continuità dell'immersione $u_{n|I} \to u_{|I}$ in $L^\infty(I)$, per cui $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, perché altrimenti non potrei approssimarla in $\|\cdot\|_\infty$ con funzioni a supporto compatto. □

Per $p = \infty$ è falso, dato che $W^{1,\infty}$ sono le Lipschitziane.

Una conseguenza di questi teoremi di approssimazione è che la derivata debole negli spazi di Sobolev rispetta tutte le regole della derivata forte[42]. Ad esempio

[42]Negli spazi BV, dove la derivata è una misura, questo non succede, perché le misure possono avere parti singolari.

Corollario 22.6. Se $u, v \in W^{1,p}(I)$ allora $u \cdot v \in W^{1,p}$ e $(uv)' = u'v + uv'$. In particolare

$$\int_x^y u'v = uv|_x^y - \int_x^y uv'$$

Notiamo che *non* è vero che se $u, v \in L^p$ allora $uv \in L^p$.

Dimostrazione. Supponiamo $p < \infty$. Per il Teorema 22.1 $u, v \in L^\infty$, quindi uv e $u'v+uv'$ stanno in L^p. Siano ora $u_n, v_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ tali che[43] $u_n \to u$, $v_n \to v$ in $W^{1,p}(I)$. Sempre per il Teorema 22.1 abbiamo le stesse convergenze anche in L^∞, quindi[44] $u_n v_n \to uv$ in L^∞ e in L^p. Inoltre

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \xrightarrow{L^p} u'v + uv'$$

e usando convergenza dominata e il fatto che $\varphi \in L^q$

$$\int (uv)\varphi' \leftarrow \int (u_n v_n)\varphi' = -\int (u_n v_n)'\varphi = -\int (u_n' v_n + u_n v_n')\varphi \to -\int (u'v+uv')\varphi$$

Per cui $uv \in W^{1,p}$ e $(uv)' = u'v + uv'$.

Se invece $p = \infty$, vale comunque che $uv \in L^\infty$ e $u'v + uv' \in L^\infty$ per motivi analoghi. Prendiamo $J \subset I$ limitato e prendiamo $u_n, v_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ tali che $u_n \to u$ e $v_n \to v$ uniformemente in J e $u_n' \to u'$, $v_n' \to v'$ in $L^1(J)$. Abbiamo, per ogni $\varphi \in C_c^1(J)$

$$\int (uv)\varphi' \leftarrow \int (u_n v_n)\varphi' = -\int (u_n' v_n + u_n v_n')\varphi \to -\int (u'v + uv')\varphi$$

Quindi $uv \in W^{1,\infty}(J)$. Dato che J è arbitrario e φ ha supporto compatto, allora $\int (uv)'\varphi = -\int (u'v + uv')\varphi$ per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Oppure, più semplicemente, scelto J intervallo aperto che includa il supporto di φ, notiamo che per ogni $p < \infty$ vale $u, v \in W^{1,p}(J)$, e da quanto visto sopra otteniamo la tesi. □

Corollario 22.7. Se $G \in C^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}$, allora $G(u) \in W^{1,p}$ e $G(u)' = G'(u)u'$.

$G(0) = 0$ non serve se I è limitato, altrimenti serve per scremare casi banali come la costante 1, che non sta in $L^p(I)$ se I è illimitato. In questo caso, dato che le $W^{1,p}$ sono infinitesime voglio che lo sia anche la loro composizione con G.

Dimostrazione. Dato che u è infinitesima a ∞ e $G(0) = 0$ allora abbiamo $|G \circ u| \leq C\,|u|$, quindi $G \circ u \in L^p$. Supponiamo $p < \infty$, $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ e $u_n \to u$

[43] Si intendono le relative restrizioni.
[44] Basta aggiungere e sottrarre uv_n.

in $W^{1,p}$ e in $L^\infty(I)$. Abbiamo che $G(u_n) \to G(u)$ in $L^\infty(I)$ perché G è uniformemente continua su $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ e possiamo prendere[45] $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. Ugualmente G' è uniformemente continua su $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$, e quindi $G'(u_n) \to G'(u)$ in $L^\infty(I)$. Abbiamo, per ogni $\varphi \in C^1_c$,

$$\int G(u)\varphi' \leftarrow \int G(u_n)\varphi' = -\int G'(u_n)u_n'\varphi \to -\int G'(u)u'\varphi$$

e quindi $G(u) \in W^{1,p}$ e $G(u)' = G'(u)u'$.

Per $p = \infty$ come prima, prendendo $u_n \to u$ in $L^\infty(J)$ per ogni $J \subset I$ limitato. □

22.2 Lo spazio $W^{1,p}_0$

Definizione 22.8. $W^{1,p}_0(I)$ è la chiusura di $C^1_c(I)$ in $W^{1,p}(I)$.

Teorema 22.9. $u \in W^{1,p}_0$ se e solo se $u \in W^{1,p}$ e $\lim_{x\to\partial I} u(x) = 0$.

Osserviamo che avevamo già detto che le funzioni in $W^{1,p}$ sono (uniformemente) continue e si estendono con continuità al bordo.

Dimostrazione. La freccia $\Rightarrow$ è ovvia, perché se $u_n \in C^1_c(I)$, allora $u_n \to u$ in $W^{1,p}$ e L^∞, quindi $U_{|\partial I} = 0$. Per il viceversa costruiamo una famiglia di approssimanti in questa maniera: prendiamo $G(x)$ un raccordo C^1 della funzione che vale 0 se $|x| < 1$ e x se $|x| > 2$. Prendiamo poi $u_n = \frac{1}{n}G(nu) = G_n(u)$, dove

$$G_n(x) = \frac{1}{n}G(nx) \in C^1$$

e

$$\|G_n'\|_\infty = \|G'\|_\infty \qquad G_n \to G \text{ unif.}$$

e dato che $G(0) = 0$ e u va a zero sul bordo abbiamo che $\operatorname{supp}(u_n) \subseteq \{x \mid |u(x)| \geq 1/n\}$, per cui il supporto di u_n è incluso in $\mathring{I}$, è compatto e $u_n \in W^{1,p}(I)$. Quindi esiste $u_{n,k} \in C^1_c(\mathbb{R})$ tale che $u_{n,k} \xrightarrow{k} (u_n)$. Ma[46] $u_{n,k} = u_n * \rho_k \in C^1_c(I)$ appena $\operatorname{supp}(\rho_k) \subset B_\varepsilon$, con $\varepsilon < \operatorname{dist}(\partial I, \operatorname{supp} u_n)$. Si conclude per procedimento diagonale, visto che $u_n \to u$ in $W^{1,p}$, $u_{n,k} \to u_n$ in $W^{1,p}$ e $u_{n,k} \in C^1_c(I)$. □

Osserviamo che se $p < \infty$, $W^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}_0(\mathbb{R})$. Vale inoltre il seguente risultato

Teorema 22.10 (Poincaré)**.** Se I è limitato esiste C che dipende solo da I tale che

$$\forall u \in W^{1,p}_0(I) \;\; \|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p(I)}$$

[45] Per com'è fatta l'approssimazione per convoluzione.

[46] Dove $*$ è il prodotto di convoluzione e ρ_k è il k-esimo nucleo di convoluzione standard.

In altre parole $\|u'\|_{L'p}$ è una norma equivalente su $W_0^{1,p}$ (l'altra disuguaglianza è ovvia).

Dimostrazione. Siano $I = (a,b)$ e $u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt$. Dato che $u(a) = 0$ perché $u \in W_0^{1,p}$, si ha $|u(x)| \leq \int_a^x |u'|\ dt \leq \|u'\|_{L^1(I)}$ e quindi $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}$, dunque

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(I)} &\leq \left(\int_a^b |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{L^\infty} (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\|u'\right\|_{L^1(I)} (b-a)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \left\|u'\right\|_{L^p} = (b-a) \left\|u'\right\|_{L^p}\end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza è ottenuta usando Hölder su $\|u' \cdot 1\|_{L^1}$. Quindi $\|u\|_{W^{1,p}} \leq (1+b-a)\,\|u'\|_{L^p}$. □

Notiamo che la costante ottenuta *non* è ottimale, e il motivo è che abbiamo usato Hölder "in due versi diversi", nel senso che ne abbiamo usate due che non possono essere massimizzate contemporaneamente.

23 20/11 - Esercitazione

Le C^1 a tratti sono in $W^{1,p}$, la derivata debole è la derivata sui tratti derivabili. Inoltre, dato che $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$, $C^1(a,b) \not\subseteq W^{1,p}(a,b)$, ad esempio $\ln(x) \notin W^{1,p}(0,1)$.

Chiediamoci se, data $u \in C^0[a,b]$ tale che u' è definita ovunque (ad esempio se $u \in C^1(a,b)$), allora $u \in W^{1,p}(a,b) \Leftrightarrow u' \in L^p(a,b)$.

Esercizio 23.1. Sia $u \in C^1(0,1) \cap C^0[0,1]$. Allora $u \in W^{1,1}(0,1) \Leftrightarrow u' \in L^1(0,1)$.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Se $u \in W^{1,1}(0,1)$, la sua derivata debole coincide con quella classica, che quindi sta in L^1.

"$\Leftarrow$": Se $u \in C^1(a,b)$ e $u' \in L^1$, allora per il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale u' è la derivata debole di u.

□

Comunque in generale $(C^0[a,b] \cap C^1(a,b)) \setminus W^{1,p} \neq \emptyset$, un esempio è $x\sin(x)$ (0 in 0).

Esercizio 23.2. Se $u \in W^{1,2}(a,b)$ allora $u^2 \in W^{1,1}$.

Dimostrazione. Ovvio perché i W sono chiusi per prodotto e siamo su uno spazio a misura finita, quindi $L^2 \subseteq L^1$. La Gelli si rifà tutta la costruzione.
□

Il viceversa è falso, basta prendere $1 \cdot \mathrm{sgn}(x)$.

Esercizio 23.3 (difficile)**.** Se $u \geq 0$ e $u^2 \in W^{1,1}(a,b)$ è vero che $u \in W^{1,2}(a,b)$?

Esercizio 23.4. Sia $X = H_0^1(0,1)$ con la norma $\int_0^1 (u')^2$. Fissata $g \in L^2(0,1)$, dimostrare che $T\colon X \to \mathbb{R}$ definita da

$$T(u) = \int_0^1 g(x)u(x)\,dx$$

è lineare e continua e calcolarne la norma.

Variante: provare a calcolare la norma di T mettendo su X la norma $\|\cdot\|_{H^1}$.

Esercizio 23.5. Sia $f(x) = x(\ln(x) - 1)$, con $x \in [0,1]$. Stabilire se $f \in W^{1,p}(0,1)$ per qualche p.

24 21/11

24.1 Derivate di ordine superiore

Definizione 24.1. per $m > 1$ lo spazio $W^{m,p}$ è definito ricorsivamente come

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I) \mid u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}$$

Questo è uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{\alpha=0}^{m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$$

Inoltre $H^m = W^{m,2}$ è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{\alpha=0}^{m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2}$$

Notiamo che la norma indotta da questo prodotto scalare, cioè

$$\|u\|_{H^m} = (\langle u, v\rangle_{H^m})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\alpha=0}^{m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

non coincide con $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$, ma comunque sono equivalenti.

Definizione 24.2. Lo spazio $W_0^{m,p}$ è definito come

$$W_0^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m,p}(I) \mid \forall \alpha < m \ (\partial^\alpha u)_{|\partial I} = 0\right\} = \overline{C_0^1(I)}^{W^{m,p}(I)}$$

In altre parole sono le funzioni le cui derivate di ordine fino a $m-1$ hanno traccia nulla, dove la traccia è, per le funzioni che ammettono una naturale estensione al bordo[47], la restrizione al bordo.

Definizione 24.3. $W^{-1,p'}(I)$ è il duale di $W_0^{1,p}$ munito della norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \left\|u'\right\|_{L^p(I)}$$

In generale vogliamo rappresentare la dualità come prodotto scalare in L^2, Se $V < L^2$, con I limitato, passando al duale, l'inclusione si inverte e abbiamo

$$V \hookrightarrow L^2 \equiv (L^2)' \hookrightarrow V'$$

(infatti $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty \hookrightarrow L^2$) Prendiamo $V = W_0^{1,p}$ e $V^* = W^{-1,p'}$ lo interpretiamo come uno spazio contenente L^2 e tale che

$$\forall v \in V^* \cap L^2 \; \forall u \in V \; v(u) = \int_I vu$$

Ad esempio se $T \in (H_0^1)^*$, allora per Riesz esiste $v \in H_0^1$ tale che

$$T(u) = \int v'u' = -\int uv''$$

(questa notazione è più suggestiva che altro, di derivate deboli ne abbiamo solo una[48])

Teorema 24.4. Se $p < \infty$, per ogni $f \in W^{-1,p'}$ esistono $f_0, f_1 \in L^{p'}$ tali che

$$\forall v \in W_0^{1,p} \; f(v) = \int_I f_0 v + \int_I f_1 v'$$

Dimostrazione. Guardiamo $W_0^{1,p} < L^p \times L^p$ tramite l'identificazione $u \mapsto (u, u')$, con la norma

$$\|(u,v)\|_{L^p \times L^p} = \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

Quindi $T \in W^{-1,p'}$ si estende a $\tilde{T} \in (L^p \times L^p)^* = L^{p'} \times L^{p'}$, e quindi $\tilde{T} = (f_0, f_1)$, per cui

$$Tu = \tilde{T}(u,u') = \int f_0 u + \int f_1 u'$$

□

Dato che $W_0^{1,p}$ non è denso, f_0 ed f_1 in generale non sono uniche.

[47] Come le $W^{m,p}$, che sono uniformemente continue.

[48] Probabilmente ha senso come derivata distribuzionale.

24.2 Applicazioni

Esempio 24.5. Consideriamo, per $f \in L^2(0,1)$,

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \qquad \text{(condizione di Dirichlet)} \end{cases}$$

Moltiplichiamo l'equazione per una funzione test $\varphi \in C_c^1[0,1]$ e integriamo, calando così di una derivata (equazione in forma debole)

$$\forall \varphi \in C_c^1 \int_0^1 u'\varphi' + u\varphi = \int_0^1 f\varphi$$

Cerchiamo una soluzione di questa (soluzione debole) in $H_0^1(0,1)$. Definiamo

$$F(u) = \int \frac{(u')^2}{2} + \frac{u^2}{2} - fu$$

L'equazione in forma debole la possiamo vedere come l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale F:

$$\int_0^1 u'\varphi' + u\varphi - f\varphi = \partial_\varphi F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u+t\varphi) - F(u)}{t}$$

Essenzialmente stiamo vedendo l'equazione debole come l'equazione di Lagrange di un funzionale convesso e vorremmo trovare la soluzione prendendo il minimo del funzionale convesso coercivo. Per cercare il minimo di F usiamo Lax-Milgram. $a(u,v) = \int u'v' + uv$ è una forma bilineare simmetrica continua e coerciva in H_0^1. Consideriamo poi

$$\varphi(v) = \int fv \in (H_0^1)^*$$

Per Lax-Milgram esiste un unico $\bar{u}$ tale che $\forall v \in H_0^1$ $a(\bar{u}, v) = \varphi(v)$, e cioè

$$\int_0^1 \bar{u}'v' + \bar{u}\bar{v} - fv = 0$$

e cioè $\bar{u}$ è una soluzione debole della forma debole di $-u'' + u = f$ in H_0^1. Lax-Milgram dice anche che $\bar{u} = \min F$. In realtà abbiamo mischiato due metodi abbastanza equivalenti: o usiamo Lax-Milgram oppure diciamo che F è un funzionale coercivo strettamente convesso con unico minimo.

Possiamo anche riscrivere l'equazione debole come

$$\forall \varphi \in C_c^1 \int u'\varphi' = \int (f-u)\varphi$$

Questo mi dice che $u \in H^2$ e che $u'' = u - f \in L^2$. Infatti

$$u \in H^2 \Leftrightarrow u' \in H^1 \Leftrightarrow \int u'\varphi' = \int (\underbrace{\dots}_{\in L^2})\varphi$$

In particolare se $f \in C^0$, visto che u è continua poiché sta in H^1_0, allora $u'' \in C^0$, cioè $u \in C^2$ è una soluzione classica (forte).

Esempio 24.6 (Principio del massimo)**.** Studiamo, per $f \in L^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = a \qquad u(1) = b \end{cases}$$

Possiamo ricondurci al problema precedente ponendo

$$\tilde{u} = a + (b-a)x \qquad v = u - \tilde{u} \in H^1_0$$

Abbiamo $v' = u' - (b-a)$ e $v'' = u''$. Il problema diventa dunque

$$\begin{cases} -v'' + v = f(x) - (b-a)x - a = \hat{f} \in L^2 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

Vale in generale per questa equazione il principio del massimo:

$$f \le c \Rightarrow u \le \max\{a, b, c\} \qquad f \ge d \Rightarrow u \ge \min\{a, b, d\}$$

Infatti se $f \in C^0$ allora esiste una soluzione classica $u \in C^2$. Se per assurdo esistesse x_0 tale che $u(x_0) > \max\{a, b, c\}$, allora x_0 non può stare sul bordo, cioè $x_0 \in (0,1)$. Possiamo prendere allora $\tilde{x}_0 = \arg\max_{[0,1]} u$ e abbiamo

$$u(\tilde{x}_0) \ge u(x_0) > \max\{a, b, c\} \qquad u''(\tilde{x}_0) \le 0$$

e quindi $-u''(\tilde{x}_0) + u(\tilde{x}_0) > c \ge f(\tilde{x}_0)$, ovvero l'equazione non vale in $\tilde{x}_0$.

Invece di fare una stima puntuale possiamo anche dimostrarlo in forma integrale, più generale. Scegliamo $G \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{se } x \le 0 \\ G(x) > 0 & \text{se } x > 0 \\ G'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e riscriviamo il problema in forma debole

$$\forall v \in H^1_0 \quad \int u'v' + uv = \int fv$$

Poniamo $C = \max\{a, b, c\}$ e funzione test $v = G(u - C)$, che sta in H^1_0 perché $u(0) = a \le C$ e $u(1) = b \le C$.

$$\int \underbrace{(u')^2 G'(u-C)}_{\ge 0} + \underbrace{(u-C)G(u-C)}_{\ge 0} = \int \underbrace{(f-C)G(u-C)}_{\le 0}$$

(per il secondo addendo si fa per casi sul segno di $u - C$) quindi è tutto nullo e $u \le C$ quasi ovunque, perché se $(u')^2 \ne 0$ allora G' dev'essere nulla, altrimenti si vede che vale $u = f = C$ e quindi $G = 0$.

24.3 Spazi di Sobolev in dimensione maggiore di uno

Definizione 24.7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Definiamo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \forall i \in \{1, \dots n\} \ \exists g_i \in L^p(\Omega) \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \ \int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int g_i \varphi \right\}$$

Le g_i sono uniche e poniamo $\nabla u = (g_1, \dots, g_n) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

In altre parole esiste un "gradiente" che fa funzionare l'integrazione per parti. Definiamo su questo spazio la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Otteniamo così uno spazio di Banach, che ci fa comodo pensare come sottospazio chiuso $W^{1,p} < (L^p)^{n+1}$ tramite l'immersione

$$u \mapsto \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

in maniera da ereditare alcune proprietà degli L^p, ad esempio

Proposizione 24.8. $W^{1,p}$ è separabile se $p < \infty$, è riflessivo se $1 < p < \infty$.

A volte si considera su $W^{1,p}$ la norma equivalente

$$\|u\| = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

Definizione 24.9. $H^1 = W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

la norma indotta $(\langle u, v \rangle)^{\frac{1}{2}}$ è equivalente alle precedenti.

Mostriamo ora un primo risultato di approssimazione, simile al caso degli L^p, in cui per $p < \infty$ ogni funzione si approssima con funzioni C_c^1 e per $p = \infty$ abbiamo approssimazioni uniformi sui compatti. Lo schema è estendere le funzioni a tutto $\mathbb{R}^n$, fare una convoluzione che converge in L^p e se l'insieme di partenza è illimitato e voglio approssimazioni a supporto compatto fare una cut-off. Per passare dagli L^p ai $W^{1,p}$ vediamo che la derivata della convoluzione è la convoluzione della derivata. Il problema è sempre nell'estensione della funzione a tutto lo spazio, facile in L^p ma difficile in $W^{1,p}$.

Teorema 24.10. Sia $p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste $u_n \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_{n|\Omega} \to u$ in $L^p(\Omega)$ e, per ogni[49] aperto $\Omega' \Subset \Omega$, $u_{n|\Omega'} \to u$ in $W^{1,p}(\Omega')$.

[49] $A \Subset B$ vuol dire che $\bar{A}$ è compatto e incluso in B.

Dimostrazione. Definiamo innanzitutto un'estensione $\tilde{u}$ di u ponendola 0 fuori da Ω. Abbiamo $\|\tilde{u}\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$ e $\tilde{u}_{|\Omega'} = u_{|\Omega'} \in W^{1,p}(\Omega')$. Fissiamo allora φ tale che $\int \varphi = 1$ e $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-1,1]$ e definiamo $\rho(x) = \varphi(|x|)$ e $\rho_k = k^n \rho\left(\frac{x}{k}\right)$. Poi fissiamo una successione $\xi_k \in C_c^1$ tale che $\xi_k(x) = 1$ se $|x| < k$ e che $0 \leq \xi_k \leq 1$. Definiamo allora la successione

$$u_k = (\tilde{u} * \rho_k)\xi_k$$

Le ρ_k servono a regolarizzare, mentre le ξ_k servono a stare in C_c^1. Dato che $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u_k \to u$ in L^p, abbiamo l'approssimazione in L^p. Inoltre la convoluzione è una media in un intorno di un punto che va al massimo lontano quanto il supporto dei nuclei regolarizzanti. Quindi $u_k \in W^{1,p}(\Omega')$ non appena k è tale che $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) < \frac{1}{k}$, poiché $\operatorname{supp}(\rho_k) \subseteq B_{\frac{1}{k}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

$$\nabla u_k = (\nabla u) * \rho_k \xrightarrow{L^p(\Omega')} \nabla u$$

□

Quindi estendo comunque alla funzione nulla: in $W^{1,p}$ andrà male sul bordo di Ω, ma comunque ottengo una approssimazione evitando questo bordo. In realtà questo approccio può essere raffinato ancora, senza porsi problemi sull'estensione, poiché questo richiederebbe imporre delle condizioni sul bordo. È vero infatti il seguente risultato (omettiamo la dimostrazione):

Teorema 24.11 (Meyers-Serrin)**.** $\exists u_n \in \left(C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}\right)\ u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u.$

25 25/11

25.1 Generalizzazioni in dimensione maggiore di uno

Definizione 25.1. Per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto si danno definizione analoghe al caso unidimensionale. Ad esempio

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}} < W^{1,p}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p} \;\middle|\; \forall i \leq n \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p} \right\} \qquad \|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ \sum|\alpha_i| \leq n}} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

E anche qui $H^m = W^{m,2}$ è un Hilbert con $\langle u, v\rangle = \sum_\alpha \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}$.

Proposizione 25.2. Se $p > 1$, $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, con $u_n \to u$ in L^p e $\|\nabla u_n\|_{L^p} \leq C$, allora $u \in W^{1,p}$.

Dimostrazione. Analoga al caso unidimensionale. □

Nel caso $p = 1$ come controesempio possiamo prendere

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ nx & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e $u_n \to H \notin W^{1,1}$, dove H sta per heavy-side, anche se $\|(u_n)_x\| = 1$. Quindi per $p = 1$ l'enunciato è falso.

Definizione 25.3. $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ se e solo se $u \in L^1(\Omega)$ e

$$\sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \;\middle|\; |\varphi| \leq 1, \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\} = |Du|(\Omega) < \infty$$

chiamiamo $|Du|$ la *variazione totale* in Ω. Questo è uno spazio di Banach con

$$\|u\|_{\mathrm{BV}} = \|u\|_{L^1} + |Du|(\Omega)$$

Osserviamo che $W^{1,1}$ è un sottospazio chiuso di BV e $\forall u \in W^{1,1}$ $|Du|(\Omega) = \|\nabla u\|_{L^1}$. Inoltre $u \in \mathrm{BV}$ se e solo se $\int Du\varphi \leq C \|\varphi\|_{C^0} \, \forall \varphi \in C_0^1$. Du è la *derivata distribuzionale*, $C = |Du|(\Omega)$, cioè Du è una misura di Radon (a valori in $\mathbb{R}^n$) con $|Du|(\Omega) < \infty$.

Proposizione 25.4. Se $p > 1$ e $u \in L^p(\Omega)$, allora sono equivalenti

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$
2. $\forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$ $\int u \partial_{x_i} \varphi \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}$
3. $\forall \Omega' \subset \Omega$ tale che $\Omega' + h \subset \Omega$ si ha $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq C |h|$

dove $\tau_h u(x) = u(x + h)$.

Dimostrazione.

(1⇒2) $\int u \partial_{x_i} \varphi = - \int u_{x_i} \varphi \leq \|u_{x_i}\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \leq \|u\|_{W^{1,p}} \cdot \|\varphi\|_{L^{p'}}$

(2⇒1) Assumiamo $\int u \partial_{x_i} \varphi \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}$. Allora il funzionale $T \colon \varphi \mapsto \int u \partial_{x_i} \varphi$, definito sulle C_c^1, è limitato rispetto a $\|\cdot\|_{L^{p'}}$ e quindi si estende a $T \colon L^{p'} \to \mathbb{R}$ limitata, cioè $T \in (L^{p'})^* = L^p$, cioè per ogni i esiste $g_i \in L^p$ tale che per ogni $\varphi \in C_c^1$

$$\int u \partial_{x_i} \varphi = - \int g_i \varphi$$

e quindi $u \in W^{1,p}$ per definizione.

(1⇒3, $p \neq \infty$) Abbiamo[50]

$$\int_{\Omega'} |\tau_h u - u|^p = \int_{\Omega'} \left| \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h \, dt \right|^p \leq |h|^p \int_{\Omega'} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt \, dx$$
$$\leq |h|^p \int_0^1 \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \, dt = |h|^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

e quindi $\|\tau_h u - u\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \cdot |h|$.

(3⇒2) Assumiamo $\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq C\,|h|$, e prendiamo $\varphi \in C^1_c(\Omega')$. dato che φ è nulla fuori da Ω' abbiamo, con con un cambio di variabili come nel caso unidimensionale,

$$\int_{\Omega'} (\tau_h u - u)\varphi = \int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x) \, dx = \int_\Omega u(x)(\varphi(x) - \varphi(x-h)) \, dx$$

Scrivendo ora $h = t\hat{h}$, con $|\hat{h}| = 1$, abbiamo

$$\frac{1}{t} \int_{\Omega'} (\tau_h u - u)\varphi = \int_\Omega u(x) \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(x - t\hat{h})}{t} \right) dx \xrightarrow{t \to 0} -\int u \partial_{\hat{h}} \varphi$$

e concludiamo notando che per le nostre ipotesi abbiamo

$$\frac{1}{t} \int (\tau_h u - u)\varphi \leq C \frac{|h|}{t} \|\varphi\|_{L^{p'}} = C \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

(1 ⇔ 3, $p = \infty$) In questo caso abbiamo

$$\|\tau_h u - u\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C\,|h| \Leftrightarrow \forall x, y \; [x,y] \subset \Omega \to |u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|$$
$$\Leftrightarrow |u(x) - u(y)| \leq C \operatorname{dist}_\Omega(x,y) = C \inf \left\{ L(\gamma) \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \in C^1([0,1], \Omega) \right\}$$

Notiamo che come conseguenza abbiamo che ogni $u \in W^{1,\infty}$ ha un rappresentante continuo.

□

Proposizione 25.5. Siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (in maniera che il prodotto stia[51] in L^p). Allora

1. $u \cdot v \in W^{1,p} \cap L^\infty$
2. $\partial_{x_i}(uv) = u_{x_i} v + u v_{x_i}$

[50] In realtà questo discorso andrebbe fatto sulle C^∞_c e poi andrebbe usata la densità; il problema è la prima uguaglianza, perché in generale non abbiamo rappresentante continuo in dimensione maggiore di uno.

[51] In dimensione più alta di 1 non abbiamo né rappresentanti continui né $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty$.

3. Se $G \in C^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$, $|G'| \leq C$ e $u \in W^{1,p}$, allora $G \circ u \in W^{1,p}$ e $\partial_{x_i}(G \circ u) = G'(u)u_{x_i}$.

Dimostrazione. Analogo al caso monodimensionale, approssimando con le regolari. □

Osserviamo che se $u \in W^{1,p} \cap L^\infty$ non serve che $|G'| \leq C$, e se Ω è limitato non serve $G(0) = 0$.

Proposizione 25.6. Sia $H \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega' = H(\Omega)$, $H \colon \Omega \to \Omega'$ diffeomorfismo tale che $J_H = \det DH \in L^\infty(\Omega)$ e $J_{H^{-1}} \in L^\infty(\Omega')$, cioè che sia un diffeomorfismo "uniforme". Allora se $u \in W^{1,p}(\Omega')$ si ha $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\partial_{x_i}(u \circ H) = \sum_j (\partial_{y_j} u \circ H)(\partial_{x_i} H^j)$.

Dimostrazione. Prendiamo $\tilde{\Omega}'$ aperto a chiusura compatta in Ω' e $u_n \in C^1_c(\Omega')$ tali che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\tilde{\Omega}')$. Definiamo $\tilde{\Omega} = H^{-1}(\tilde{\Omega}')$ e osserviamo che $u_n \circ H \to u \circ H$ in $L^p(\tilde{\Omega})$, dato che

$$\int_{\tilde{\Omega}'} |u_n - u|^p = \int_{\tilde{\Omega}} |u_n \circ H - u \circ H|^p \, |J_{H^{-1}}|^p \geq C \int_{\tilde{\Omega}} |u_n \circ H - u \circ H|^p$$

perché $|JH| \leq C$ su Ω. Analogamente si mostra $(u_n)_{y_i} \circ H \to u_{y_i} \circ H$ in $L^p(\tilde{\Omega})$.

Se $\varphi \in C^1_c(\tilde{\Omega})$, usando il fatto che $\partial_{x_i}(u_n \circ H) = \sum_j \partial_{y_j} u_n \partial_{x_i} H^j$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u \circ H)\varphi_{x_i} \leftarrow \int_\Omega (u_n \circ H)\varphi_{x_i} &= -\int (u_n \circ H)_{x_i} \varphi \\ = -\int_\Omega \sum_j [(u_n)_{y_j} \circ H] H^j_{x_i} \varphi &\to -\int_\Omega \Big(\sum_j [u_{y_j} \circ H] H^j_{x_i} \Big) \varphi\end{aligned}$$

□

Teorema 25.7 (di Estensione)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, oppure $\partial\Omega \in C^1$ compatto[52]. Allora esiste $T \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che

- $\|Tu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$
- $\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|u\|_{L^p(\Omega)}$
- $Tu_{|\Omega} = u$

Con $\partial\Omega \in C^1$ intendiamo che è il grafico di una funzione C^1, cioè che è localmente diffeomorfo a $B_1 \times \mathbb{R}^n_+$. Comunque invece del bordo compatto si può assumere l'ipotesi più debole "bordo uniformemente C^1". In realtà basta anche uniformemente Lipschitz. In ogni caso vedremo la dimostrazione nel caso più semplice in cui il bordo è compatto (la prossima volta).

[52] Non sono le ipotesi più generali possibili.

26 27/11 - Esercitazione

Esercizio 26.1. Dimostrare che $L^2(0,1)$, visto come immerso in $L^1(0,1)$, è di prima categoria[53].

Esercizio 26.2. Sia H un Hilbert:

1. Dimostrare che se $T\colon H \to H$ è compatto, $T \circ T$ è compatto.
2. Esibire $S\colon H \to H$ compatto tale che $S = T \circ T$, con T non compatto.
3. Sia T autoaggiunto. Mostrare che se $T \circ T$ è compatto anche T è compatto.
4. (facoltativo) Cosa succede se tolgo l'ipotesi H riflessivo?

Esercizio 26.3. Sia $T\colon \ell^p \to \ell^p$, con $p < \infty$, definito come

$$T\left(\{x_n\}_{n\geq 1}\right) = \left\{\frac{x_{n+2} - x_n}{n}\right\}_{n\geq 1}$$

1. Dire se T è compatto e calcolare $\|T\|$.
2. Dire se T è iniettivo o surgettivo.
3. Determinare lo spettro di T.

Esercizio 26.4. Sia $V = L^2(\Omega, \mathbb{Z})$. Dimostrare che V è

1. un sottogruppo chiuso di $L^2(\Omega)$;
2. connesso per archi di classe $C^{0,\frac{1}{2}}$ (nel senso che sono Hölderiani)

Esercizio 26.5. Siano H un Hilbert e $A\colon H \to H$ autoaggiunto e definito positivo, cioè per ogni $x \in H$ vale $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

1. Mostrare che se A è iniettivo, allora

   $$x \mapsto \|x\|_\sim = \sqrt{(Ax, x)}$$

   definisce una norma su H confrontabile[54] con quella indotta dal prodotto scalare. Dire se $(H, \|\cdot\|_\sim)$ è ancora un Hilbert.
2. Trovare condizioni su A per cui $\|\cdot\|_\sim$ è equivalente a $\|\cdot\|$.
3. Dimostrare che se A è compatto non è surgettivo.
4. C'era un altro punto ma la Gelli non se lo ricorda.

[53] Cioè è unione numerabile di chiusi a parte interna vuota

[54] Cioè una delle due è più fine dell'altra.

Esercizio 26.6. Siano $g(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$ e $T\colon \varphi \mapsto \varphi * g$.

1. Provare che T definisce un operatore lineare, continuo e autoaggiunto su $L^2(\mathbb{R})$.

2. Provare che T è iniettiva ed ha immagine contenuta in $H^1(\mathbb{R})$.

3. Dire se T è compatto e se è surgettivo.

Esercizio 26.7. Sia $X = H_0^1(0,1)$ e sia $f \in L^2(0,1)$ fissata. Dimostrare che $T\colon X \to \mathbb{R}$ definito come $T(\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx$ è lineare e continuo con X dotato della norma

$$\|\varphi\|_X = \left(\int_0^1 (\varphi'(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

e calcolarne la norma.

Risolviamo prima un altro esercizio più facile:

Esercizio 26.8. Sia $S\colon H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ tale che $S(\varphi) = \int_0^1 h(x)\cdot\varphi'(x)\,dx$ con $h \in L^2(0,1)$ fissata. Dimostrare che S è lineare e limitato e calcolarne la norma.

Dimostrazione. Che S è lineare è ovvio. S è ben definito perché se $h \in L^2$ e $\varphi \in H_0^1$, allora $h \in L^2$ e $\varphi' \in L^2$, quindi $h \cdot \varphi' \in L^1$ per Hölder. Inoltre

$$|S(\varphi)| \leq \left\|\int_0^1 h(x)\varphi'(x)\,dx\right\| \leq \left(\int_0^1 h^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 (\varphi')^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|h\|_{L^2(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{H_0^1(0,1)}$$

Dunque S è limitato e $\|S\| \leq \|h\|_{L^2(0,1)}$. Consideriamo ora $g(x) = h(x) + c \in L^2(0,1)$. Questo ha norma diversa da quella di h, e

$$\int_0^1 g(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\varphi'(x)\,dx + \underbrace{\int_0^1 c\varphi'(x)\,dx}_{=c[\varphi(1)-\varphi(0)]} = S(\varphi)$$

Analogamente a prima posso mostrare

$$\|S\| \leq \|g\|_{L^2(0,1)} = \|h + c\|_{L^2(0,1)}$$

e quindi

$$\|S\| \leq \min_{\substack{g=h+c\\ c\in\mathbb{R}}} \|g\|_{L^2(0,1)} = \min_{c\in\mathbb{R}} \|h + c\|_{L^2(0,1)}$$

scrivendo $c = -\alpha$ possiamo pensare RHS come la distanza (in L^2) di h dal sottospazio W delle funzioni costanti, e quindi se P è la proiezione su W, coincide con $\|h - P(h)\|_{L^2(0,1)}$. Dato che W è generato dalla costante $f \equiv 1$ e $\|f\|_{L^2(0,1)} = 1$ si ha

$$Ph = h(x) - (h, f)_{L^2(0,1)} = h(x) - \int_0^1 h(x) \cdot 1 \, dx$$

In definitiva abbiamo

$$\|S\| \leq \left\| h - \int_0^1 h \, dx \right\|_{L^2(0,1)}$$

Mostriamo la disuguaglianza opposta. Voglio vedere che $\|S\| = \left\| h - \int_0^1 h(x) \, dx \right\|_{L^2(0,1)}$. Se $g \in H_0^1$ possiamo integrare per parti e abbiamo in tal caso

$$S(\varphi) = \int_0^1 \underbrace{\left(h - \int_0^1 h \right)}_{=g(x)} \varphi'(x) \, dx = -\int_0^1 g' \varphi(x) \, dx + [g(x)\varphi(x)]_0^1$$

Provare a vedere se sotto ulteriori ipotesi si riesce a stimare $\|S\| = \|g\|_{L^2(0,1)}$. $\square$

Risolviamo ora l'Esercizio 26.7.

Dimostrazione. Sia $f \in L^2(0,1)$. $T(\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x) \, dx$. Linearità e continuità seguono da

$$|T(\varphi)| \underbrace{\leq}_{\text{Hölder}} \|f\|_{L^2(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \underbrace{\leq}_{\text{Poincaré}} \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \, \|\varphi\|_{H_0^1(0,1)}$$

Inoltre, posta $h(x) = \int_0^x f(t) \, dt \in H_0^1$, si ha $f = h'$ e quindi

$$|T(\varphi)| = \int_0^1 f(x)\varphi(x) \, dx = \underbrace{[h(x)\varphi(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 h(x)\varphi'(x) \, dx$$

Ne segue

$$T(\varphi) = -S_{h=\int_0^x f}(\varphi) = -\int_0^1 h(x)\varphi'(x) \, dx$$

da cui passando alle norme

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x) \, dx = \|T(\varphi)\| = \|S_h\| \underbrace{=}_{\text{Es.26.8}} \left\| h - \int_0^1 h \right\|_{L^2(0,1)}$$

$$= \left\| \int_0^x f(t) \, dt - \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) \, dt \right) \, dx \right\|_{L^2(0,1)}$$

$\square$

Esercizio 26.9. Sia $(X, \|\cdot\|)$ un Banach di dimensione infinita. Esiste una norma $\|\cdot\|_1$ su X non equivalente a $\|\cdot\|$ e tale che $(X, \|\cdot\|_1)$ è ancora uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Se esiste $\|\cdot\|_1$ tale che $(X, \|\cdot\|_1)$ è ancora un Banach, per il Teorema della mappa aperta $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|$ sono equivalenti se e solo se sono confrontabili. Infatti $\mathrm{Id}\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_1)$ è lineare e surgettiva e se vale $\|x\|_1 \le C\|x\|$ è anche continua, quindi aperta per il Teorema della mappa aperta. Dunque esiste $\tilde{C}$ tale che $\tilde{C}\|x\| \le \|x\|_1$. Cerchiamo quindi una norma $\|\cdot\|_1$ non confrontabile con $\|\cdot\|$.

Dato che X ha dimensione infinita esiste un funzionale $T\colon X \to \mathbb{R}$ lineare non continuo, cioè $\sup_{\|x\|=1} |T(x)| = \infty$. T in particolare non è identicamente nullo, e per linearità esiste $y \in T^{-1}(1)$. Definiamo $A\colon X \to X$ come $A(x) = x + yT(x)$, che è ovviamente lineare, e non continua. Inoltre A è bigettiva. L'inettività segue dal fatto che se $T\colon X \to \mathbb{R}$ è lineare possiamo scomporre $X = \operatorname{Ker} T + \langle y \rangle$ dove Ty genera l'immagine[55]. Basta quindi scrivere $x = w + \alpha y$, con $w \in \operatorname{Ker}(T)$, e imporre che $x \in \operatorname{Ker}(A)$, ottenendo

$$A(x) = x + yT(x) = w + \alpha y + yT(w + \alpha y) = w + 2\alpha y = 0$$

e dunque $w = -\alpha y$. La surgettività si ha sempre decomponendo lo spazio come prima.

A questo punto definisco $\|x\|_1 = \|Ax\|$. Resta da vedere che questa è una norma (conto di routine), che X è completo rispetto a questa e che la stessa non è comparabile con $\|\cdot\|$. Per vedere la completezza notiamo che se x_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_1$, possiamo definire $y_n = A(x_n)$ e questa successione è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|$. È facile allora vedere che

$$A^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

dove i limiti sono da intendersi nelle norme opportune. La non confrontabilità segue dal fatto che A non è limitato, il che a priori ci darebbe solo la non equivalenza, ma abbiamo visto che sotto queste ipotesi la confrontabilità coincide con l'equivalenza. □

27 28/11

27.1 Teorema di estensione

Teorema 27.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, che sia un semispazio o che abbia bordo C^1 e compatto[56]. Allora esiste $P\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che

[55] In generale il Ker di una mappa lineare è chiuso se e solo se la mappa è continua, altrimenti viene un denso di codimensione 1.

[56] Queste ipotesi non sono le più generali possibili, ma vedremo dopo le possibili generalizzazioni.

1. $Pu_{|\Omega} = u$

2. P è lineare e continuo ($\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$)

3. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$

Dimostrazione. Il caso "semispazio" si fa come in dimensione 1: definiamo

$$Pu = \begin{cases} u(x) & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ u(x', -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

e abbiamo $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 2 \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Dobbiamo vedere che

$$\|\nabla(Pu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Denotiamo $\bar{u} = Pu$ e, per $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, consideriamo $\int \bar{u}\varphi_{x_i}$. Per $i < n$ definiamo

$$\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n) \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$$

Chiaramente vale $\psi(x', -x_n) = \psi(x', x_n)$, e $\partial\psi_{x_i} = \partial\varphi_{x_i}(x', x_n) - \partial\varphi_{x_i}(x', -x_n)$. Tuttavia ψ può non essere a supporto compatto in Ω, per cui definiamo $\psi_k = \eta_k(x_n)\psi$, dove $\eta_k(s) = \eta(ks) \to 1$, con $\eta\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ funzione di cutoff C^1 che vale 0 per $x \leq 1$ e 1 per $x \geq 2$. Abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}\varphi_{x_i} = \int_\Omega u\psi_{x_i} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u(\psi_k)_{x_i} = \lim_{k\to\infty} -\int u_{x_i}\psi_k \to -\int_\Omega u_{x_i}\psi = -\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_{x_i}\varphi$$

Dove la seconda ugualianza vale perché $(\psi_k)_{x_i} = \eta_k\psi_{x_i} \to \psi_{x_i}$, e la terza perché $\psi_k \in C^1_c(\Omega)$. Dunque per ogni $i < n$ si ha $\|\bar{u}_{x_i}\|_{L^p} = 2 \|u_{x_i}\|_{L^p}$.

Se invece $i = n$ definiamo $\psi(x) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$, in maniera che $\psi(x', 0) = 0$. Dato che $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ abbiamo $\psi(x) \leq M|x_n|$, dove M dipende solo da $\|\varphi\|$. Inoltre definiamo $\psi_k = \eta_k(x_n)\psi \in C^1_c(\Omega)$. Si ha

$$\int_\Omega u(\psi_k)_{x_n} = \int_\Omega u\Big((\eta_k)_{x_n}\psi + \eta_k\big(\varphi_{x_n}(x', x_n) + \varphi_{x_n}(x' - x_n)\big)\Big)$$

Se $\int u(\eta_k)_{x_n}\psi \xrightarrow{k} 0$, allora l'integrale a destra converge a

$$\int_\Omega u\big(\varphi_{x_n}(x', x_n) + \varphi_{x_n}(x', -x_n)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}\varphi_{x_n}$$

mentre per l'integrale di sinistra si ha

$$\int_\Omega u(\psi_k)_{x_n} = -\int_\Omega u_{x_n}\psi_k \to -\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_{x_n}\varphi$$

Ma, dato che $\eta_k(x_n) = \eta(kx_n)$ e $(\eta_k)_{x_n} = k\eta'(kx_n)$, abbiamo $\mathrm{supp}(\eta'_k) \subseteq \left\{0 \leq x_n \leq \frac{2}{k}\right\}$; inoltre $\eta' \leq C$, quindi prendendo una palla $B_R \supseteq \mathrm{supp}(\varphi)$ e definendo $A_k = B_R \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid x_n \leq \frac{2}{k}\right\}$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} u(\eta_k)_{x_n}\psi = k\int_{\mathbb{R}^n_+} u\eta'(kx_n)\psi \leq kCM\int_{A_k} |u|\, x_n \leq CM\int_{A_k} |u| \xrightarrow{k} 0$$

Vediamo come il caso $\partial\Omega \in C^1$ compatto si riconduce al caso precedente. Possiamo ricoprire il bordo con N aperti U_i regolari e limitati tali che $\bigcup U_i \supset \partial\Omega$. Prendiamo poi U_0 aperto non limitato tale che $U_0 \cup \bigcup U_i = \mathbb{R}^n$. Ora prendiamo una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento, cioè delle $\psi_i \in C^1_c(U_i)$ tali che $0 \le \psi_i \le 1$ e che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia $\sum_{i=0}^N \psi_i(x) = 1$ e scriviamo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ come

$$u = \sum_{i=0}^{N} u_i \qquad u_i = \psi_i \cdot u$$

e $\operatorname{supp}(u_i) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_i) \Subset U_i$. Vogliamo poi porre $\bar{u} = \sum_{i=0}^N \bar{u}_i$, dove $\bar{u}_i$ è un'estensione di u_i. Basta quindi estendere le u_i. Se $i = 0$ ci basta definire

$$\bar{u}_0 = \begin{cases} u_0 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

Se invece $i > 0$, dato che il bordo è C^1, possiamo supporre che esistano dei diffeomorfismi $H_i \colon U_i \to (-1,1)^n = Q$ di classe C^1 tali che $H_i(\Omega \cap U_i) = Q^+ = Q \cap \{x_n > 0\}$ e per i quali valga $v_i = u_i \circ H_i^{-1} \in W^{1,p}(Q^+)$. Questa la possiamo estendere per il punto precedente a $\bar{v}_i \in W^{1,p}(Q)$ e definire

$$\bar{u}_i = \bar{v}_i \circ H_i \in W^{1,p}(U_i)$$

che estende u_i perché se $x \in U_i \cap \Omega$ si ha

$$\bar{u}_i(x) = v_i \circ H_i = u_i \circ H_i^{-1} \circ H_i = u_i(x)$$

$\square$

In realtà non è necessario Ω limitato: è sufficiente poter controllare la norma degli H_i uniformemente[57] in i, quindi basta uniformemente C^1. Basta anche uniformemente Lipschitz, o addirittura una "proprietà uniforme di cono interno e cono esterno". Sicuramente già in dimensione 2 si trovano controesempi in domini con cuspidi.

Corollario 27.2. Se $\partial\Omega$ è C^1 (basta Lipschitz) e $p < \infty$, $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$, cioè

$$\forall x \in W^{1,p}(\Omega)\ \exists u_n \in C^1_c(\mathbb{R}^n)\ u_{n|\Omega} \to u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

27.2 Teoremi di immersione

Se $n \ge 1$ esistono $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ senza alcun rappresentante continuo.

[57] Confrontare con la Proposizione 25.6.

Esempio 27.3. Per $n = 2$, consideriamo

$$u(x) = \begin{cases} -\log|\log|x|| & |x| \le e \\ 0 & |x| > e \end{cases}$$

Nonostante u non sia continua $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ per ogni $p \le 2$, perché

$$\int |u|^p = 2\pi \int_0^e |x| \left(\log|\log|x||\right)^p < \infty$$

$$\int |\nabla u(x)|^p = \int \frac{1}{|\log|x||^p \cdot |x|^p} = 2\pi \int_0^e \frac{ds}{|\log s|^p \, s^{p-1}} < \infty$$

Teorema 27.4 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.** Per $p < n$ si ha $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, dove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Per $p = n$ si ha $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in [p, +\infty)$ con immersioni continue e in particolare vale

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le C \|\nabla u\|_{L^p}$$

Osserviamo che $W^{1,p} \subset L^p$, per cui se $u \in W^{1,p} \cap L^{p^*}$ allora $u \in L^q$ per ogni $q \in [p, p^*]$.

Teorema 27.5 (Morrey)**.** Se $p > n$, allora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con immersione continua e $|u(x) - u(y)| \le C \|\nabla u\|_{L^p} |x-y|^\alpha$, dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, cioè u ha un rappresentante hölderiano. In particolare si ha $W^{1,p} \hookrightarrow C^\alpha$.

Corollario 27.6. Dato che, per $p < \infty$, $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, se $n < p < \infty$, allora esiste $u_n \in C^1_c$ tale che $\|u_n - u\|_{L^\infty} \to 0$. In particolare $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Dimostrazione del Teorema. Consideriamo per cominciare $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Sia Q un cubo aperto di lato ℓ con i lati paralleli agli assi e tale che $0 \in Q$ e fissiamo $x \in Q$. Allora

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^1 \partial_x u(sx)\, ds \right| = \left| \int_0^1 \sum_i u_{x_i}(sx) x_i \, ds \right|$$
$$\le \sum_i \int_0^1 |u_{x_i}(sx)| \, |x_i| \le \ell \sum_i \int_0^1 |u_{x_i}(sx)| \, ds$$

prendiamo $\bar{u} = \fint_Q u = \frac{1}{|Q|} \int_Q u$

$$|\bar{u} - u(0)| = \left| \fint_Q u(x) - u(0) \right| \le \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x) - u(0)|$$
$$\le \frac{1}{\ell^{n-1}} \int_0^1 \int_Q \sum_i |u_{x_i}(sx)| \, dx \, ds = \frac{1}{\ell^{n-1}} \int_0^1 \left(\int_{sQ} \sum_i |u_{x_i}(y)| \, dy \right) \frac{1}{s^n} \, ds$$
$$\le \frac{1}{\ell^{n-1}} \int_0^1 \|\nabla u\|_{L^p} \cdot \|\chi_{sQ}\|_{L^{p'}} \cdot \frac{1}{s^n} \, ds = \frac{\|\nabla u\|_{L^p}}{\ell^{n-1-\frac{n}{p'}}} \int_0^1 s^{-\frac{n}{p}} \, ds = C \|\nabla u\|_{L^p} \ell^{1-\frac{n}{p}}$$

Per traslazioni, questo resta vero anche se invece di 0 ci mettiamo un altro punto x. Allora se Q è un cubo di lato $2|x-y|$ che contiene x e y abbiamo

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-\bar{u}| + |u(y)-\bar{u}| \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \cdot |x-y|^{1-\frac{n}{p}}$$

Questo mostra la tesi per le C^1_c. Se $p=\infty$ allora $u \in W^{1,p}$ se e solo se u è Lipschitziana, $|u(x)-u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty} |x-y|$ e abbiamo concluso. Per $p<\infty$ possiamo trovare delle $u_n \in C^\infty_c$ tali che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $u_n(x) \to u(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, dunque per q.o. x, y vale $|u(x)-u(y)| \leq C\|\nabla u\|_{L^p} |x-y|^{1-\frac{n}{p}}$, e questo succede se e solo se u ha un rappresentante $1-\frac{n}{p}$-hölderiano. Inoltre, prendendo $\ell = 1$,

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |u(x)+\bar{u}-\bar{u}| \leq |\bar{u}| + |u(x)-\bar{u}| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \\ &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

e quindi $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$, cioè se $p>n$ vale $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

28 02/12 - Esercitazione

Consideriamo l'operatore $T\colon C^1[0,1] \to C^0[0,1]$ definito come $Tu = u'$. Questo è lineare e il suo dominio è denso in $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$. Verifichiamo che T è chiuso: supponiamo che u_n sia una successione di funzioni in $C^1[0,1]$ e che $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ e $Tu_n = u_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v$ e mostriamo che $u \in C^1[0,1]$ e $v = u' = Tu$. Per fare questo basta notare che

$$\underbrace{u_n(x)}_{\to u(x)} = \underbrace{u_n(0)}_{\to u(0)} + \underbrace{\int_0^x u_n'(t)\,dt}_{\to \int_0^x v(t)\,dt}$$

Consideriamo lo stesso operatore in L^2, cioè

$$S\colon C^1[0,1] \subseteq L^2(0,1) \to L^2(0,1) \qquad Su = u'$$

Chiaramente S è ancora lineare e definito su un denso, e ci chiediamo se è ancora chiuso. Supponiamo quindi che $C^1 \ni u_n \to u$ e $C^0 \ni u_n' \to v$, dove stavolta le convergenze sono da intendersi in L^2. Vorremmo mostrare che $u \in C^1$ e $u' = v$. Continua chiaramente ad essere vero che $u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt$. Estraiamo una sottosuccessione tale che $u_{n_k}(x) \to u(x)$ quasi ovunque in $(0,1)$. Allora, scegliendo i rappresentanti in maniera che $u_{n_k}(0) \to \alpha$,

$$\int_0^1 \chi_{[0,x]}(t) u_{n_k}'(t)\,dt \to \int_0^1 \chi_{[0,x]} v(t)\,dt$$

e quindi

$$\underbrace{u_{n_k}(x)}_{\to u(x)} = \underbrace{u_{n_k}(0)}_{\to \alpha} + \underbrace{\int_0^x u'_{n_k}(t)\,dt}_{\to \int_0^x v(t)\,dt}$$

per cui $u \in H^1(0,1)$. Consideriamo ora $Su = u'$, dove questa volta u' indica la derivata debole e $S\colon \operatorname{dom} S = H^1(0,1) \to L^2(0,1)$ e calcoliamo $S^*\colon \operatorname{dom} S^* \subseteq L^2 \to L^2$. Dato che, se $v \in H^1$,

$$\int_0^1 v(x) Su(x)\,dx = \int_0^1 v(x)u'(x) = vu|_0^1 - \int v'(x)u(x)$$

allora se restringo S a H_0^1 ho che $S^* = -S$ e S^* è chiuso, lineare e definito su un denso. In questa maniera recuperiamo alcune buone proprietà che valevano per $C^1[0,1]$.

Esercizio 28.1 (Caso del prim'ordine)**.** Sia $T\colon u \mapsto u' + a(x)u$. Di solito prendiamo $a \in C^1[0,1]$. Cosa succede se a è soltanto misurabile e sta in $L^\infty(0,1)$? T è iniettivo? È surgettivo? Chi è T^*? Posso anche considerare il dato al bordo

$$T\colon \left\{u \in H^1(0,1) \mid u(0) = 0\right\} \to L^2$$

Considero $T\colon H^2 \to L^2$ che manda u in $u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x)$, con $c, d \in L^\infty$. Cosa succese al problema di Cauchy? Intanto notiamo che se $u \in H^2$ sono ben definiti $u(0)$ e $u'(0)$.

Esercizio 28.2. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $g \in L^2$. Dire se esiste ed è unica $u \in H^2(0,1)$ tale che

$$\begin{cases} u'' + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = g(x) \\ u(0) = \alpha \\ u'(0) = \beta \end{cases}$$

Esercizio 28.3 (condizioni al bordo)**.** Data $g \in L^2(0,1)$ esiste un'unica $u \in H^2$ soluzione di

$$\begin{cases} u'' - c(x)u'(x) + d(x)u(x) = g(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo tipo di problemi (problemi di Sturm-Liouville) tramite l'analisi funzionale ci si riduce ad equazioni del tipo

$$(\alpha(x)u'(x))' + b(x)u(x) = \tilde{g}(x)$$

con $a(x) \geq c > 0$, moltiplicando l'equazione per $\exp(\int_0^x c(t)\,dt)$. Consideriamo allora

$$T\colon u \mapsto (a(x)u')' + b(x)u \in L^2$$

dove $u \in H^2$ (H^2_0 se $u(0)=u(1)=0$). Questo è lineare, autoaggiunto, definito su un denso e compatto. Infatti (T autoaggiunto)

$$\langle v, Tu\rangle = \int_0^1 v(x)(a(x)u')'\,dx + \int_0^1 v(x)b(x)u(x)\,dx$$

$$= \underbrace{v(x)a(x)u'(x)\big|_0^1}_{=0 \Leftarrow u,v\in H^1_0} - \int_0^1 a(x)u'v'\,dx + \int_0^1 v(x)b(x)u(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 u(x)[(a(x)v'(x))' + b(x)v(x)]\,dx = \langle Tv, u\rangle$$

Sappiamo che in questo caso T è iniettivo se e solo se è surgettivo, questo applicando il seguente

Teorema 28.4. Sia $A\colon \operatorname{dom} A \subset E \to F$, lineare e chiuso con $\operatorname{dom} A$ denso. Allora A è surgettivo se e solo se $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$ e $\operatorname{Im} A$ è chiuso.

con $A = T$, dove $\operatorname{dom} A = H^1_0(0,1)$. Posso quindi dire che per ogni $g \in L^2(0,1)$ esiste un'unica soluzione di $\begin{cases} Tu = g \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$ se e solo se

$$\begin{cases} (a(x)u')' + b(x)u(x) = 0 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0$$

Ora abbiamo

$$(a(x)u')'(x) = -b(x)u(x) \Leftrightarrow \int_0^x (a(t)u'(t))'\,dt = -\int_0^x b(t)u(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow a(x)u'(x) = a(0)u'(0) - \int_0^x b(t)u(t) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{a(0)u'(0)}{a(x)} - \int_0^x \frac{b(t)u(t)}{a(x)}\,dt$$

Qui l'idea è ripetere la dimostrazione del Lemma di Gronwall per funzioni di classe C^1.

Esercizio 28.5. Sia $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito come $T\varphi = \varphi * \chi_{[-\frac12,\frac12]}$. Allora T è lineare e ben definito. Infatti $\chi_{[-\frac12,\frac12]} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi * \chi \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre T è continuo perché

$$T\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(y)\,dy = \int_{x-\frac12}^{x+\frac12} \varphi(z)\,dz \le \left(\int \varphi^2(z)\,dz\right)^{\frac12} \left(\int_{x-\frac12}^{x+\frac12} 1\,dz\right)^{\frac12}$$

e T è autoaggiunto perché

$$\langle \psi, T\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\varphi * \chi_{[-\frac12,\frac12]}(x)\,dx = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \psi(x)\varphi(x-y)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(y)\,dydx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \psi(z+y)\varphi(z)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(y)\,dzdy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}} \psi(z+y)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(y)\,dydz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}} \psi(z-w)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(-w)\,dwdz = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(z)\psi(z-w)\chi_{[-\frac12,\frac12]}(w)dwdz = \langle T\psi, \varphi\rangle$$

29 04/12

29.1 Ancora sui Teoremi di immersione

Diciamo qualcosa in più su Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Avevamo detto che se $p < n$, si ha $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$ per ogni $q \in [p, p^*]$ e $\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$. Se $p = n$ abbiamo $W^{1,p} \in L^q$, per ogni $q < \infty$.

I Teoremi di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e Morrey valgono anche su tutti gli aperti con bordo C^1, oltre che per $\mathbb{R}^n$. Sobolev-Gagliardo-Nirenberg ci dà un'immersione in uno spazio di Lebesgue. Morrey ci dà un'immersione in uno spazio "classico" (continue o altre ipotesi di regolarità del genere). In questo spirito associamo a $W^{k,p}$ un *parametro di regolarità* pari a $k - \frac{n}{p}$.

Definizione 29.1. Indichiamo con $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, con $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in [0, 1)$, lo spazio delle $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tali che per ogni β tale che $|\beta| = k$ si ha $D^\beta u \in C^\alpha(\Omega)$.

In questo caso il parametro di regolarità è $k + \alpha$.

Teorema 29.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $\partial\Omega \in C^1$.

- Se $k - \frac{n}{p} < 0$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow L^q$, dove[58] $-\frac{n}{q} = k - \frac{n}{p}$, cioè $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$
- Se $k - \frac{n}{p} = 0$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow L^q$ per ogni $q < \infty$.
- se $k - \frac{n}{p} > 0$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow C^{m+\alpha}$ a patto che $k - \frac{n}{p} > m + \alpha$ o che $k - \frac{n}{p} = m + \alpha$, con $\alpha > 0$ (quest'ultimo caso corrisponde al Teorema di Morrey).

Osserviamo che, in particolare, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ se $k - \frac{n}{p} > m$, dove Ω ha sempre bordo regolare. Combinando questi Teoremi insieme ad Ascoli-Arzelà si ottengono Teoremi di immersione compatta. In generale se Ω è limitato e c'è disuguaglianza stretta fra i parametri di regolarità si ha immersione compatta. Più precisamente enunciamo, senza dimostrazione,

Teorema 29.3 (Rellich-Kondrachov)**.** Se Ω è limitato e $\partial\Omega \in C^1$

- Se $k - \frac{n}{p} < 0$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow L^q$ se $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, con immersione compatta[59].
- Se $k = \frac{n}{p}$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow L^q$ con immersione compatta per ogni $q < \infty$.
- Se $k - \frac{n}{p} > 0$, allora $W^{k,p} \hookrightarrow C^{m+\alpha}$ se $m + \alpha < k - \frac{n}{p}$, con immersione compatta.

In particolare, nelle ipotesi del Teorema, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con immersione compatta per ogni p, e $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ compatto per ogni $p > n$ (questo è proprio Ascoli-Arzelà applicato al Teorema di Morrey).

[58] $-\frac{n}{q}$ è il parametro di regolarità di L^q.

[59] Per questo caso non serve Ascoli-Arzelà direttamente, ma la sua "versione L^p", cioè il Teorema di compattezza forte in L^q, o Teorema di Fréchet-Kolmogorov.

29.2 $W_0^{1,p}$ in dimensione maggiore di uno

Sul Brezis le $W_0^{1,p}$ sono definite per $p < \infty$. In realtà si può dare la definizione anche per $p = \infty$ come "Lipschitziane 0 al bordo" (se non ho capito male). Il problema è che le C_c^1 non sono dense in L^∞.

Definizione 29.4. Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è $\overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}} < W^{1,p}(\Omega)$.

Non hanno traccia nulla (e non ha nemmeno troppo senso parlarne dato che in generale non abbiamo rappresentante continuo e il bordo ha misura 0), ma "quasi", nel senso che estendendole a 0 fuori restiamo in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Mostriamo preliminarmente che, se un rappresentante continuo esiste, ha traccia nulla:

Proposizione 29.5. Sia Ω un aperto con $\partial\Omega \in C^1$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u_{|\partial\Omega} = 0$$

Dimostrazione. Mostriamo prima il "$\Leftarrow$" Definiamo[60]

$$G(t) = \begin{cases} 0 & |t| < 1 \\ t & |t| > 2 \end{cases} \qquad |G(t)| \le |t| \qquad G_n(t) = \frac{1}{n} G(nt)$$

Si ha $G_n \to \mathrm{Id}$. Ora definiamo $u_n = \xi_n(u) G_n(u)$, dove ξ_n è una cutoff che vale 1 per $|u| \le n$ e 0 per $|u| \ge n+1$. Si vede che $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, $\mathrm{supp}(u_n) \Subset \Omega$ e $u_n \to u$ in $W^{1,p}$. Per $\varepsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(u_n), \partial\Omega)$ abbiamo $u_n * \rho_\varepsilon \in C_c^1(\Omega)$ e $u_n * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u_n$ in $W^{1,p}$. Ora $v_n = u_n * \rho_{\varepsilon_n} \in C_c^1(\Omega)$ è tale che $v_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Notiamo che per questa freccia non abbiamo utilizzato l'ipotesi $\partial\Omega \in C^1$.

Per il "$\Rightarrow$", sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e mostriamo che $u_{|\partial\Omega} = 0$. Per carte locali supponiamo $\Omega = Q^+ = \{(x', x_n) \mid |x'| < 1, x_n \in (0,1)\}$. Esiste per ipotesi $u_m \in C_c^1(Q^+)$ tale che $u_m \to u$ in $W^{1,p}(Q^+)$. Se $x_n < \varepsilon$ abbiamo

$$\left|u_m(x', x_n)\right| = \left| \int_0^{x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t)\, dt \right| \le \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \le \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t) \right| dt$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \le 1} \int_0^\varepsilon \left|u_m(x', x_n)\right| dx_n\, dx' \le \int_{|x'|<1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x', t) \right| dt\, dx'$$

e passando al limite per $m \to \infty$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| \le 1} \int_0^\varepsilon \left|u(x', x_n)\right| dx_n\, dx' \le \int_{|x'|<1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| dt\, dx' \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

[60] Nel senso che faccio un raccordo dei "pezzi" di G che fa sufficientemente non schifo.

Quindi, dato che $u \in C(\overline{\Omega})$,

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'|<1} \int_0^{\varepsilon} \left| u(x', x_n) \right| = \int_{|x'|<1} \left| u(x', 0) \right|$$

e quindi $u_{|\partial Q^+} = 0$ e $u_{|\partial\Omega = 0}$. $\square$

Proposizione 29.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$, $\bar{u} = \begin{cases} u & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Dimostrazione. Per esercizio. $\square$

Notiamo che in $W_0^{1,p}$ l'unica costante è 0 perché le costanti sono continue e quindi devono essere 0 al bordo. Questo vuol dire che l'unica funzione dello spazio con gradiente 0 e la costante 0, e permette di dimostrare che

Proposizione 29.7 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** Sia $p < \infty$, Ω limitato con $\partial\Omega \in C^1$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste $C(\Omega, p)$ tale che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

In particolare $\|\nabla u\|_{L^p}$ è una norma equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}}$ su $W_0^{1,p}$.

Osserviamo che in $H_0^1 = W_0^{1,2}$, un prodotto scalare equivalente è $\langle Du, Dv \rangle_{L^2}$.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esista $u_n \in W_0^{1,p}$ tale che $\|u_n\|_{L^p} = 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^p} \to 0$. Questa successione è limitata: $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq 2$ (per n abbastanza grande). Quindi $\{u_n\}$ è relativamente compatta in L^p per Rellich-Kondrachov e quindi a meno di passare a sottosuccessioni $u_n \to u$ in L^p. Poiché $\nabla u_n \to 0$ si ha $u \in W^{1,p}$ e $\nabla u = 0$, quindi u è costante[61]; ma $\|u\|_{L^p} = 1$, quindi $u \neq 0$, che è assurdo perché $u \in W_0^{1,p}$. $\square$

Questa dimostrazione non è costruttiva. La costante ottimale dipende molto dal bordo del dominio. Ci si può porre problemi come "qual è il dominio di misura 1 che ottimizza la costante di Poincaré?". In genere la costante peggiora se il bordo è poco regolare e si riscala in maniera sensata al dilatarsi del dominio.

Definizione 29.8. $W^{-1,p'}$ è il duale di $W_0^{1,p}$, spazio di Banach. $H^{-1}(\Omega)$ è il duale di H_0^1, ed è di Hilbert.

Abbiamo $H_0^1 < L^2 < H^{-1}$. Se Ω è limitato, $W_0^{1,p} < L^2 < W^{-1,p'}$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Osserviamo anche che $W_0^{1,p} < (L^p)^{n+1}$, e quindi $W^{-1,p} < (L^{p'})^{n+1}$.

[61] O, per $p = 1$, avremmo $u \in \mathrm{BV}$, ma dato che u risulta comunque costante...

Proposizione 29.9. Se $F \in W^{-1,p'}$, esistono $f_0, \dots, f_n \in L^{p'}$ tali che $\forall u \in W_0^{1,p}$

$$F(u) = \int_\Omega f_0 u + \sum f_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Le f_i non sono uniche e, se Ω è limitato, possiamo prendere $f_0 = 0$ per la Disuguaglianza di Poincaré.

30 05/12

30.1 Esistenza e unicità di soluzioni deboli per il laplaciano

Concentriamoci su un'equazione con due tipi diversi di condizione al bordo: la *condizione di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, f \in L^2 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{oppure } \varphi \text{ fissata} \end{cases} \tag{3}$$

e la *condizione di Neumann*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega, f \in L^2 \\ \nabla u \cdot v = 0 & \text{su } \underbrace{\partial\Omega}_{\in C^1}, \text{dove } v \text{ è la normale a } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Una $u \in H_0^1(\Omega)$ (lo 0 è per le condizioni al bordo) è soluzione debole della (3) se

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \ \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

(sarebbe $\forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$, ma posso considerare anche la sua chiusura, ovvero $H_0^1(\Omega)$). Analogamente $u \in H^1(\Omega)$ (non H_0^1 perché la condizione al bordo non è quella di prima) è soluzione debole della (4) se

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \ \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

Anche qui sarebbe in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ma posso considerare anche la sua chiusura, cioè H^1. In questa formulazione sono incluse anche le condizioni al bordo, che quindi non c'è bisogno di esplicitare. Notiamo che se $u \in C^2$ è una soluzione debole, allora è anche una soluzione classica[62]. L'idea è quindi sempre quella di trovare una soluzione debole tramite Lax-Milgram o minimizzazione di funzionali convessi e poi cercare regolarità. Consideriamo la (3).

Definiamo la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + uv$$

[62] Il fatto che le soluzioni classiche debbano essere soluzioni deboli ci dice in che spazio andare a cercare queste ultime, basta fare il conto per rendersene conto.

che è simmetrica, bilineare e coerciva su H_0^1 in quanto coincide col prodotto scalare di H^1 (non di H_0^1). Inoltre abbiamo

$$\left(\varphi \mapsto \int f\varphi\right) \in (H_0^1)^* = H^{-1} \supseteq L^2$$

Dunque per Lax-Milgram esiste un'unica u tale che $\forall v \in H_0^1$ $a(u,v) = \int fv$, cioè un'unica soluzione debole, e questa è il minimo del funzionale $F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$F(u) = \int \frac{|\nabla u|^2 + u^2}{2} - fu$$

che è strettamente convesso, coercivo, inferiormente semicontinuo, e infatti ha un unico minimo. Per la (4) basta considerare $H^1(\Omega)$ invece di $H_0^1(\Omega)$.

30.2 Regolarità

Nel caso unidimensionale a questo punto avevamo

$$\int u_x \varphi_x = \int (f-u)\varphi \Rightarrow u_x \in H^1$$

quindi $u \in H^2$, per cui l'equazione $-u_{xx} + u = f$ era soddisfatta quasi ovunque. In particolare se f è continua lo è anche $-u_{xx} + u$ e, dato che in dimensione 1 si ha $H^1 \hookrightarrow C_0$, avevamo $u \in C^2$. In più dimensioni la questione è un po' più complicata.

Teorema 30.1 (di regolarità)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ uniformemente C^2, $f \in L^2(\Omega)$. Allora

- $u \in H_0^1$ è soluzione debole di (3) $\Rightarrow u \in H^2$ e $\|u\|_{H^2} \leq C(\Omega)\,\|f\|_{L^2}$.
- $u \in H^1$ è soluzione debole di (4) $\Rightarrow u \in H^2$ e $\|u\|_{H^2} \leq \tilde{C}(\Omega)\,\|f\|_{L^2}$.

In particolare l'equazione vale quasi ovunque in Ω.

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$; in particolare i due casi coincidono. Sia u soluzione debole; fissiamo $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e poniamo

$$D_h(u) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

Scegliendo $\varphi = D_{-h}D_h u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ come funzione test otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla(D_{-h}D_h u) + uD_{-h}D_h u = \int_{\mathbb{R}^n} fD_{-h}D_h u$$

E usando il fatto che[63] $\|D_h\varphi\|_{L^2} \le \|\nabla\varphi\|_{L^2}$ otteniamo la stima

$$\|\nabla D_h u\|_{L^2}^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla D_h u|^2 + |D_h u|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} f D_{-h} D_h u$$
$$\le \|f\|_{L^2} \|D_{-h} D_h u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} \|\nabla D_h u\|_{L^2}$$

E un semplice conto mostra che D_h e ∇ commutano, per cui otteniamo $\|D_h \nabla u\|_{L^2} = \|\nabla D_h u\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$. In particolare allora per ogni $i \le n$ vale $\|D_h u_{x_i}\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$, e per la Proposizione 25.4 abbiamo

$$u \in H^1 \Leftrightarrow \|\tau_h u - u\| \le C\,|h| \Leftrightarrow \|D_h u\|_{L^p} \le C$$

quindi per ogni $i \le n$ vale $u_{x_i} \in H^1$ e $\left\|(u_{x_i})_{x_j}\right\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$, cioè $u \in H^2$. $\square$

La dimostrazione diventa un po' più complicata quando c'è da preoccuparsi di $\partial\Omega$. Derivando l'equazione e applicando più volte il Teorema otteniamo poi

Teorema 30.2. Se $\partial\Omega \in C^{m+2}$ e $f \in H^m$, allora $u \in H^{m+2}$ e vale

$$\|u\|_{H^{m+2}} \le C(\Omega, m)\,\|f\|_{L^2}$$

Mi posso chiedere quando H^{m+2} si immerge in C^2. Lo spazio H^{m+2} ha parametro di regolarità $m + 2 - \frac{n}{2}$, quindi dal Teorema 29.2 segue

Corollario 30.3. Se $m > \frac{n}{2}$, allora $H^{m+2} \hookrightarrow C^2$ e quindi u è una soluzione classica.

Teorema 30.4 (Agmon-Douglis-Nirenberg)**.** Sia $1 < p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $\partial\Omega \in C^{m+2}$ e $f \in W^{m,p}$, allora $u \in W^{m+2,p}$.

Teorema 30.5 (Schauder)**.** Siano $\alpha \in (0,1)$ e $m \in \mathbb{N}$. Se[64] $\partial\Omega \in C^{m+2+\alpha}$ e $f \in C^{m+\alpha}(\Omega)$, allora $u \in C^{m+2+\alpha}(\bar\Omega)$. In particolare se $f \in C^\alpha$ allora $u \in C^{2+\alpha}$ è una soluzione classica.

Per $\alpha = 0$ non è vero:

Esercizio 30.6. Trovare un esempio di funzione con laplaciano continuo ma non C^2 (chiaramente in dimensione $n > 1$).

---

[63]Questo si può dimostrare per densità a partire da

$$D_h\varphi = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|} \le \int_0^1 |\nabla\varphi(x+ht)|\,dt$$

[64]Si intende che le derivate $m+2$-esime sono α-hölderiane.

30.3 Condizioni di Dirichlet non nulle

Quanto visto si estende in modo abbastanza semplice al caso di problemi con condizioni di Dirichlet non nulle al bordo di Ω.

Esercizio 30.7. Studiare il problema (cioè dire se esistono soluzioni deboli, se sono uniche, e in caso che regolarità hanno)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{su } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), f \in L^2\big(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)\big) \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{0\}\,, \varphi \in H^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Soluzione. Ci riconduciamo alla (3). Estendiamo φ al semispazio $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ prendendo una cut-off $\psi \in C^2$ tale che

$$\psi(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| < 1 \\ 0 & \text{se } |y| > 2 \end{cases}$$

e poi consideriamo $\tilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \in H^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ e $\tilde{u} = u - \tilde{\varphi}$, che verifica

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} + u = \tilde{f} \\ \tilde{u} = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \qquad \tilde{f} = f - \Delta\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \in L^2$$

Risolviamo questo problema e torniamo indietro: per quando visto abbiamo un unica soluzione $\tilde{u} \in H_0^1 \cap H^2$, e quindi esiste un'unica $u \in H^1 \cap H^2$ tale che $u - \tilde{\varphi} \in H_0^1$ e si ha $u = \tilde{u} + \tilde{\varphi}$. □

Lo stesso argomento, con piccole variazioni, funziona se $\partial\Omega$ è compatto e $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, considerando $\psi\left(\frac{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}{\varepsilon}\right)$, perché sufficientemente vicino al bordo c'è proiezione unica. Ora vediamo un risultato di cui abbiamo già visto una versione più generale in dimensione 1.

Teorema 30.8 (Principio del massimo)**.** Siano Ω limitato, $f \in L^\infty(\Omega)$.

- Se $u \in H_0^1 \cap H^2$ è soluzione della (3), allora[65]

$$\widetilde{\forall} x \in \Omega \ \min\{0, \inf f\} \le u(x) \le \max\{0, \sup f\}$$

- Se $u \in H^2(\Omega)$ è soluzione della (4), allora

$$\widetilde{\forall} x \in \Omega \ \inf_\Omega f \le u(x) \le \sup_\Omega f$$

Dimostrazione. Considieriamo u soluzione della (3) e poniamo $C = \max\{0, \sup f\}$. Prendiamo poi una funzione $G \in C^1$ tale che

$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{se } x \le 0 \\ G(x) > 0 & \text{se } x > 0 \\ G'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \\ G'(x) \le M & \text{ovunque} \end{cases}$$

[65] $\widetilde{\forall} x$ vuol dire "per quasi ogni x".

e usiamo $G(u-C)=v\in H_0^1$ come funzione test (se invece siamo nel caso della (4) sarebbe comunque in H^1 perché $G\in C^1$). Allora abbiamo

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v+uv=\int_\Omega fv \Rightarrow \int G'(u-C)\left|\nabla u\right|^2+uG(u-C)=\int fG(u-C)$$
$$\Rightarrow \int G'(u-C)\left|\nabla u\right|^2+(u-C)G(u-C)=\int \underbrace{(f-C)}_{\leq 0}\underbrace{G(u-C)}_{\geq 0}\leq 0$$

Dunque $0\leq \int(u-C)G(u-C)\leq 0$, per cui $(u-C)G(u-C)=0$ q.o, e dunque $u<C$ q.o. L'altra disuguaglianza è analoga. $\square$

Lo stesso argomento si applica a $\begin{cases} -\Delta u+u=f \\ u_{|\partial\Omega}=\varphi \end{cases}$ ottenendo

$$\widetilde{\forall} x\in\Omega \ \min\left\{\inf_{\partial\Omega}\varphi,\inf_{\Omega} f\right\}\leq u(x)\leq \max\left\{\sup_{\partial\Omega}\varphi,\sup_{\Omega} f\right\}$$

31 09/12 - Esercitazione

Consideriamo operatori differenziali al second'ordine:

$$u''(x)+a(x)u'(x)+b(x)u(x)=f(x) \qquad a,b\in L^\infty$$

e in particolare i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u''+au'+bu=f \\ u(0)=\alpha \\ u'(0)=\beta \end{cases}$$

dove supporremo per semplicità $\alpha=\beta=0$. Mostriamo che per ogni $f\in L^2(0,1)$ esiste un unica soluzione $u\in H^1(I)$ con condizione iniziale $u(0)=u'(0)=0$ usando il Teorema delle contrazioni. Sia $J\colon H^1\to L^2\big((0,1),\mathbb{R}^2\big)$ che associa $u\mapsto(u(x),u'(x))$. Cerchiamo $U\in H^1\big((0,1),\mathbb{R}^2\big)$ che risolva

$$\begin{cases} U'(x)=F(x,U(x)) \\ U(0)=(0,0) \end{cases} \tag{5}$$

dove

$$U(x)=\begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x)\end{pmatrix} \qquad U'(x)=\begin{pmatrix} U_1'(x) \\ U_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_2(x) \\ -a(x)U_2(x)-b(x)U_1(x)+f(x)\end{pmatrix}$$

Una soluzione u del problema originale è tale che, posto $J(u)=U$,

$$U(x)=\int_0^x F(t,U(t))\,dt \qquad \text{dove } F(x,(\underbrace{U_1,U_2}_{=U}))=\begin{pmatrix} U_2(x) \\ -a(x)U_2(x)-b(x)U_1(x)+f(x)\end{pmatrix}$$

e viceversa da una soluzione della (5) ricostruiamo una u che risolve il problema originale. Ora cerchiamo $r > 0$ tale che

$$\Phi\colon L^2\big((0,r),\mathbb{R}^2\big) \to L^2\big((0,r),\mathbb{R}^2\big) \qquad \Phi(U) = \int_0^x F(t,U(t))\,dt$$

sia una contrazione. Calcoliamo

$$\|\Phi(U) - \Phi(V)\|^2_{L^2(0,r)} \leq \int_0^r \int_0^x \Big|F(t,U(t)) - F(t,V(t))\Big|^2 dtdx$$

$$\leq \int_0^r \int_0^x \Big[(U_2(t) - V_2(t))^2 + a^2(t)(U_2(t) - V_2(t))^2 + b^2(t)(U_1(t) - V_1(t))^2\Big]\, dtdx$$

dato che $a, b \in L^\infty$ esiste M che dipende solo da $\|a\|_\infty$ e $\|b\|_\infty$ tale che

$$\leq M \int_0^r \int_0^x \Big[(U_2(t) - V_2(t))^2 + (U_1(t) - V_1(t))^2\Big]\, dtdx \leq Mr\,\|U - V\|^2_{L^2(0,r)}$$

Per il Teorema delle contrazioni allora esiste un'unica soluzione della (5) su $\big[0, \frac{1}{2M}\big]$, e in un numero finito di passi arrivo alla soluzione definita su tutto $[0,1]$; poi applico J^{-1} a quanto trovato e ottengo u (verificando dall'equazione di U che $u' = U_2$).

Chiediamoci ora se esiste e se è unica una soluzione a

$$\begin{cases} u'' + au' + bu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con $a, b \in L^\infty$ e $f \in L^2$. Moltiplichiamo tutto per $A(x) = \exp\big(\int_0^x a(s)\,ds\big)$:

$$\begin{aligned} &u''(x)A(x) + a(x)u'(x)A(x) + b(x)u(x)A(x) = \underbrace{f(x)A(x)}_{=\tilde{f}\in L^2} \\ \Leftrightarrow &(u'(x)A(x))' + u(x)\underbrace{b(x)A(x)}_{=B(x)} = \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

e notiamo che $A(x) > 0$. Consideriamo allora l'operatore

$$T\colon \underbrace{H^2(0,1) \cap \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}}_{\text{denso in } H^1_0 \text{ o in } L^2} \to L^2(0,1) \qquad T(u) = (A(x)u'(x))' + B(x)u(x)$$

T è chiuso e definito su un denso, per cui possiamo definire il suo aggiunto $T^*\colon L^2 \to L^2$ e T è autoaggiunto. Usano la Proposizione 15.7 abbiamo che $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$, $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e[66] $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$. Dato che T è

[66]Non mi è chiarissimo perché, ma sarebbe una gran cosa. Servirebbe che l'immagine sia chiusa. In effetti dopo ci sono delle virgolette.

autoaggiunto, abbiamo "$\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$", per cui T è iniettivo se e solo se è surgettivo. Quindi cerchiamo di capire se T è iniettivo o meno e sotto che ipotesi su A e B non lo è. Nel caso in cui T non sia iniettivo cerchiamo di caratterizzare le f per cui esistono soluzioni di $T(u) = 0$.

Studiamo dunque $T(u) = (A(x)u'(x))' + B(x)u(x)$ con $A \geq 0$. Vediamo subito che se $B \leq 0$ allora T è iniettivo definendo una forma bilineare simmetrica, continua e coerciva su H_0^1 e applicando Lax-Milgram. Dato che $T(u) = 0 \Leftrightarrow (A(x)u'(x))' + B(x)u(x) = 0$, scriviamo

$$
\begin{aligned}
&\forall v \in H_0^1 \int_0^1 (A(x)u'(x))'v(x) + \int_0^1 B(x)u(x)v(x) \\
= &-\int_0^1 A(x)u'(x)v'(x)\,dx - A(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 B(x)u(x)v(x)\,dx = 0
\end{aligned}
$$

e poniamo

$$
a(u,v) = \int_0^1 A(x)u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 B(x)u(x)v(x)\,dx
$$

Osserviamo che:

- $a, b \in L^{\infty} \Rightarrow A, B \in L^{\infty}$, quindi $a(u,v) \leq M \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$
- $A(x) \geq \delta > 0$, quindi

$$
a(u,u) = \int_0^1 A(x)(u')^2(x)\,dx + \int_0^1 \underbrace{(-B(x))}_{\geq 0} u^2(x)\,dx \geq \delta \|u\|_{H_0^1}^2
$$

Possiamo quindi applicare Lax-Milgram e ottenere per ogni $\varphi \in (H_0^1)^*$ un'unica soluzione di $\forall v \in H_0^1\ a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle$. Dato che $u = 0$ è una soluzione è anche l'unica, per cui T è iniettivo.

Se $B \nleq 0$ si può ottenere una casistica di iniettività usando la costante di iniettività di Poincaré. In generale, non esiste soluzione di

$$
\begin{cases} T(u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}
$$

Esempio 31.1. Per $A(x) = 0$, $B(x) = 1$ $(a = 0)$ abbiamo

$$
\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}
$$

e $u(x) = k \sin(2\pi x)$ è soluzione non nulla per ogni $k \neq 0$.

Ci chiediamo quindi per quali f esiste soluzione di

$$\begin{cases} u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Questo succede se e solo se $f \in \operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^\perp$. Un esempio di problema senza soluzione è

$$\begin{cases} u'' + u = \sin(4\pi x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Questo si può mostrare ad esempio usando le serie di Fourier. Dunque T non è sempre iniettivo, $T(u) = f$ non ha sempre soluzione, e ce l'ha se e solo se

$$\forall u \; T(u) = 0 \Rightarrow \langle f, u \rangle = 0$$

Esercizio 31.2. Studiare, prima con l'ipotesi $B \leq 0$, lo spettro di T (calcolare autovalori). Vedere se nel caso di sopra è coerciva o meno la forma bilineare

$$a(u,u) = \int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 u^2$$

Se u_n è una successione in $L^1(0,1)$ che converge sia debolmente che puntualmente a u, allora ci converge fortemente. In L^p, con $p > 1$, è falso. Ad esempio $u_n = \sqrt{n}\chi_{0,\frac{1}{n}}$ converge puntualmente a 0 e non può convergere forte in L^2 perché ha norma costantemente 1. Tuttavia ci converge debolmente, dato che

$$\forall g \in L^2(0,1) \; \int_0^1 u_n g = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} g \leq \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} g^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ma, per ogni $w \in L^1(0,1)$, è vero che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A w \right| < \varepsilon$. In particolare per $w = g^2$ otteniamo $\left(\int_0^{\frac{1}{n}} g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0$.

32 11/12

32.1 Ultimi risultati

Proposizione 32.1 (Poincaré-Wirtinger)**.** Dato Ω aperto limitato connesso con $\partial\Omega \in C^1$ esiste C tale che, posta $\bar{u} = \fint_\Omega u$

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \; \|u - \bar{u}\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista u_n tale che $\|u_n\|_{L^p} = 1$, $\fint_\Omega u_n = 0$ (a meno di aggiustarla tramite costanti) e $\nabla u_n \to 0$ in L^p. Dato che $W^{1,p}$ si immerge compatto in L^p, esiste $u_{n_k} \to u$ in L^p. Allora $\nabla u = 0$ e $\int u = 0$. Quindi u è costante (sulle componenti connesse, ma ce n'è una sola) ed è la costante 0, sempre per connessione e perché $\int u = 0$. $\square$

Combinando questo risultato con Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e Morrey otteniamo il seguente

Corollario 32.2. Se Ω è limitato, connesso e $\partial\Omega \in C^1$, allora la stima

$$\|u - \bar{u}\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$$

vale per

1. ogni $q \in [1, p^*]$ se $p < n$ (dove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$);
2. ogni $q \in [1, \infty)$ se $p = n$;
3. $q = \infty$ se $p > n$.

Proposizione 32.3. Dato Ω limitato con $\partial\Omega \in C^1$, allora esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$ di $L^2(\Omega)$ tale che $e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e una successione di $\lambda_n > 0$ tale che $\lambda_n \to +\infty$ e

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n$$

In altre parole i λ_n e i e_n sono gli autovalori e i relativi autovettori di $-\Delta\colon \underbrace{H_0^1 \cap H^2}_{=\mathrm{dom}(-\Delta) < L^2} \to L^2$. Dato che Δ non è limitato applicheremo la decomposizione spettrale studiata precedentemente a Δ^{-1}.

Dimostrazione. Se $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tale che $-\Delta u = f$. Infatti cerchiamo una soluzione debole

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \int \nabla u \nabla v = \int fv$$

quella a sinistra è una forma coerciva in H_0^1 (è proprio il prodotto scalare), quindi esiste un'unica soluzione u che è anche in H^2 per il Teorema di regolarità. Questo allora significa che posso definire l'inversa: definisco $Tf = u$, e $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è lineare, iniettivo, e per quanto visto sopra abbiamo

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \underbrace{\leq}_{\text{Poincaré}} C \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}$$

Quindi abbiamo $\|u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$, cioè T è continuo, e $\|\nabla u\|_{L^2} \leq c \|f\|_{L^2}$ per il Teorema di regolarità, per cui $\operatorname{Im} T \subseteq H_0^1$ e dato che $\|u\|_{H_0^1} \leq c \|f\|_{L^2}$ abbiamo che T è continuo anche come operatore in H_0^1. Poiché l'immersione $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ è compatta allora T è compatto. Inoltre T è autoaggiunto, perché

$$\langle Tf, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega Tf \cdot [-\Delta(Tg)] = \int_\Omega \nabla Tf \cdot \nabla Tg = \langle f, Tg\rangle_{L^2}$$

Da questo si vede anche che la forma indotta è definita positiva:

$$\langle Tu, u\rangle = \int_\Omega |\nabla Tu|^2 \geq 0$$

da cui segue che T è iniettivo. Possiamo allora applicare a T il Teorema di decomposizione spettrale e troviamo che (dato che T è iniettivo 0 non è fra gli autovalori) esiste $\eta_n \to 0$, con $\eta_n \neq 0$ autovalori di T, $\eta_n > 0$ e $\{e_n\}$ autovettori tali che $Te_n = \eta_n e_n$, e quindi $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$, dove $\lambda_n = \frac{1}{\eta_n} > 0$ e $\lambda_n \to +\infty$. Per regolarità ellittica $e_n \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ (se il bordo non è C^2 lo si applica a sottoinsiemi un po' dentro), in particolare $e_n \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e quindi per ogni m, iterando (su sottodomini C^∞), abbiamo $e_n \in H^m_{\text{loc}}(\Omega)$, per cui $e_n \in C^\infty(\Omega)$. □

Questo discorso della regolarità ellittica vale abbastanza in generale, ad esempio $-\Delta u = f(u)$, con $f \in C^\infty(\Omega)$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ allora sta anche in H^3_{loc} e quindi in C^∞ (metodo bootstrap).

Proposizione 32.4 (Hopf)**.** Se $-\Delta u = f$ in Ω aperto connesso, $u \geq 0$, $f \geq 0$, $u \in C^2(\Omega)$, e vale $u(x_0) = 0$ per un qualche $x_0 \in \Omega$, allora $u \equiv 0$ in Ω. In particolare $f \equiv 0$.

Corollario 32.5 (Principio del massimo forte)**.** Se $f \geq 0$ in Ω, $f \neq 0$ e $u \geq 0$ in $\partial\Omega$, allora $u > 0$ in Ω.

Esercizio 32.6. Sia $\lambda_1 > 0$ il più piccolo autovalore di $-\Delta$ con condizione di Dirichlet, cioè stiamo vedendo $-\Delta\colon H^1_0 \cap H^2 \to L^2$. Sia poi Ω limitato e connesso con $\partial\Omega \in C^1$. Allora λ_1 è semplice e $e_1 > 0$ su Ω.

Soluzione. Per $v \in H^1_0 \cap H^2$ abbiamo $\int |\nabla v|^2 = \int -\Delta v \cdot v \geq \lambda_1 \int v^2$ per la Proposizione 17.11, quindi

$$\forall v \in H^1_0 \quad \int |\nabla v|^2 \geq \lambda_1 \int v^2$$

Se v è un autovettore relativo a λ_1 allora

$$\int_\Omega -\Delta v \cdot u = \int \nabla v \nabla u = \lambda_1 \int vu$$

e quindi in questo caso si ha $\int |\nabla v|^2 = \lambda_1 \int v^2$ e $v \in H^1_0 \setminus \{0\}$ è autovettore di $-\Delta$ relativo a λ_1 se e solo se risolve

$$\arg\min_{\substack{v \in H^1_0 \\ v \neq 0}} \frac{\int |\nabla v|^2}{\int |v|^2}$$

Ovvero, posto $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|_{L^2}}$, $\tilde{v}$ risolve

$$\arg\min_{\substack{w \in H^1_0 \\ \|w\|=1}} \int |\nabla w|^2$$

Quindi se v è soluzione di $-\Delta u = \lambda_1 u$, allora lo è anche $|v|$, per cui

$$v(x_0) = 0 \Rightarrow |v|(x_0) = 0 \xRightarrow{\text{Hopf}} |v| \equiv 0 \Rightarrow v \equiv 0$$

e quindi v non si annulla mai, per cui ha sempre lo stesso segno perché è C^∞ per il precedente studio degli autovettori di $-\Delta$. Allora se $\alpha v_1 + \beta v_2$ è soluzione deve valere $\forall x$ $\alpha v_1 + \beta v_2 \neq 0$ oppure deve essere 0 a tappeto, cioè $v_1 = \gamma v_2$; tuttavia il primo caso è impossibile perché α e β sono arbitrari. $\square$

In generale dati $T\colon H \to H$ autoaggiunto e $\lambda = \min \sigma(T)$, x è autovettore relativo a λ se e solo se minimizza

$$\frac{\langle Tx, x\rangle_H}{\langle x, x\rangle_H}$$