Disclaimer

Questi appunti nascono ad uso e consumo dell'autore, che li ha TeXati in diretta durante il corso di Ultrafiltri e Metodi Non Standard tenuto dal professor Di Nasso presso l'Università di Pisa durante l'anno accademico 2012/2013 e successivamente risistemati. Come conseguenza possono essere *molto* poco chiari, difettare di qualcosa, eccetera eccetera. **Importante**: la soluzione degli esercizi è riportata sotto il testo degli stessi, ma tipicamente è stata fatta qualche lezione dopo, quindi potrebbe utilizzare risultati che compaiono più in là. Sentitevi liberi di insultarmi, segnalare sviste, eccetera presso `mennuni@mail.dm.unipi.it`. L'ultima versione di questi appunti e il relativo sorgente sono disponibili presso `poisson.phc.unipi.it/~mennuni/`. Questa versione è stata compilata il 16 maggio 2016.

Rosario "Mufasa" Mennuni

Indice

1 21/09

1.1 Regolarità per partizioni

Teorema 1.1 (di Schur)**.** Sia

$$\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$$

colorazione finita dei naturali. Allora

$$\exists i, a, b, a + b \in C_i$$

Si dimostra anche che $\forall k$ trovo k elementi e tutte le possibili somme, tutto di un colore.

Teorema 1.2 (Hindman[1])**.** Data una colorazione finita dei naturali $\exists i$, $\exists X$ infinito con tutte le somme $\sum_{j=0}^{k}$ dello stesso colore.

Teorema 1.3 (Van der Waerden)**.** Per ogni colorazione finita dei naturali c'è un colore che contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

Teorema 1.4 (Rado)**.** Se in un equazione diofantea lineare una qualche somma dei coefficienti fa 0, le soluzioni sono *regolari per partizioni*, cioè per ogni colorazione finita di $\mathbb{N}$ esistono soluzioni monocromatiche. Vale anche il viceversa.

1.2 Densità

Teorema 1.5 (Szemeredi)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$, $\bar{d}(A) > 0$, allora A contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

Notare che Van der Waerden è un corollario.

Teorema 1.6 (Tao-Green[2])**.** I primi sono *A-P rich* (ricchi di progressioni aritmetiche, come sopra).

Congettura 1.7 (Erdos-Turan)**.** Sia a_n una successione di interi tale che $\sum \frac{1}{a_n} = +\infty$. Allora l'insieme degli a_n è A-P rich.

1.3 Problemi additivi

Teorema 1.8. $\bar{d}(A) > 0 \Rightarrow A - A$ è sindetico, cioè ha buchi limitati:

$$\exists k \, \forall x \; [x + 1, x + k] \cap (A - A) \neq \emptyset$$

[1] Hindman dice che se uno vuole punire uno studente gli dà come tesi la dimostrazione originale di sta cosa (non quella con gli ultrafiltri).

[2] "Ora non posso andare lungo la dimostrazione, magari mi prendo due anni sabbatici e me la guardo."

Teorema 1.9 (Renling Jin)**.** Dati A, B di densità asintotica superiore positiva, $A + B$ è sindetico a tratti, cioè la proprietà di sindeticità vale su intervalli arbitrariamente lunghi (ovviamente il k rimane lo stesso a prescindere dall'intervallo). Equivalentemente $A + B = S \cap T$, con S sindetico e T spesso, cioè include intervalli arbitrariamente lunghi.

A quanto pare in questo campo dimostrare le cose in maniera diversa ha la curiosa tendenza a far dimostrare altra roba.

2 26/09

2.1 Filtri e ultrafiltri

Definizione 2.1. Un *filtro* su un insieme I è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di I tale che

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, I \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}, B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

L'idea è rappresentare una certa nozione di grandezza. Il vuoto non ci deve stare, se una cosa contiene una grande è grande, e la nozione di "grandezza" deve essere abbastanza sensata, cioè stabile per intersezione.

Esempio 2.2 (Filtro di Frechet)**.** $\mathfrak{Fr} = \{A \subseteq I \mid A^c \text{ finito}\}$

Definizione 2.3 ($\mathcal{F} - \lim$)**.** $\mathcal{F}$ filtro su $\mathbb{N}$, $\{x_n\}$ successione di reali

$$\mathcal{F} - \lim x_n = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \{n \mid |y - x_n| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$$

Più in generale, se X è uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ è un filtro su I, diremo che[3]

$$\mathcal{F} - \lim_{i \in I} x_i = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U \in I(y) \ \{i \in I \mid x_i \in U\} \in \mathcal{F}$$

Se come filtro usiamo quello di Frechet otteniamo l'usuale nozione di limite.

Esercizio 2.4. Sia $\mathcal{F}$ un filtro. Sono equivalenti:

1. $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
2. $A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \in \mathcal{F}) \vee (B \in \mathcal{F})$
3. $\mathcal{F}$ è un filtro massimale rispetto all'inclusione.

Dimostrazione. 1 $\Rightarrow$ 2 Se $A \cup B \in \mathcal{F}$ ma $A, B \notin \mathcal{F}$, allora $A^c, B^c \in \mathcal{F}$, quindi $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{F}$ e si ha l'assurdo $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

[3] Indichiamo con $I(y)$ l'insieme degli intorni di y.

$2 \Rightarrow 3$ Se $\mathcal{F}$ non è massimale lo possiamo estendere con A. Dato che $\mathcal{F} \ni I = A \cup A^c$, se $A \in \mathcal{F}$ l'estensione è banale, altrimenti se $A^c \in \mathcal{F}$ l'estensione è incompatibile. Incidentalmente abbiamo dimostrato anche $2 \Rightarrow 1$.

$3 \Rightarrow 1$ Se per assurdo $A \notin \mathcal{F}$ e $A^c \notin \mathcal{F}$ voglio far vedere che riesco ad estendere $\mathcal{F}$. Prendo A e tutte le intersezioni con elementi di $\mathcal{F}$, più la chiusura per sovrainsieme, cioè $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ (vedi Esercizio 2.6). Più precisamente si considera $\mathcal{G} = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$. Senza perdita di generalità $\mathcal{G}$ ha la FIP[4] e basta prendere il filtro generato.

$\square$

Definizione 2.5. Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *ultrafiltro* se verifica le precedenti.

Che il filtro di Frechet non sia un ultrafiltro si può vedere prendendo i pari e i dispari. Che non verificano la prima e la seconda è ovvio. Per estendere il filtro posso considerare lui più i pari e tutte le intersezioni, cioè il filtro generato $\langle \mathfrak{Fr} \cup \{P\} \rangle = \{B \mid \exists A \in \mathfrak{Fr}\ B \supseteq A \cap P\}$.

Esercizio 2.6. Sia $\mathcal{F}_0$ una famiglia con la FIP (proprietà dell'intersezione finita), cioè $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_0\ \bigcap_{j=1}^n A_j \neq \emptyset$. Allora

$$\langle \mathcal{F}_0 \rangle = \left\{ B \,\middle|\, \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_0 \quad B \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} A_j \right\}$$

è il più piccolo filtro che include $\mathcal{F}_0$ è si dice *filtro generato* da $\mathcal{F}_0$.

Esistono ultrafiltri? Sì, quelli principali, cioè $\forall i \in I$ posso definire $\mathcal{F}_i = \{A \subseteq I \mid i \in A\}$, a parte quelli segue dal Lemma di Zorn usando la 3. Ad esempio potrei voler estendere il filtro di Frechet ad un ultrafiltro.

Esercizio 2.7. Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I. Allora $\mathcal{U}$ estende il filtro di Frechet se e solo se $\mathcal{U}$ *non* è principale, se e solo se $\forall F$ finito $F \notin \mathcal{U}$.

Teorema 2.8 (Tarski, ma anche no)**.** Ogni filtro $\mathcal{F}$ si estende ad un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$. In particolare esistono ultrafiltri *non* principali.

Dimostrazione. Sia $\Gamma = \{\mathcal{G} \text{ filtro} \mid \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}\}$ ordinata secondo l'inclusione. Se trovo un elemento massimale ho finito, e voglio trovarlo usando il Lemma di Zorn. Basta quindi verificare che ogni catena ammette maggiorante. Prendiamoo una catena di filtri $\langle \mathcal{G}_s \mid s \in S \rangle$, con S totalmente ordinato e $s \leq s' \Rightarrow \mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{G}_{s'}$. Un maggiorante è $\mathcal{G} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{G}_s$, che è un filtro perché sto unendo su una catena (altrimenti è in generale falso). $\square$

Si può dimostrare che non esistono ultrafiltri definibili (nel senso che a parte quelli principali non sono definibili in maniera esplicita).

[4] Altrimenti ce l'ha l'insieme analogo definito con A^c al posto di A. Infatti $B \cap C = B \cap C \cap (A \cup A^c)$ e distribuendo...

2.2 Ultrafiltri in topologia

Esercizio 2.9. Sia X spazio topologico (forse serve a base numerabile) e $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Allora:

1. X è di Hausdorff $\Leftrightarrow$ Non esistono due $\mathcal{U}$-limiti diversi per una stessa successione.

2. X è compatto $\Leftrightarrow$ ogni successione ha un $\mathcal{U}$-limite.

Dimostrazione. 1. Supponiamo che lo spazio sia primo-numerabile. Altrimenti vale la stessa cosa solo che invece di successioni indicizzate da $\mathbb{N}$ vanno prese indicizzate dalla cardinalità minima dei sistemi di intorni dei punti. Supponiamo che esistano due $\mathcal{U}$-limiti di a_n. Dato che lo spazio è T2 posso prendere U_x, U_y intorni dei due limiti disgiunti x, y. Ma $U_x, U_y = \emptyset \Rightarrow \{n \mid a_n \in U_x\} \cap \{n \mid a_n \in U_y\} = \emptyset$ contro la definizione di filtro.

   Per l'altra freccia se X non è T2, costruiamo una successione a_n con due limiti distinti. Siano $x, y \in X$ tali che $\nexists U_x, U_y\ U_x \cap U_y = \emptyset$. $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ sistema fondamentale di intorni di x, V_i per y, $\forall i\ U_i \cap V_i \neq \emptyset$. Prendiamo con la scelta $z_i \in U_i \cap V_i$. Sia W intorno di x. Consideriamo U_N con $N \gg 0$ tale che[5] $U_N \subseteq W$. $\{a_n \mid n > N\} \subseteq U_N \subseteq W$. Quindi $\{a_n \mid n > N\}$ è cofinito e quindi appartiene all'ultrafiltro (se il filtro è principale il problema è banale). Per simmetria e chiusura per sovrainsieme abbiamo finito.

2. $\Rightarrow$ Per assurdo, sia $(x_i)_{i \in I}$ tale che $\forall y\ \exists U_y\ A_y = \{i \in I \mid x_i \in U_y\} \notin \mathcal{U}$. A questo punto $\{U_y \mid y \in X\}$ è un ricoprimento. Ma allora $I = \bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i}$, ma nessuno di questi sta nell'ultrafiltro, assurdo.

   $\Leftarrow$ Sempre per assurdo, se X non è compatto sia $\{U_j \mid j \in J\}$ un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. Chiamiamo $I = \mathscr{P}_{\text{fin}}(J)$. Quello che faremo è trovare una successione $\{x_\beta \mid \beta \in I\}$ che non converga per un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I. Troviamo con l'assioma della scelta una successione $\{x_\beta \mid \beta \in I\}$ tale che $x_\beta \notin \bigcup_{j \in \beta} U_j$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} = \left\{ A_\beta = \left\{ \gamma \in I \;\middle|\; x_\gamma \notin \bigcup_{j \in \beta} U_j \right\} \;\middle|\; \beta \in I \right\}$$

   $\mathcal{A}$ gode della FIP e può essere quindi estesa ad ultrafiltro $\mathcal{U}$, che non sarà principale. A questo punto, se x fosse $\mathcal{U}$-limite per x_β, preso un suo intorno U_{j_x} del ricoprimento dovrei avere che

[5] Qua usiamo pesantemente la primo-numerabilità, altrimenti il ragionamento va raffinato.

$L = \{\beta \in I \mid x_\beta \in U_{j_x}\} \in \mathcal{U}$. Ma $\mathcal{U} \ni A_{\{j_x\}} = \{\beta \in I \mid x_\beta \notin U_{j_x}\} = L^c$, assurdo.

□

Teorema 2.10 (Tychonoff)**.** Se $X = \prod_{i \in I} X_i$ e $\forall i \ X_i$ è compatto, X è compatto.

Dimostrazione. Sia J un altro insieme di indici, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su J e siano $\{x_j \mid j \in J\}$ una successione in X e $\{x_j^i\}$ le proiezioni. Per l'Esercizio precedente esiste $\bar{x}_i$ $\mathcal{U} - \lim$ di x_j^i. Vogliamo vedere che $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ è limite per x_j. Un intorno di base di $\bar{x}$ è un oggetto della forma $\widetilde{A}_\beta = \prod_{i \in \beta} A_i \times \prod_{i \notin \beta} X_i$ con $\beta \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(J)$ e $\bar{x}_i \in A_i$. Ora

$$\{j \in J \mid x_j \in \widetilde{A}_\beta\} = \{j \in J \mid \forall i \in \beta \ x_j^i \in A_i\} = \bigcap_{i \in \beta} \{j \in J \mid x_j^i \in A_i\} \in \mathcal{U}$$

e abbiamo finito. □

Dato $\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$, ogni successione limitata x_n di reali ha un unico $\mathcal{U}$-limite. In sostanza $\mathcal{U}$ sceglie una sottosuccessione convergente e lo fa "bene", cioè la somma, il prodotto eccetera commutano con l'$\mathcal{U}$-limite.

3 28/09

3.1 Applicazioni del Teorema di Ramsey

Notazione 3.1. $[X]^k = \{F \subseteq X \mid |F| = k\}$.

Teorema 3.1 (Ramsey)**.**

$$\forall m, \forall k, \forall r \exists n \ \forall [\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \ \exists H \ |H| = m \ \exists i [H]^k \subseteq C_i$$

Esempio 3.2. $k = 2, r = 2, m = 3$. In questo caso $n = 6$. Ad esempio prendiamo un insieme di 6 persone e coloriamo le coppie che si conoscono. Se A conosce B, D, E (se non ne conosce 3 è analogo), allora o B, D, E non si conoscono e vale la tesi con $H = \{B, D, E\}$, oppure se (WLOG) B, D si conoscono vale la tesi con $H = \{A, B, D\}$. Se $k = 2, r = 2, m = 4$ si dimostra che $n = 18$ è il risultato ottimale, ma è molto complicato. Per $m = 5$ si sa solo che $43 \leq n \leq 48$. Per $m = 6$ la situazione è ancora più complicata.

Proviamo a fare la versione *infinita* di Ramsey. Questa dice che

Teorema 3.3 (Ramsey infinito)**.**

$$[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n \Rightarrow \exists H \ \ |H| = +\infty \wedge [H]^k \subseteq C_i \ (H \text{ omogeneo infinito})$$

Basta dimostrarlo per $\mathbb{N}$ e ce l'ho gratis per tutti gli insiemi infiniti. Per $k = 1$ è sostanzialmente una versione infinita del pidgeonhole. Facciamolo per $k = 2$, ma prima vediamo un corollario.

Teorema 3.4 (Schur infinito)**.** $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \Rightarrow \exists i\ \exists a < b < a + b \in C_i$

Questo è a sua volta un corollario del Teorema delle Differenze. Prima di enunciarlo, una definizione:

Definizione 3.5. A si dice Δ-*set* se include un insieme di differenze $X - X \subseteq A$ con X infinito.

(le differenze si intendono positive, cioè fattibili in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Teorema 3.6 (delle Differenze)**.** Se $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ uno dei C_i è un Δ-set.

Dimostrazione. $[\mathbb{N}]^2 = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_r$ dove $\{n < m\} \in D_i \Leftrightarrow m - n \in C_i$. Per Ramsey esiste X infinito omogeneo, quindi $\exists i\ [X]^2 \subseteq D_i$, cioè $\forall x < x' \in X$ si ha $x' - x \in C_i$, cioè $X - X \subseteq C_i$. □

Schur segue banalmente:

Dimostrazione. Prendiamo $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\}$ infinito tale che $X - X \subseteq C_i$ (posso farlo per il Teorema delle Differenze). Prendiamo $a = x_2 - x_1$ e $b = x_k - x_2$ con k abbastanza grande in maniera che $b > a$. A questo punto basta prendere $c = a + b = x_k - x_1 \in C_i$. □

A Schur serviva per dimostrare il

Teorema 3.7 (Schur)**.** $\forall k\ x^k + y^k = z^k$ ha soluzioni non banali in ogni campo $\mathbb{Z}_p$, con p sufficientemente grande.

Dimostrazione. Consideriamo in $\mathbb{Z}_p^*$ il sottogruppo M_k delle potenze k-esime. Questo ha indice $[\mathbb{Z}_p^* : M_k] = (k, p - 1) = r \leq k$ (conto scemo di algebra). A questo punto si usa la versione finita del Teorema 3.4, cioè che

$$\forall r \exists N\ \forall \{1, \ldots, N\} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists i\ \exists a, b, a + b \in C_i$$

Abbiamo dunque $\mathbb{Z}_p^* = \bigsqcup_{j=1}^r a_j M_k$, e sappiamo che esiste N tale che $\forall p-1 \geq N$ esistono $t, u, t + u \in a_i M_k$. Quindi $t = a_i \xi^k$, $u = a_i \eta^k$ e $t + u = a_i \zeta^k$. Da cui $a_i \xi^k + a_i \eta^k = a_i \zeta^k$ e dividendo per a_i si ha la tesi. □

3.2 Prodotto tensore

Nella prossima lezione dimostreremo il Teorema di Ramsey infinito(Teorema 3.3) usando gli ultrafiltri (non è la dimostrazione originale). Prima ci serve una

Definizione 3.8. Se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sono ultrafiltri su $\mathbb{N}$ il *prodotto tensoriale* $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è l'ultrafiltro su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ così definito

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

dove $A_n = \{m \mid (n, m) \in A\}$.

Esercizio 3.9. Se $\mu \colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$ è una misura finitamente additiva non atomica allora $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mu(A) = 1\}$ è un ultrafiltro non principale. Viceversa se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ allora $\mu_{\mathcal{U}}$ è una misura finitamente additiva non atomica, dove

$$\mu_{\mathcal{U}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se} \quad A \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Esercizio 3.10. Mostrare che

1. $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro
2. $\otimes$ è associativo
3. Se $\mathcal{V}$ è non principale allora $\Delta^+ = \{(n, m) \mid n < m\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

4 03/10

4.1 Dimostrazione del Teorema di Ramsey

Dimostriamo il Teorema di Ramsey infinito (Teorema 3.3).

Dimostrazione. Per $k = 1$ è banale. Per $k = 2$ si procede nella seguente maniera. Prendiamo la sopradiagonale $\Delta^+ = \{(n, m) \mid n < m\}$, che identifichiamo d'ora in avanti con $[\mathbb{N}]^2$. Il cuore della dimostrazione consiste nel trovare un ultrafiltro $\mathcal{W}$ su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ per cui valga

1. $\Delta^+ \in \mathcal{W}$
2. $\forall X \in \mathcal{W}\ \exists H$ infinito tale che $[H]^2 \approx \{(h_1, h_2) \mid h_1 < h_2 \in H\} \subseteq X$

Trovato un tale $\mathcal{W}$ basta notare che da $\mathcal{W} \ni \Delta^+ = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, segue $\exists i\ C_i \in \mathcal{W}$ per la proprietà di ultrafiltro, e per la 2 esiste H infinito con $[H]^2 \subseteq C_i$.

Poniamo[6] $\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ è un qualunque ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Claim: $\mathcal{W}$ è un ultrafiltro del tipo richiesto. Infatti

1. Vogliamo che $\Delta^+ \in \mathcal{W}$, cioè che $\{n \mid \Delta^+_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. D'altro canto $\forall n\ \Delta^+_n = (n, +\infty) \in \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è non principale.

[6] Ricordiamo che, per definizione, $X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid X_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, dove $X_n = \{m \mid (n, m) \in X\}$.

2. Sia $X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ e poniamo $\widehat{X} = \{n \mid X_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Prendiamo $h_1 \in \widehat{X}$. Allora $X_{h_1} \in \mathcal{U}$. Prendiamo ora $h_2 \in X \cap X_{h_1}$ tale che $h_2 > h_1$ (possiamo farlo perché per non principalità nell'ultrafiltro ci sono solo insiemi infiniti). Notiamo che $h_2 \in X_{h_1} \Leftrightarrow (h_1, h_2) \in X$. Ora procediamo induttivamente. Ad esempio prendiamo $h_3 \in \widehat{X} \cap X_{h_1} \cap X_{h_2} \in \mathcal{U}$, perché ognuno dei tre oggetti sta in $\mathcal{U}$ (notiamo che $h_2 \in \widehat{X} \Leftrightarrow X_{h_2} \in \mathcal{U}$), e tale che $h_3 > h_2$. Ora $h_3 \in X_{h_s} \Leftrightarrow (h_s, h_3) \in X$ (per $s \in \{1, 2\}$) e $h_3 \in \widehat{X} \Leftrightarrow X_{h_3} \in \mathcal{U}$. Basta dunque continuare ricorsivamente e prendere $H = \{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dove scegliamo

$$h_n \in (h_{n-1}, +\infty) \cap \widehat{X} \cap \bigcap_{m<n} X_{h_m}$$

Vogliamo ora generalizzare al caso $k > 2$. Per $k = 2$ prendere h_n in $\bigcap X_{h_m}$ serviva ad assicurarsi che $H \subset X$, e prenderlo in $\widehat{X}$ serviva ad assicurarsi di poter continuare al passo dopo. Anche in quanto segue gli oggetti col cappuccio servono ad assicurarsi di poter proseguire. In quanto segue identifichiamo $[\mathbb{N}]^k$ con $\Delta^+ = \{(n_1, \ldots, n_k) \mid n_1 < \ldots < n_k\}$. L'ultrafiltro scelto sarà $\mathcal{W} = \bigotimes^k \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ è un qualunque ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. È facile vedere che anche questa volta $\Delta^+ \in \mathcal{W}$. Per alleggerire la notazione definiamo $\ell(\bar{n})$ come la lunghezza di $\bar{n}$ e scriviamo $(\bar{n}, \bar{m})$ per indicare la concatenazione di $\bar{n}$ e $\bar{m}$. Definiamo, analogamente a prima,

$$X_{\bar{n}} = \{\bar{m} \mid (\bar{n}, \bar{m}) \in X\} \subseteq [\mathbb{N}]^{k-\ell(\bar{n})} \qquad \widehat{X}_{\bar{n}} = \left\{ m \;\middle|\; X_{\bar{n},m} \in \bigotimes^{k-\ell(\bar{n},m)} \mathcal{U} \right\} \subseteq \mathbb{N}$$

($\widehat{X}$ è pensato come $\widehat{X}_{\bar{n}}$ dove $\bar{n}$ è la stringa vuota). L'insieme omogeneo è di nuovo $H = \{h_r \mid r \in \mathbb{N}\}$ dove, indicando $H_r = \{h_i \mid i < r\}$ scegliamo

$$h_r \in (h_{r-1}, \infty) \quad \cap \bigcap_{\substack{\ell(\bar{n})<\min(k,r) \\ \bar{n}\in[H_r]^{\ell(\bar{n})}}} \widehat{X}_{\bar{n}} \quad \cap \bigcap_{\bar{n}\in[H_r]^{k-1}} X_{\bar{n}}$$

Per vedere che ognuno dei pezzi intersecati sopra sta in $\mathcal{U}$ basta notare che, dato che $X \in \mathcal{W}$, si ha induttivamente $X_{\bar{n}} \in \bigotimes^{k-\ell(\bar{n})} \mathcal{U}$ e di conseguenza $\widehat{X}_{\bar{n}} \in \mathcal{U}$. Anche in questo caso gli $X_{\bar{n}}$, con $\ell(\bar{n}) = k - 1$, servono ad avere $[H]^k \subset X$ e gli $\widehat{X}_{\bar{n}}$ servono a poter proseguire l'induzione. $\square$

4.2 Altre applicazioni

Vogliamo ora passare dalla versione infinita a quella finita. Vediamo prima il passaggio da Schur infinito a Schur finito. Vogliamo, assumendo che $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \Rightarrow \exists i\ \exists a < b < a + b \in C_i$ (Teorema 3.4), dimostrare che

$$\forall r \exists n \forall \{1, \ldots, n\} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists i \exists a < b < a + b \in C_i$$

In combinatoria diremmo di stare usando un *argomento di compattezza.* Se per assurdo la versione finita non fosse vera, vorrebbe dire che per un certo r fissato, trovo un controesempio per ogni n. L'idea dietro è fare il "limite" di questi controesempi per trovare una r-colorazione di $\mathbb{N}$ senza triple di Schur. Tao lo fa usando gli spazi[7] $\{1,\dots,n\}^{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Come si diceva, supponiamo che $\exists r \forall n \exists \{1,\dots,n\} = C_1^n \sqcup \dots \sqcup C_r^n$ senza triple di Schur monocromatiche. Prendiamo $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Dato che voglio costruire una r-colorazione di $\mathbb{N}$, dato un $k \in \mathbb{N}$ devo scegliere come colorarlo. Prendiamo $\Gamma_i(k) = \{n \geq k \mid k \in C_i^n\}$. Ora $\bigsqcup_{i=1}^r \Gamma_i(k) = [k,+\infty) \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists! i\ \Gamma_i(k) \in \mathcal{U}$, quindi è ben definita la colorazione di $\mathbb{N}$ data da $k \in C_i \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Gamma_i(k) \in \mathcal{U}$. Per Schur infinito $\exists i \exists a < b < a+b \in C_i$. Ma $a \in C_i \Leftrightarrow \Gamma_i(a) \in \mathcal{U}$ e analogamente $\Gamma_i(b) \in \mathcal{U}$ e $\Gamma_i(a+b) \in \mathcal{U}$. Prendiamo ora $n \in \Gamma_i(a) \cap \Gamma_i(b) \cap \Gamma_i(a+b)$. Ma allora $\{1,\dots,n\} = C_1^n \sqcup \dots \sqcup C_r^n$ e $a, b, a+b \in C_i^n$, contro l'ipotesi. $\square$

Notiamo che questo trucco funziona perché la proprietà in questione "riguarda un numero finito di cose", e gli ultrafiltri sono stabili per intersezione *finita.*

Esercizio 4.1. Dimostrare Ramsey infinito nel caso $k = 2$ senza usare gli ultrafiltri.

Esercizio 4.2. Passare da Ramsey infinito a Ramsey finito.

Esercizio 4.3. Usando Ramsey, dimostrare che ogni poset infinito ha una catena infinita o un'anticatena infinita, dove con anticatena si intende un insieme di elementi a due a due non confrontabili.

Dimostrazione. Sia $(S, \leq)$ un poset infinito. Vogliamo dimostrare che esiste $H \subseteq S$ catena o anticatena infinita. Consideriamo la colorazione $[S]^2 = C_1 \sqcup C_2$, con

$$C_1 = \{\{x,y\} \in [S]^2 \mid x \leq y \vee y \leq x\}$$

$$C_2 = \{\{x,y\} \in [S]^2 \mid x \not\leq y \wedge x \not\leq y\}$$

Per il Teorema di Ramsey esiste H infinito omogeneo. Se il colore è 1 sarà una catena, se è 2 un'anticatena. $\square$

Esercizio 4.4. Sia $(S, \prec)$ un ordine totale infinito. Allora $\exists A \subseteq S$ isomorfo a $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ oppure a $(\mathbb{N}, >_{\mathbb{N}})$.

Dimostrazione. Ben ordiniamo S secondo un ordine $<$ con l'assioma di scelta. A questo punto prendiamo $(S, <)$ e consideriamo la colorazione

$$C_1 = \{\{x,y\} \in [S]^2 \mid x < y \Leftrightarrow x \prec y\}$$

[7] Che serve siano compatti, quindi comunque c'è da usare la scelta.

$$C_2 = \{\{x, y\} \in [S]^2 \mid x < y \Leftrightarrow y \prec x\}$$

Per Ramsey esiste H infinito omogeneo e dato che $(H, <)$ è un buon ordine esiste $A \subseteq H$ tale che $(A, <) \simeq (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$. La conclusione è immediata. $\square$

Esercizio 4.5. Sempre usando Ramsey, dimostrare che se A è un Δ-set e $A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ è una sua colorazione finita, allora $\exists i$ tale che C_i è un Δ-set.

5 05/10

Nota: da mercoledì siamo in aula M1 (il venerdì sempre in N).

5.1 Principio di compattezza

Teorema 5.1 (Ramsey finito)**.** $\forall m, \forall k, \forall r \exists n\ n \to (m)^k_r$, cioè se $[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esiste H di cardinalità m omogeneo, cioè tale che $\exists i [H]^k \subseteq C_i$.

Si può usare per studiare ai grafi: ad esempio se ho n vertici, posso colorare le coppie a seconda che gli elementi della coppia siano connessi o meno e, a meno di prendere un numero di nodi sufficiente, so di avere un grafo sottografo completo di m nodi o un insieme di m nodi sconnessi a due a due.

Definizione 5.2. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi. Diciamo che $\mathcal{A}$ è r-*regolare* su un insieme X se per ogni r-partizione di X esiste un suo insieme monocromatico, cioè se

$$\forall X = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists A \in \mathcal{A}\ \exists i\ A \subseteq C_i$$

Dimostriamo una delle varie forme del

Teorema 5.3 (Principio di Compattezza I)**.** Se una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi *finiti* è r-regolare su un insieme *infinito* X, allora è r-regolare su un sottoinsieme *finito* $Y \subset X$.

Dimostrazione. L'idea è analoga al passaggio da Schur infinito a Schur finito. Supponiamo per assurdo che $\forall Y \subset X$ finito esista una r colorazione $Y = C_1^Y \sqcup \ldots \sqcup C_r^Y$ "brutta", cioè tale che $\forall A \in \mathcal{A} \forall i\ A \not\subseteq C_i^Y$. Sia $J = \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)$. Prendiamo un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su J *fine*[8], cioè contenente tutti i $\widehat{x} = \{Y \in J \mid x \in Y\} \in \mathcal{U}$ al variare di $x \in X$, che esiste perché la famiglia degli $\widehat{x}$ ha la FIP, dato che $\widehat{x}_1 \cap \ldots \cap \widehat{x}_n = \{Y \in J \mid x_1, \ldots, x_n \in Y\} \ni \{x_1, \ldots, x_n\}$. Definiamo la seguente colorazione Γ di X: dato $x \in X$ scriviamo

$$\mathcal{U} \ni \widehat{x} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \Lambda_i(x) \qquad \Lambda_i(x) = \{Y \in \widehat{x} \mid x \in C_i^Y\}$$

[8] In un certo senso $\mathcal{U}$ dà "importanza" a ognuno dei punti.

e poniamo $x \in \Gamma_i$, dove i è l'unico tale che $\Lambda_i \in \mathcal{U}$. Per ipotesi esiste $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{A}$ monocromatico di colore i per Γ. Tuttavia l'intersezione $\bigcap_{i=1}^n \Lambda_i(a_j)$ è non vuota in quanto elemento di $\mathcal{U}$, e dunque contiene una parte finita Y in cui per costruzione $A \subseteq C_i^Y$, contro l'ipotesi di assurdo. $\square$

Esercizio 5.4. Dimostrare il Principio di Compattezza I usando il Teorema di Tychonoff[9] sullo spazio $\{1, \ldots, r\}^X$.

Dimostrazione. Gli elementi di $\{1, \ldots, r\}^X$ (che è compatto per Tychonoff) sono esattamente le r-colorazioni di X. Consideriamo la famiglia di aperti[10]

$$\{U_{(A,c)} \mid A \in \mathcal{A}, c \in \{1, \ldots, r\}\} \qquad f \in U_{(A,c)} \Leftrightarrow f(A) = \{c\}$$

che è un ricoprimento se e solo se $\mathcal{A}$ è r-regolare per definizione. Per compattezza esiste un ricoprimento finito $\{U_{(A_i,c_i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$, e dunque $\mathcal{A}$ è r-regolare su $\bigcup_{i=1}^n A_i$. $\square$

5.2 Applicazioni

Ad esempio, per passare da Schur infinito a Schur finito possiamo considerare $\mathcal{A} = \{\{a, b, a+b\} \mid a < b \in \mathbb{N}\}$, che è r-regolare su $\mathbb{N}$ per Schur infinito e usare il principio di compattezza. Siccome se Y è finito allora $Y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ e la proprietà che vogliamo dimostrare per Schur è stabile per sovrainsieme abbiamo finito.

Analogamente possiamo dimostrare Ramsey finito (Teorema 5.1) nella seguente maniera:

Dimostrazione. Fissiamo k, r, m e consideriamo la famiglia (r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$ per Ramsey infinito)

$$\mathcal{A} = \left\{ [H]^k \;\middle|\; |H| = m \right\}$$

Per il principio di compattezza $\exists Y \subset [\mathbb{N}]^k$ finito su cui $\mathcal{A}$ è r-regolare. A questo punto prendiamo un n tale che [11] $Y \subseteq [\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ e consideriamo che la proprietà di Ramsey è stabile per sovrainsieme. $\square$

Esercizio 5.5. Ramsey finito implica Ramsey infinito.[12]

[9] A un occhio attento sarà chiaro che questa dimostrazione ci regala anche quella del Principio di Compattezza II.

[10] L'ipotesi che gli $A \in \mathcal{A}$ siano finiti è tacitamente usata nel fatto che $U_{(A,c)}$ sia aperto; se A è infinito sappiamo solo che è intersezione di aperti.

[11] Ad esempio un tale n è $\max \bigcup Y$

[12] Questo esercio è stato dato *per sbaglio*. La cosa non è affatto ovvia (se ne è accennato qualche lezione dopo), e anzi la questione è parecchio delicata. Ad esempio in ZFC è ovvio (si dimostrano entrambi), mentre nell'aritmetica di Peano PA sembrerebbe che l'implicazione non valga. Se non ho capito male diventa proprio una questione di reverse mathematics. In ogni caso questo esercizio va in buona sostanza ignorato.

Esercizio 5.6 (Principio di Compattezza II)**.** Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su un insieme X. Allora $\exists \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ sottofamiglia finita r-regolare su X.

Lemma 5.7. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ senza punti fissi. Allora $\exists C_1, C_2, C_3$ tale che $\forall n\ n \in C_i \Rightarrow f(n) \notin C_i$.

Si può dimostrare direttamente (per gli appassionati di combinatoria) o in maniera analoga al principio di compattezza I (solo che invece di essere un'ipotesi di assurdo è una costruzione vera e propria) partendo da

Lemma 5.8. Sia $F \subset \mathbb{N}$ finito. Allora $\exists C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = F$ tale che $n \in C_i \Leftrightarrow f(n) \notin C_i$ ogni volta che $n, f(n) \in F$.

Dimostrazione. Per induzione su $k = |F|$. Per $k = 1$ è vera a vuoto. Dati $\{n_1, \dots, n_k, n_{k+1}\}$, per pidgeonhole esiste un elemento n_s con al più una controimmagine. Per ipotesi induttiva posso 3-colorare $F \setminus n_s$ nella maniera richiesta. A questo punto basta estendere la colorazione colorando n_s con un colore diverso da quello della sua immagine e della sua (eventuale) controimmagine. □

Esercizio 5.9. Formulare e poi dimostrare le versioni *finite* del Teorema di Van der Waerden[13] e del Teorema delle Differenze.

6 10/10

6.1 Pre-ordine di Rudin-Keisler

Enunceremo molte cose per i naturali (o comunque avendo in mente i naturali), ma quasi tutto si può estendere a ultrafiltri su insiemi qualunque, magari con un po' di cautela o ipotesi aggiuntive.

Definizione 6.1. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I ed $f\colon I \to J$, si definisce *ultrafiltro immagine* su J $A \in f_*(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$.

Definizione 6.2. $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ vuol dire $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

Esercizio 6.3. Dimostrare che

1. $f_*(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro su J
2. $f_*(g_*(\mathcal{U})) = (f \circ g)_*(\mathcal{U})$
3. $f \equiv_{\mathcal{U}} g \Rightarrow f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$
4. $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{Id}$

[13] Che non abbiamo ancora dimostrato, quindi immagino ci sia da assumere la versione infinita.

5. Se f è iniettiva vale anche il viceversa del punto 3.

Dimostrazione. 1. Dando per buono che sia un filtro (verifica ovvia), $f_*(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro se e solo se $\forall A \in f_*(\mathcal{U})$ vale $A \notin f_*(\mathcal{U}) \Rightarrow A^c \in f_*(\mathcal{U})$. D'altro canto $A \notin f_*(\mathcal{U}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \notin \mathcal{U} \Rightarrow (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A^c) \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in f_*(\mathcal{U})$.

2. $A \in f_*(g_*(\mathcal{U})) \Leftrightarrow g^{-1}(f^{-1}(A)) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow (fg)^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in (fg)_*\mathcal{U}$

3. $A \in f_*(\mathcal{U})$ se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Per ipotesi $B = f^{-1}(A) \cap \{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Si ha $g(B) \subseteq A$ perché f e g coincidono su B e $f(B) \subseteq A$. Dunque $\mathcal{U} \ni B \subseteq g^{-1}(A)$ e questo prova $f_*(\mathcal{U}) \subseteq g_*(\mathcal{U})$. Per simmetria (o per massimalità) abbiamo anche l'altra inclusione.

4. Se $f \not\equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{Id}$, per il punto 3 possiamo sostituire f con una $g \equiv_{\mathcal{U}} f$ tale che $\forall i \; g(i) \neq i$. Allora per il Lemma 5.7 esiste una 3-colorazione $I = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ tale che $g(C_i) \cap C_i = \emptyset$. Uno e uno solo dei tre colori (ad esempio C_1) appartiene a $\mathcal{U}$. Quindi $g(C_1) \notin \mathcal{U}$, ma $g(C_1) \in g_*(\mathcal{U})$, per cui $\mathcal{U} \neq g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$.

5. Dato che f è iniettiva possiede un'inversa sinistra h, per cui si ha $\mathcal{U} = h_*(f_*(\mathcal{U})) = h_*(g_*(\mathcal{U})) = (hg)_*(\mathcal{U})$ per il secondo punto. Per il punto precedente allora $hg \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{Id}$, per cui $A = \{j \mid h(g(j)) = j\} \in \mathcal{U}$. Dato che $g^{-1}(g(A)) \supseteq A \in \mathcal{U}$ abbiamo $g(A) \in g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$, e quindi $f^{-1}(g(A)) \in \mathcal{U}$. Ma se $i \in f^{-1}(g(A))$ si ha $f(i) = g(j)$ per un certo $j \in A$ e quindi $i = hf(i) = hg(j) = j$, per cui $i = j$ e dunque $f(i) = g(i)$. Questo prova che $\{i \mid f(i) = g(i)\} \supseteq f^{-1}g(A) \in \mathcal{U}$.

□

Senza l'inettività in genere saltano cose. Ad esempio se $\mathcal{V}$ non è principale $(\pi_1)_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V} = (\pi_2)_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})$ ma $\pi_1 \not\equiv_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}} \pi_2$ perché coincidono solo sulla diagonale, che non sta in $\mathcal{V}$. Esistono ultrafiltri che fanno valere il viceversa della 3 per generiche f e g (*ultrafiltri di Hausdorff*)? Boh, è tutt'ora un problema aperto[14].

Definizione 6.4. Siano $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ ultrafiltro su J. Diciamo che $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ se e solo se esiste una bigezione $\sigma\colon I \to J$, con $\sigma_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Esercizio 6.5. $\mathcal{U} \cong \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V} \cong \mathcal{U}$.

Proposizione 6.6. Dato $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I ed $f\colon I \to J$, si ha $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ è iniettiva.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$"

Per ipotesi esiste $\sigma\colon J \to I$ bigettiva con $\sigma_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Per l'Esercizio 6.3 si ha $A = \{i \mid \sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. Ma allora $f_{|A}$ è iniettiva.

[14] Ma è consistente con ZFC che non ne esistano.

"$\Leftarrow$"

Qui se l'ultrafiltro non è su $\mathbb{N}$ bisogna stare un attimo attenti. Ci serve che ogni elemento dell'ultrafiltro ha la stessa cardinalità dell'insieme ambiente (si dice che $\mathcal{U}$ è *uniforme*[15]) e che $|I| = |J|$. Se $A \in \mathcal{U}$ e $f_{|A}$ è iniettiva, partiziono $A = A_1 \sqcup A_2$ in maniera che $|A_1| = |A_2| = |A| = |I|$ (qui stiamo usando l'uniformità). WLOG $A_1 \in \mathcal{U}$. Estendo ora $f_{|A_1}$ ad una funzione $\sigma\colon I \to J$ bigettiva (lo posso fare perché $|J| = |I|$) (il fatto di spezzare serve per la surgettività). Ora $|I| = |J| = |A_1| = |f(A_1)| = |f(A_2)|$, quindi $|I \setminus A_1| = |J \setminus f(A_1)|$. Data una bigezione τ dal primo al secondo, definisco $\sigma\colon I \to J$ tale che

$$\sigma(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se} \quad i \in A_1 \\ \tau(i) & \text{se} \quad i \notin A_1 \end{cases}$$

Ma ora $\sigma_{|A_1} = f_{|A_1}$, dunque dato che $A_1 \in \mathcal{U}$ abbiamo $\sigma \equiv_{\mathcal{U}} f$ e quindi $f_*(\mathcal{U}) = \sigma_*(\mathcal{U})$. D'altra parte σ^{-1} testimonia che $\sigma_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$. □

Definizione 6.7. Pre-ordine di Rudin-Keisler: $\mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}$ se e solo se $\exists f\ f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Vale la transitività (è uno degli esercizi sopra), e anzi

Proposizione 6.8. $\leq_{\text{RK}}$ è un ordine parziale sulle classi di isomorfismo, cioè $\mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}, \mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Una freccia è ovvia. Viceversa se $\exists f, g$ tali che $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, allora

$$(g \circ f)_*(\mathcal{V}) = g_*(f_*(\mathcal{V})) = \mathcal{V} \Rightarrow g \circ f \equiv_{\mathcal{V}} \mathrm{Id}$$

Ma allora $f_{|A}$ è iniettiva su $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} = f_*(\mathcal{V}) \cong \mathcal{V}$. □

In realtà nell'ultimo passaggio abbiamo assunto l'uniformità e il fatto che $|I| = |J|$, ma visto che ci interessano ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ possiamo non curarci del problema.

Esercizio 6.9. Mostrare che (gli ultrafiltri si intendono non principali su $\mathbb{N}$):

1. $\mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$
2. $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$
3. Esistono ultrafiltri non isomorfi $\mathcal{U} \ncong \mathcal{V}$.

Dimostrazione. 1. Con le proiezioni.

[15] Forse si riesce a dimostrare anche senza assumere l'uniformità

2. Se per assurdo avessimo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ tale che $f_*\mathcal{V} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, allora $(\pi_1)_* f_* \mathcal{V} = (\pi_1)_* \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V}$. Dunque $\pi_1 \circ f = \mathrm{Id}$ su $A \in \mathcal{V}$. Allora $f(A) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, assurdo se l'ultrafiltro è non principale perché le fibre orizzontali hanno tutte un punto.

3. Segue dal punto precedente.

$\square$

6.2 Spazio degli ultrafiltri

Definizione 6.10. $\beta\mathbb{N} = \{\mathcal{U} \text{ ultrafiltro su } \mathbb{N}\}$

È la *compattificazione di Stone-Čech* dello spazio discreto $\mathbb{N}$. Si ha chiaramente $\beta\mathbb{N} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ e, meno chiaramente (vedremo), $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Possiamo pensare $\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$ identificando $n \in \mathbb{N}$ con l'ultrafiltro principale $\sqcup_n$.

Mettiamo su $\beta\mathbb{N}$ la topologia che ha come base di aperti $\{\mathcal{O}_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$, dove $\mathcal{O}_A = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid A \in \mathcal{U}\}$. Iniziamo a studiarne le proprietà osservando che (si verifica tutto usando le definizioni)

1. $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A\cap B}$
2. $\mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A\cup B}$
3. $\beta\mathbb{N} \setminus \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{\mathbb{N}\setminus A}$

Dunque gli $\mathcal{O}_A$ sono clopen (e quindi lo spazio è totalmente disconesso), e anzi sono simultaneamente una base di aperti e una base di chiusi.

Proposizione 6.11. $\beta\mathbb{N}$ è di Hausdorff.

Dimostrazione. $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists A\ A \in \mathcal{U}, A \notin \mathcal{V}$, cioè $A^c \in \mathcal{V}$. Quindi $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A^c}$ e $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_{A^c} = \emptyset$. $\square$

Proposizione 6.12. $\beta\mathbb{N}$ è compatto.

Dimostrazione. Mostriamo che ogni famiglia di chiusi con la FIP ha intersezione non vuota. Scriviamo un chiuso come intersezione di chiusi di base $C_i = \bigcap_{A\in J_i} \mathcal{O}_A$, abbiamo $\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcap_{A\in J} \mathcal{O}_A$, dove $J = \bigcup_{i\in I} J_i$. La famiglia J eredita la FIP dai C_i, perché $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ è vuoto se e solo se

$$\emptyset = \mathcal{O}_{A_1\cap\ldots\cap A_n} = \mathcal{O}_{A_1} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{A_n} \supseteq \bigcap_{k=1}^{n} C_{i_k} \qquad (A_k \in J_{i_k})$$

Possiamo quindi estendere J ad un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \bigcap_{A\in J} \mathcal{O}_A = \bigcap_{i\in I} C_i$. $\square$

Vedremo anche la seguente proprietà universale: $\forall K$ spazio compatto di Hausdorff e $\forall f\colon \mathbb{N} \to K$, $\exists! \bar{f}\colon \beta\mathbb{N} \to K$ estensione continua di f.

7 12/10

7.1 Proprietà di $\beta\mathbb{N}$

Esercizio 7.1. $\mathbb{N}$ è un sottospazio discreto denso di $\beta\mathbb{N}$.

Dimostrazione. $\mathcal{O}_{\{n\}} = \{\sqcup_n\}$, dunque tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati. Inoltre (le immagini de)i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono aperti in quanto unione dei loro punti, che abbiamo appena visto essere aperti, e dunque per il secondo punto del prossimo esercizio $\overline{\mathbb{N}} = \mathcal{O}_{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$. □

Esercizio 7.2.

1. Gli insiemi $\mathcal{O}_A$ sono tutti e soli i clopen di $\beta\mathbb{N}$.
2. U aperto di $\beta\mathbb{N} \Rightarrow \overline{U} = \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$ (in particolare non esistono aperti $U \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ non vuoti)
3. U intorno di $\mathcal{U} \Rightarrow U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma non vale il viceversa.

Dimostrazione.

1. Che gli $\mathcal{O}_A$ sono clopen segue dal fatto che $\beta\mathbb{N} \setminus \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{\mathbb{N}\setminus A}$, cosa ovvia per definizione di $\mathcal{O}_A$ e per la proprietà di ultrafiltro. Se C è un clopen di $\beta\mathbb{N}$, in quanto aperto si può scrivere come $C = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{A_i}$. Se I è finito, dato che $\mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A\cup B}$ abbiamo finito. Tuttavia in quanto chiuso in $\beta\mathbb{N}$, che è compatto, C è anch'esso compatto, e quindi possiamo sempre ricondurci al caso precedente.

2. Per mostrare che $\mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}} \supseteq U$ bisogna mostrare che
$$\forall \mathcal{U} \in U \; U \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqcup_n \in U\} \in \mathcal{U}$$
Possiamo scrivere $U = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{A_i}$, quindi se $\mathcal{U} \in U$ si ha $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{A_i}$ e quindi $\mathcal{U} \ni A_i$ per un certo i. Ma $U \cap \mathbb{N} \supset A_i$ (perché chiaramente in $\mathcal{O}_{A_i}$ ci sono tutti gli ultrafiltri principali su n al variare di $n \in A_i$) e quindi $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Dunque $\mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}} = \overline{\mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}} \supseteq \overline{U}$.

   Resta da vedere che se $U \subset C$, con C chiuso, allora $C \supseteq \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$. Possiamo scrivere $C = \bigcap_{j\in J} \mathcal{O}_{B_j}$. Ci basta dimostrare che $\forall j \; U \cap \mathbb{N} \subseteq B_j$. Se per assurdo esistessero $j \in J$ ed $n \in \mathbb{N}$ tali che $n \in (U\cap\mathbb{N}) \setminus B_j$, allora l'ultrafiltro principale $\sqcup_n$ non starebbe in C, ma questo è assurdo perché $\sqcup_n \in U \subset C$ per ipotesi.

3. Per il punto 2 si ha che $\mathcal{O}_{\mathring{U}\cap\mathbb{N}} \supseteq \mathring{U} \ni \mathcal{U}$, e quindi $\mathring{U} \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Dunque $U \cap \mathbb{N} \supseteq \mathring{U} \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Tuttavia, se consideriamo $U = \mathbb{N}$ pensato come la famiglia degli ultrafiltri principali, è chiaro che qualunque ultrafiltro non principale funge da controesempio per il viceversa.

□

Esercizio 7.3 (difficile)**.** Nessun $\mathcal{U}$ non principale ha una base di intorni numerabile (quindi $\beta\mathbb{N}$ non è metrizzabile).

Dimostrazione. Supponiamo che $\{\mathcal{O}_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia una base[16] di intorni numerabile di $\mathcal{U}$. Dato che $\mathcal{U}$ è non principale possiamo scegliere ricorsivamente $p_n, q_n \in A_n \setminus \{p_i, q_i \mid i < n\}$ tali che $p_n \neq q_n$ e considerare $P = \{\sqcup_{p_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{\sqcup_{q_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Per costruzione ogni intorno di $\mathcal{U}$ interseca sia P che Q, il che significa che $\mathcal{U}$ sta nelle chiusure di P e Q, che sono aperti in quanto unione di aperti, e quindi[17] per l'Esercizio 7.2

$$\mathcal{U} \in \overline{P} \cap \overline{Q} = \mathcal{O}_P \cap \mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_{P \cap Q}$$

il che significa che $P \cap Q \in \mathcal{U}$. Tuttavia per costruzione $P \cap Q = \emptyset$, quindi $\mathcal{U}$ non è un ultrafiltro. □

Esercizio 7.4 (difficile)**.** $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$

Dimostrazione. Prendiamo $\mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q})$ e $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ e consideriamo, per $t \in \mathbb{R}$,

$$A_f^t = \{I \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Q}) \mid |I \cap (-\infty, t)| \equiv f(t) \pmod 2\}$$

$$\mathcal{F}_f = \{A_f^t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

le famiglie $\mathcal{F}_f$ sono $2^{\mathfrak{c}}$ e vogliamo due distinte non possono generare lo stesso ultrafiltro perché se $f(t_0) \neq g(t_0)$ allora $A_f^{t_0} = (A_g^{t_0})^c$. Basta quindi mostrare che la famiglia $\{A_f^t\}$ ha la FIP. Dati $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, partiamo dal vuoto e, per induzione, se $f(t_1) = 1$ aggiungiamo un razionale $q_1 < t_1$, se $f(t_1) = 0$ non facciamo nulla. Analogamente se $f(t_i) = f(t_{i-1})$ non facciamo nulla, altrimenti aggiungiamo un razionale q_i. Così fancendo otteniamo $\{q_i\} \in \bigcap_{i=1}^n A_f^{t_i}$. □

Si può anche dare un'altra[18]

Dimostrazione. Il cuore della dimostrazione è trovare una famiglia di parti $\mathcal{A}$ di cardinalità $\mathfrak{c}$ e con la proprietà che, per ogni scelta di $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ distinti e di $k \leq n$ si abbia

$$A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \ldots \cap A_n^c \neq \emptyset$$

Se troviamo una tale famiglia, che chiamiamo *indipendente*, abbiamo finito. Infatti comunque scelta $f \colon \mathcal{A} \to \{0,1\}$, la famiglia

$$\{A \mid f(A) = 1\} \cup \{A^c \mid f(A) = 0\}$$

[16] Chiaramente ogni aperto che contiene $\mathcal{U}$ ne include uno di base che contiene $\mathcal{U}$, quindi la scelta non è restrittiva.

[17] Identificando $\sqcup_n$ con n.

[18] La dimostrazione originariamente presente in questo punto degli appunti era scritta troppo male per essere decifrata, ma sembrava cominciare come la dimostrazione "classica" del risultato, che è quella che leggete in questa versione, per poi esibire la famiglia indipendente sfruttando pesantemente il fatto che fossimo su $\mathbb{N}$. Dato che la dimostrazione "classica" si presta facilmente ad essere generalizzata per mostrare che esistono 2^{2^κ} ultrafiltri *uniformi* distinti su κ cardinale infinito qualunque ho preferito riportare questa.

avrà la FIP e potrà quindi essere estesa ad un ultrafiltro. Questo conterrà A se $f(A) = 1$ e A^c se $f(A) = 0$, per cui funzioni diverse generano ultrafiltri diversi, e dato che $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ queste funzioni sono $2^{\mathfrak{c}}$. Mostriamo dunque che una tale famiglia esiste.

Sia P l'insieme delle coppie $(F, \mathcal{F})$, dove F è una parte finita di $\mathbb{N}$ e $\mathcal{F}$ è una parte finita di $\mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Dato che $|P| = \aleph_0$, a meno di bigezioni ci basta trovare una famiglia indipendente grande su P. Per $u \subseteq \mathbb{N}$ definiamo

$$X_u = \{(F, \mathcal{F}) \mid F \cap u \in \mathcal{F}\}$$

e sia $\mathcal{A} = \{X_u \mid u \subseteq \mathbb{N}\}$. Se $u \neq v$, e ad esempio $\alpha \in u \setminus v$, allora $(\{\alpha\}, \{\{\alpha\}\}) \in X_u \setminus X_v$, per cui $\mathcal{A}$ ha la cardinalità richiesta. Per mostrarne l'indipendenza prendiamo $\{X_{u_i} \mid i \leq n\}$ e $\{X_{v_j} \mid i \leq m\}$ disgiunti, e per ogni coppia (i, j) scegliamo $\alpha_{i,j} \in (u_i \setminus v_j) \cup (v_j \setminus u_i)$. Posti $F = \{a_{i,j} \mid i \leq n, j \leq m\}$ e $\mathcal{F} = \{F \cap u_i \mid i \leq n\}$, per la scelta di $\alpha_{i,j}$ si ha $F \cap u_i \neq F \cap v_j$, dunque $F \cap v_j \notin \mathcal{F}$ e

$$(F, \mathcal{F}) \in X_{u_1} \cap \ldots \cap X_{u_n} \cap X_{v_1}^c \cap \ldots \cap X_{v_m}^c$$

che è quindi non vuota. $\square$

Corollario 7.5. Esistono $2^{\mathfrak{c}}$ classi di isomorfismo in $\beta\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Un'isomorfismo è determinato da una bigezione in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, che è grosso $\mathfrak{c}$. Dunque $2^{\mathfrak{c}} = |\beta\mathbb{N}| \leq |\text{classi di isomorfismo}| \cdot \mathfrak{c}$. $\square$

Dimostriamo il Lemma 5.7.

Dimostrazione. Partiamo dalla versione finita. Per ogni $Y \in f_n(I)$ prendiamo una colorazione "buona" $Y = C_1^Y \sqcup C_2^Y \sqcup C_3^Y$. Fissiamo $\mathcal{W}$ ultrafiltro su $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ che estende $\{\hat{\imath} \mid i \in I\}$, dove $\hat{\imath}$ sono gli $X \subseteq I$ finiti tali che $i \in X$. Fissato i, sia $\Gamma_q(i) = \{Y \mid i \in C_q^Y\}$ per $q \in \{1, 2, 3\}$. Ora $\bigsqcup_{1 \leq q \leq 3} \Gamma_q(i) = \hat{\imath} \in \mathcal{W} \Rightarrow \exists! \Gamma_s(i) \in \mathcal{W}$ e ad i do il colore s. Prendiamo ora $i \in I$, di colore poniamo s ed $f(i)$, di colore poniamo t, e per le proprietà di ultrafiltro possiamo trovare $Y \in \Gamma_s(i) \cap \Gamma_t(f(i)) \neq \emptyset$. Ma allora $i, f(i) \in Y = C_1^Y \sqcup C_2^Y \sqcup C_3^Y$ e in tale colorazione, essendo Y finito, $s \neq t$. $\square$

Questa in realtà vale per tutte le compattificazioni di Stone-Čech:

Teorema 7.6 (Proprietà universale di $\beta\mathbb{N}$)**.** $\forall f \colon \mathbb{N} \to K$ dove K è compatto di Hausdorff $\exists! \bar{f} \colon \beta\mathbb{N} \to K$ estensione continua di f.

Dimostrazione. L'unicità è gratis per densità. Definiamo $\bar{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim f(n) \in K$. Abbiamo già dimostrato che esiste un unico $\mathcal{U}$-limite, quindi questa è una buona definizione.

Che si tratti di un'estensione è immediato: se il limte lo facciamo su un ultrafiltro principale $\sqcup_k$(ricordiamo che gli ultrafiltri principali sono identificati coi naturali) abbiamo che $\bar{f}(\sqcup_k) = f(k)$.

Preso ora U intorno di $\bar{f}(\mathcal{U})$, voglio trovare $B \subseteq \mathbb{N}$ tale che

1. $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$;

2. $\bar{f}(\mathcal{O}_B) \subseteq U$.

Osserviamo ora che se K è compatto di Hausdorff, K è regolare, cioè ogni punto ha una base di intorni chiusi. Prendiamo V intorno di $\overline{f}(\mathcal{U})$ tale che $\overline{V} \subseteq U$ e poniamo $B = f^{-1}(V)$.

Per la 1, se $\mathcal{V}$ è un intorno di $\overline{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} - \lim f$, per definizione di $\mathcal{U}$-limite si ha $f^{-1}(V) = \{n \mid f(n) \in V\} \in \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{f^{-1}(V)}$.

Per la 2, basta togliere il punto iterrogativo da qui:

$$\overline{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}) \subseteq \overline{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(\overline{V})}) \overset{?}{\subseteq} \overline{V} \subseteq U$$

Ma se C è chiuso, $\overline{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(C)}) \subseteq C$. Infatti se $\overline{f}(\mathcal{W}) \notin C$, cioè se $\mathcal{W} - \lim f \in C^c$ (che è aperto), allora $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c \in \mathcal{W}$, e quindi $f^{-1}(C) \notin \mathcal{W}$ cioè $\mathcal{W} \notin \mathcal{O}_{f^{-1}(C)}$. □

Esercizio 7.7 (per gli appassionati di topologia)**.** Se X è uno spazio topologico compatto di Hausdorff in cui $\mathbb{N}$ è denso e soddisfa la proprietà universale, allora X è omeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

7.2 Ultrafiltri selettivi

Esercizio 7.8 (molto difficile)**.** Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. TFAE:

1. $\mathcal{U}$ è *selettivo*, cioè $\forall \mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dove $A_k \notin \mathcal{U}$, allora $\exists X \in \mathcal{U}$ tale che $\forall k \, |X \cap A_k| = 1$.

2. $\forall f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f è $\mathcal{U}$-quasi ovunque costante oppure f è $\mathcal{U}$-quasi ovunque iniettiva.

3. $\forall f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non decrescente e tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

4. $\mathcal{U}$ è RK-minimale fra i non principali.

5. Proprietà di Ramsey: $[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \Rightarrow \exists A \in \mathcal{U} [A]^k \subseteq C_i$.

L'ipotesi del continuo implica l'esistenza di ultrafiltri selettivi. Si indicizza la roba con ω_1, poi si fa induzione transfinita e sotto c'è roba numerabile...

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ Se f non è $\mathcal{U}$-q.o. costante $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k = f^{-1}(k) \notin \mathcal{U}$. Scriviamo ora $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (a meno di prendere solo i k tali che $A_k \neq \emptyset$, che non possono essere finiti). Prendiamo $X = \{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots\}$ garantito dalle ipotesi e supponiamo WLOG che $X_1 = \{x_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$. Questo "libera abbastanza spazio" (nel senso che $f(X_1^c)$ è infinito) e permette di definire g iniettiva che coincide con f su X_1.

$2 \Rightarrow 1$. Se $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, sia $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(A_k) = \{k\}$. Per ipotesi $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ con g iniettiva, e quindi preso $X = \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ si ha $|X \cap A_k| \leq 1$. Ora basta aggiungere a X un punto in ogni A_k che non interseca.

$1, 2 \Rightarrow 3$. Se $f \equiv_{\mathcal{U}} c$ costante abbiamo finito, altrimenti è per ipotesi equivalente a g iniettiva, e per transitività di $\equiv_{\mathcal{U}}$ ci basta mostrare la tesi per g. Dato che g è iniettiva, esiste a_0 tale che $\forall n \geq a_0 \; g(n) > g(0)$. Similmente definiamo a_k come il minimo per cui $\forall n \geq a_k \; g(a_k) \geq g(a_{k-1})$ e $A_k = [a_{k-1}, a_k)$. Per costruzione da a_{k+1} in poi (e quindi "da A_{k+2}") g è maggiore che su A_k. Supponendo WLOG $\bigsqcup A_{2k} \in \mathcal{U}$ e prendendo X garantito dalla selettività, abbiamo che su $\bigsqcup A_{2k} \cap X \in \mathcal{U}$ la nostra g è strettamente crescente, ed è facile completarla ad una funzione debolmente crescente definita su tutto $\mathbb{N}$.

$3 \Rightarrow 1$ Procediamo come in $2 \Rightarrow 1$, solo che adesso sappiamo solo che f è non decrescente su un certo insieme S. $S \cap A_n$ è finito per costruzione, e quindi possiamo scrivere $S \cap A_n = \{s_{n,1} < \ldots < s_{n,r_n}\}$. Chiamiamo g la funzione "quanti ne hai davanti", cioè

$$\begin{cases} g = 0 & \text{su } \mathbb{N} \setminus S \\ g(s_{n,i}) = r_n - i & \text{su } S \cap A_n \end{cases}$$

e sia $R \in \mathcal{U}$ dove g è non decrescente. Per costruzione $R \cap S \cap A_n$ ha cardinalità al più 1, e si conclude come in $2 \Rightarrow 1$ con $X = S \cap R \in \mathcal{U}$.

$1, 2, 3 \Rightarrow 5$. Facciamolo per le coppie per semplicità.

Lemma 7.9. Se $\mathcal{U}$ è selettivo e $A_k \in \mathcal{U}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ allora $\exists X = \{x_1 < x_2 < \ldots\} \in \mathcal{U}$ tale che $x_k \in A_{x_k}$

Con questo Lemma possiamo mostrare che, dato $C_i \subset [\mathbb{N}]^2$, esiste $Z \in \mathcal{U}$ tale che $[Z]^2 \in C_i$ oppure $[Z]^2 \in C_i^c$. Dato che il secondo caso non può capitare per tutti i colori (intersecare gli Z produrrebbe un insieme di $\mathcal{U}$ con al più un elemento), questo conclude. Definiamo $X_n = \{k > n \mid (n,k) \in Z\}$. Dato che $\mathbb{N} = \{n \mid X_n \in \mathcal{U}\} \sqcup \{n \mid X_n^c \in \mathcal{U}\}$, sia Y il pezzo dei due presente in $\mathcal{U}$, che supponiamo WLOG essere il primo, e a meno di intersezioni supponiamo $X_{n_1} \supseteq X_{n_2} \ldots$ Se X è come nella tesi, $Z = X \cap Y$ è l'insieme omogeneo cercato. Dimostriamo quindi il Lemma:

Dimostrazione. Se $\bigcap A_k \in \mathcal{U}$ possiamo pescare gli x_n da qui, per cui supponiamo[19] che l'intersezione sia vuota e usiamolo per definire $f(i) = \min\{k \mid i \notin A_k\}$. Dato che f non può essere $\mathcal{U}$-q.o. costante

[19] A meno di intersecare ogni A_k con $(\bigcap A_k)^c \in \mathcal{U}$.

(il relativo $A_{k-1} \setminus A_k$ starebbe in $\mathcal{U}$) è per quanto già visto strettamente crescente su un $S = \{y_0 < y_1 < \ldots\} \in \mathcal{U}$. Definiamo $z_1 = y_1$ e $z_{i+1} = \min\{y_k > z_i \mid f(y_k) > z_i\}$. Prendendo $W \in \mathcal{U}$ che pesca $w_i \in (z_i, z_{i+1}]$ e che possiamo supporre incluso in S a meno di intersecare abbiamo, usando il fatto che f è strettamente crescente,

$$f(w_{i+2}) > f(z_{i+2}) > z_{i+1} \geq w_i > z_i \geq y_i \geq i$$

e quindi $w_{i+2} \in A_i$ per definizione di f. Allora ci basta definire $x_k = w_{k+2} \in A_k$. □

$5 \Rightarrow 3$ Coloro le coppie di naturali in modo che $\{i, j\} \in C_1$ se $f(i) \leq f(j)$, C_2 altrimenti. Notiamo che non ci può essere un insieme infinito omogeneo sul secondo colore perché una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non può essere decrescente su un insieme infinito, e questo conclude. Se facciamo con tre colori abbiamo anche che è quasi ovunque costante o quasi ovunque strettamente crescente.

Nei prossimi due punti useremo tacitamente l'Esercizio 6.3.

$2 \Rightarrow 4$ Sia $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Per ipotesi possiamo supporre f iniettiva, e a meno di ridefinirla su WLOG i pari possiamo supporre che sia una bigezione. Ma allora se σ è la sua inversa si ha $\mathcal{U} = \sigma_*(\mathcal{V})$, cioè $\mathcal{U} \leq_{\text{RK}} \mathcal{V}$.

$4 \Rightarrow 2$ Dire che $\mathcal{V} \leq_{\text{RK}} \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V} \cong \mathcal{U}$ vuol dire che se esiste f tale che $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$ esiste una tale f bigettiva. Prendiamo quindi $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e g bigettiva tale che $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Dato che g è iniettiva, si ha $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

□

8 17/10

Risoluzione di esercizi (riportati sotto l'esercizio stesso).

Nota: il passaggio da Ramsey finito a Ramsey infinito non è così immediato, ci sono cose profonde sotto e si riesce solo a dimostrare una versione indebolita. Trovare un collegamento serio sarebbe una gran cosa (passare da risultati finiti a risultati infiniti non è banale, e a volte nemmeno si può).

8.1 P-points

Esercizio 8.1. TFAE:

1. $\mathcal{U}$ è un p-point, cioè intersezione numerabile di suoi intorni è un suo intorno (relativamente a $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$);

2. $\forall \mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dove $A_k \notin \mathcal{U} \Rightarrow \exists X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap A_k$ è finito per ogni k;

3. $\forall f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f è costante $\mathcal{U}$-quasi-ovunque oppure $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ dove g è *finite-to-one*, cioè tutte le controimmagini $g^{-1}(k)$ sono finite o vuote.

*Dimostrazione.*1 $\Rightarrow$ 2 Abbiamo $A_k \notin \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A_k \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{N}\setminus A_k}$. Per la proprietà di p-point $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B \subseteq \bigcap \mathcal{O}_{\mathbb{N}\setminus A_k}$. Dunque $B \in \mathcal{U}$, e se uno degli $A_k \cap B$ fosse infinito $\{A_k, B\}$ potrebbe essere esteso a un ultrafiltro non principale in $\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_{A_k}$, contro $\mathcal{O}_B \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{N}\setminus A_k}$.

2 $\Rightarrow$ 3 Simile a quanto fatto per selettività e iniettività.

3 $\Rightarrow$ 1 Sia, a meno di intersezioni e di passare agli aperti di base, $\{\mathcal{O}_{B_i} \mid B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots\}$ una famiglia numerabile di intorni di $\mathcal{U}$ in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Se $\bigcap B_i \in \mathcal{U}$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti possiamo supporla vuota e definire $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che vale i su $B_{i-1} \setminus B_i$. Se f è $\mathcal{U}$-q.o. costante vuol dire che uno dei $B_{i-1} \cap B_i^c \in \mathcal{U}$, contro il fatto che $B_i \in \mathcal{U}$, quindi per ipotesi esiste $B \in \mathcal{U}$ dove f è finite-to-one. Sicuramente $\mathcal{O}_B$ è un intorno di $\mathcal{U}$, quindi per concludere ci basta mostrare che, per ogni i e $\mathcal{V}$, se $B \in \mathcal{V}$ allora $B_i \in \mathcal{V}$. Se così non fosse $\mathcal{V}$ conterrebbe $B \cap B_i^c = B \cap \bigsqcup_{k=2}^{i} B_{k-1} \setminus B_k$, che è finito per costruzione.

□

9 19/10

Per la maggior parte soluzione di esercizi.

9.1 Un'altra soluzione di un esercizio

Lemma 9.1. Se $f\colon \mathbb{N} \to K$, è tale che $\operatorname{Im} f$ è densa e K è compatto di Hausdorff, allora $\bar{f}\colon \beta\mathbb{N} \to K$ è surgettiva.

Dimostrazione. $\bar{f}(\beta\mathbb{N})$ è compatto perché immagine continua di un compatto, e per Hausdorff è chiuso. In quanto chiuso contiene la sua chiusura, cioè $\bar{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq \overline{\bar{f}(\mathbb{N})} = K$. □

Dato che[20] $2^{2^{\mathbb{N}}}$ è compatto per Tychonoff ed è di Hausdorff perché prodotto di Hausdorff, se mostriamo che è anche separabile abbiamo una terza dimostrazione di $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Proposizione 9.2. $2^{2^{\mathbb{N}}}$ è separabile.

Dimostrazione. Sia $\Lambda \subset 2^{2^{\mathbb{N}}}$ l'insieme delle funzioni che "guardano solo un pezzo finito di dominio", cioè

$$\Lambda = \{f \in 2^{2^{\mathbb{N}}} \mid \exists J \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})\ x_{|J} = y_{|J} \Rightarrow f(x) = f(y)\}$$

[20] Identifichiamo 2 con $\{0, 1\}$. Dunque questo è l'insieme delle funzioni che mandano una funzione $\mathbb{N} \to 2$ in un elemento di 2 o, equivalentemente, le funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di $2^{\mathbb{N}}$. Insomma, ci siamo capiti.

che è chiaramente numerabile perché per ogni $J \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ho solo $2^{|J|}$ elementi di Λ. Per mostrare che Λ è denso basta mostrare che interseca ogni aperto di base. Questi sono, al variare di $g \in 2^{2^{\mathbb{N}}}$, $H = \{h_1, \dots, h_n\} \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(2^{\mathbb{N}})$, gli

$$\mathcal{O}_{g,H} = \{f \in 2^{2^{\mathbb{N}}} \mid f_{|H} = g_{|H}\}$$

Scegliamo per ogni $h_i \neq h_j$ un $n_{i,j}$ dove h_i sia diversa da h_j, e chiamiamo J l'insieme di questi $n_{i,j}$. Chiaramente $h_{i|J} = h_{j|J}$. Se $\mathcal{O}_{g,H}$ è non vuoto, un elemento di $\Lambda \cap \mathcal{O}_{g,H}$ è

$$a \mapsto \begin{cases} g(h_i) & \text{se } \exists i\ a_{|J} = h_{i|J} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Occhio che questo argomento si generalizza: basta sostituire $\mathbb{N}$ con κ cardinale infinito e "separabile" con "contiene un denso grosso κ".

9.2 Algebra in $\beta\mathbb{N}$

Vogliamo dare una struttura algebrica a $\beta\mathbb{N}$.

Definizione 9.3. La somma fra ultrafiltri è definita come $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, dove $A - n = \{m \mid m + n \in A\}$.

Osserviamo che $s_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, dove s è la somma fra naturali. In particolare $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è un ultrafiltro. Notiamo anche che possiamo definire il filtro (in generale non ultra) $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{u \times v \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$ ed estenderlo ad ultrafiltro; uno degli ultrafiltri che lo estende è proprio $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

Proposizione 9.4. $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è un semigruppo topologico destro, cioè:

1. è associativo
2. per ogni $\mathcal{V}$ la mappa $\psi_{\mathcal{V}} \colon \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ definita come $\psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è continua[21].

Dimostrazione. 2. Dato un aperto di base $\mathcal{O}_A$ abbiamo

$$\mathcal{U} \in \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{O}_A) \Leftrightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \underbrace{\{n \mid A - n \in \mathcal{V}\}}_{=\hat{A}} \in \mathcal{U}$$

cioè $\psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{O}_A) = \mathcal{O}_{\hat{A}}$.

□

Teorema 9.5 (Glazer)**.** Se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, allora dimostro il

[21] Quella dall'altro lato no, vedremo in seguito.

Teorema 9.6 (Hindman)**.** Se $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ $\exists X$ infinito, $\exists i$ tale che $\mathrm{Fs}(X) = \{\sum_F X \mid F \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)\} \subseteq C_i$.

L'osservazione di Glazer, da cui Hindman segue gratis, è che se $A \in \mathcal{U}$, con $\mathcal{U}$ idempotente, allora A è *A-large* (*additivamente grande*), cioè $\exists X$ infinito tale che $\mathrm{Fs}(X) \subseteq A$. Dimostriamolo:

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ allora[22] $\hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Prendiamo ora $B = A \cap \hat{A} \in \mathcal{U}$. Fissato $b \in B$ abbiamo che $B - b = (A \cap \hat{A}) - b = (A - b) \cap (\hat{A} - b)$, e dato che $b \in \hat{A}$ vale $A - b \in \mathcal{U}$, e di conseguenza anche $\hat{A} - b = \widehat{A - b} \in \mathcal{U}$, per cui $\forall b \in B$ $B - b \in \mathcal{U}$.

Ora costruiamo $X \subset B \subset A$. Presi $b_1 \in B$ e $b_2 > b_1 \in B \cap (B - b_1) \in \mathcal{U}$ abbiamo che $b_1, b_2, b_1 + b_2 \in B$. Poi prendo $b_3 > b_2$ con

$$b_3 \in B \cap (B - b_1) \cap (B - b_2) \cap (B - (b_1 + b_2)) \in \mathcal{U}$$

e b_1, b_2, b_3 e qualsiasi loro somma finita stanno in B. Ricorsivamente definiamo $X_1 = \{b_1\}$ e $X_{n+1} = X_n \cup \{b_{n+1}\}$, dove scegliamo

$$b_{n+1} \in \bigcap_{F \in \mathscr{P}(X_n)} \left(B - \sum F\right)$$

□

Vedremo che l'esistenza di idempotenti è gratis per qualunque semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff.

10 24/10

10.1 Esistenza di idempotenti

Curiosità: la dimostrazione è nata dall'incontro di Glazer e Galvin che avevano dimostrato le due parti separatamente.

Esercizio 10.1. Dimostrare che $\theta_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è contiua se $\mathcal{U}$ non è principale.

Dimostrazione. [23] Dato che il centro[24] di $\beta\mathbb{N}$ è $\mathbb{N}$, possiamo trovare $\mathcal{V}$ che non commuta con $\mathcal{U}$. Siano X, Y intorni disgiunti di $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ rispettivamente. Se per assurdo $\theta_{\mathcal{U}}$ fosse continua, allora sia $\psi_{\mathcal{U}}^{-1}(Y)$ che $\theta_{\mathcal{U}}^{-1}(X)$ sarebbero intorni di $\mathcal{V}$, ed esisterebbe $\sqcup_n \in \theta_{\mathcal{U}}^{-1}(X) \cap \psi_{\mathcal{U}}^{-1}(Y)$. Ma quindi $X \ni \theta_{\mathcal{U}}(\sqcup_n) = \mathcal{U} \oplus \sqcup_n = \sqcup_n \oplus \mathcal{U} = \psi_{\mathcal{U}}(\sqcup_n) \in Y$, contro $X \cap Y = \emptyset$. □

[22] Per questo motivo gli idempotenti si chiamano anche *almost-traslation invariant.*

[23] Soluzione che in realtà non funziona perché $\beta\mathbb{N}$ non è a base numerabile: se per assurdo fosse continua, prendo $\mathcal{V} = \lim_k \sqcup_{n_k}$ (questo è il passaggio sbagliato). Allora avrei $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \lim \sqcup_{n_k} = \lim \mathcal{U} \oplus \sqcup_{n_k} = \lim(\sqcup_{n_k} \oplus \mathcal{U}) = (\lim \sqcup_{n_k}) \oplus \mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, assurdo perché il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ sono i principali.

[24] Vedi più avanti.

Teorema 10.2 (Ellis)**.** Ogni $(X, *)$ semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff ha idempotenti.

Questa è sostanzialmente l'unica dimostrazione conosciuta di esistenza di ultrafiltri idempotenti.

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{C} = \{C \subset X \mid \emptyset \neq C \text{ chiuso}, C * C \subseteq C\}$. Questa famiglia è non vuota perché contiene X, e verifica le ipotesi del Lemma di Zorn (con l'inclusione a rovescio) perché l'intersezione di una catena di chiusi è non vuota in quanto X è compatto[25]. Siano dunque C suo elemento minimale e $x \in C$. Abbiamo $C * x \in \mathcal{C}$, perché

1. $C * x = \psi_x(C)$ è compatto perché immagine continua di un compatto, e quindi è chiuso perché X è di Hausdorff.

2. $(C * x) * (C * x) \subseteq C * (C * x) \subseteq (C * C) * x \subseteq C * x$

E dato che $C * x \subseteq C * C \subseteq C$ per minimalità si ha $C * x = C$ e, in particolare $D = \{y \in C \mid y * x = x\} \neq \emptyset$. Siccome siamo in un Hausdorff $\{x\}$ è chiuso, quindi è chiuso anche $D = \psi_x^{-1}(\{x\}) \cap C$, e $D * D \subseteq D$ perché se $y, y' \in D$, si ha $(y * y') * x = y * (y' * x) = y * x = x$ e quindi $y * y' \in D$. Di nuovo per minimalità, $D = C$ e in particolare $x \in D$, cioè $x * x = x$. Questo prova la tesi ma c'è di più: $C = \{x\}$ per minimalità di C, visto che $\{x\} \in \mathcal{C}$. □

Tutte le proprietà topologiche (magari tranne la separabilità) che abbiamo dimostrato di $\beta\mathbb{N}$ sono nelle ipotesi di questo teorema. Che culo. Notiamo che per noi $\mathbb{N}$ parte da 1, altrimenti l'elemento idempotente sarebbe 0 e sono problemi (verrebbe principale).

Esercizio 10.3. $\oplus$ estende l'usuale somma sui naturali, nel senso che $\sqcup_n \oplus \sqcup_m = \sqcup_{m+n}$.

Esercizio 10.4. $\oplus$ non è commutativa.

Esercizio 10.5 (difficile, ma fattibile)**.** Il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è l'insieme degli ultrafiltri principali.

Dimostrazione. Che $\mathbb{N}$ sia incluso nel centro è una verifica. Definiamo

$$\begin{aligned} X =& \{(2^{2k}, 2^{2k+1}] \mid k \in \mathbb{N}\} \\ Y =& \{\{2^{2k} - k\} \mid k \in \mathbb{N}\} \\ A =& \{(2^{2h}, 2^{2h+1} + h) \mid h \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

[25] Che l'intersezione di una catena verifichi anche l'altra proprietà richiesta agli elementi di $\mathcal{C}$ è immediato.

Sia $\mathcal{U}$ non principale e supponiamo WLOG $X \in \mathcal{U}$. Per ogni ultrafiltro non principale $\mathcal{V}$ si ha $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, perché $\{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} = \mathbb{N}$. Infatti dato $n \in \mathbb{N}$, per ogni k sufficientemente grande vale

$$(2^{2k} - n, 2^{2k+1} + k - n) \supseteq (2^{2k}, 2^{2k+1}]$$

e quindi $A - n \supseteq X \in \mathcal{U}$ a meno di un insieme finito. Se invece $\mathcal{V}$ è un qualunque ultrafiltro non principale che contiene Y, allora $A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, perché $(A - n) \cap Y = A \cap (Y + n)$ è finito e quindi $\{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} = \emptyset$. Infatti nell'intersezione deve valere

$$2^{2h} < 2^{2k} - k + n < 2^{2h+1} + h$$

ma supponendo k, h sufficientemente grandi si deve avere $k > h$ per soddisfare la prima disuguaglianza, ma già $k = h + 1$ vìola la seconda. $\square$

Esercizio 10.6. $A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{V} \Rightarrow A + B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

Esercizio 10.7. Se $\mathcal{U}$ è idempotente, $\forall k \; k \cdot \mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

C'è quest'idea carina che gli ultrafiltri sono "nuovi" naturali. Dare la collezione degli insiemi di naturali che contengono un numero (gli ultrafiltri principali) equivale un po' a dare le proprietà del numero (sotto forma di estensionalità). L'ultrafiltro si comporta bene, nel senso che se un numero non ha una proprietà ha la sua negazione, ecc. Ci torneremo.

10.2 Generalizzazioni del Teorema di Hindman

Teorema 10.8 (Hindman-forte)**.** . Se $A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ è A-large, allora un C_i è A-large.

Dimostrazione. Sia $X = \{x_1 < x_2 \ldots\}$ infinito tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$. Consideriamo $Y_k = \mathrm{FS}(\{x_i\}_{i \geq k})$ e $K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{Y_k}$. Ci basta mostrare che K è un sottosemigruppo chiuso, perché a quel punto è compatto e possiamo usare il Teorema di Ellis (Teorema 10.2) per trovare $\mathcal{U} \in K$ idempotente, e siccome $A \supseteq Y_1 \in \mathcal{U} \in \mathcal{O}_{Y_1}$ la conclusione è immediata. In quanto intersezione di una catena di chiusi in un compatto, K è un chiuso non vuoto. Mostriamo che è chiuso per somme. Se $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in K$, in particolare si ha $Y_k \in \mathcal{U}$ e, per ogni s, $Y_{k+s} \in \mathcal{V}$. Per mostrare che $Y_k \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è sufficiente far vedere che $\{n \mid Y_k - n \in \mathcal{V}\} \supseteq Y_k \in \mathcal{U}$. Ma se $n = \sum_{j=1}^{r} y_{i_j} \in Y_k$, allora $Y_k - n \supseteq Y_{k+i_r} \in \mathcal{V}$. $\square$

Un sottoprodotto di questa dimostrazione è che

Corollario 10.9. Per ogni A A-large esiste $\mathcal{U}$ idempotente con $A \in \mathcal{U}$.

Esercizio 10.10. Dimostrare Hindman forte usando il Teorema di Hindman(Teorema 9.6).

Segue risoluzione di esercizi.

11 26/10

11.1 Altre varianti di Hindman

Esercizio 11.1. Tfae:

1. $\exists \mathcal{W}\, \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$
2. $\forall A \in \mathcal{U}\ \exists n\ (A - n) \in \mathcal{U}$

Esercizio 11.2. Tfae:

1. $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$
2. $\forall A \in \mathcal{U}\ \exists a \in A\ (A - a) \in \mathcal{U}$

Esercizio 11.3 (difficile)**.** Tfae:

1. Teorema di Hindman ($\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists C_i$ A-large)
2. Teorema di Hindman in forma forte (se A è A-large, $\forall A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists C_i$ A-large)
3. Se $\mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esiste[26] $\mathcal{F} = \{F_1 < F_2 < \ldots\} \subseteq \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ tale che ogni unione finita di elementi di $\mathcal{F}$ sta in un fissato C_i.

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 3$. Togliamo lo 0 da $\mathbb{N}$ per comodità, associamo ad $A \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ il naturale[27] $g(A) = \sum_{j\in A} 2^{j-1}$ e coloriamo n con il colore di $g^{-1}(n)$. Per ipotesi esiste X infinito tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq C_i$. Per concludere ci basta trovare una successione di $x_n \in \mathrm{FS}(X)$ tali che, posto k_n il minimo tale che $x_n < 2^{k_n}$, si abbia $2^{k_n} \mid x_{n+1}$, perché allora per costruzione $g^{-1}\left(\sum x_{n_i}\right) = \bigcup g^{-1}(x_{n_i})$. Questa può essere agilmente costruita ricorsivamente partendo da $x_1 = \min X$ perché X deve avere infiniti elementi con la stessa classe di resto modulo 2^{k_n}, e sommarne 2^{k_n} restituisce un elemento di $\mathrm{FS}(X)$ che ha resto 0.

$3 \Rightarrow 2$ Sia $\mathrm{FS}(X) \subseteq A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, e supponiamo wlog $\mathrm{FS}(X) = A$. Coloriamo $Y \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(X)$ con il colore di $\sum_{m\in Y} m$, e per ipotesi esiste $\mathcal{F} = \{F_1 < F_2 < \ldots\}$ le cui unioni finite sono incluse in C_i. Se $Z = \{\sum_{m\in F_j} m \mid j \in \mathbb{N}\}$ per com'è definita la colorazione[28] $\mathrm{FS}(Z) \subseteq C_i$.

$2 \Rightarrow 1$ è ovvio.

□

[26] Con $F_1 < F_2 \ldots$ si intende $\max F_n < \min F_{n+1}$.

[27] Intuitivamente stiamo leggendo la funzione caratteristica al contrario come numero binario.

[28] Funziona anche sotto l'ipotesi più debole che gli F_i siano a due a due disgiunti.

Definizione 11.4. L'insieme degli *ultrafiltri di Hindman* è

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U} \; A \text{ è A-large}\}$$

Sappiamo già che tutti gli idempotenti sono di Hindman.

Proposizione 11.5.
1. $\mathcal{H}$ è chiuso in $\beta\mathbb{N}$
2. $\overline{\text{Idem}} = \mathcal{H}$

Dimostrazione.
1. $\mathcal{V} \notin \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V}$ non A-large. Allora $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{H} = \emptyset$
2. Dal punto precedente abbiamo l'inclusione $\subseteq$. D'altro canto se $\mathcal{U} \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ allora A è A-large, e quindi esiste $\mathcal{V}$ idempotente con $A \in \mathcal{V}$ per il Corollario 10.9, per cui $\mathcal{V} \in \text{Idem} \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$ e $\mathcal{U} \in \overline{\text{Idem}}$.

□

Esercizio 11.6 (molto difficile, possibile seminario)**.** Esistono ultrafiltri di Hindman che *non* sono idempotenti.

Esercizio 11.7 (molto difficile)**.** $\mathcal{H}$ non è chiuso per somme.

Definizione 11.8. $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, dove $A/n = \{m \mid mn \in \mathcal{A}\}$

Un po' di proprietà del $\odot$:

1. $\mathcal{U} \odot \mathcal{V} = P_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, dove $P(n, m) = nm$ è la funzione prodotto.
2. $\odot$ è associativo.
3. $\varphi_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$ è continua per ogni $\mathcal{V}$ (l'altra non è mai continua, a meno che l'ultrafiltro fissato non sia principale).

Anche qui valgono le ipotesi del Teorema di Ellis, il che suggerisce che $\exists \mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U} \Rightarrow \text{FP}(X) = \{\prod F \mid \emptyset \neq F \subset X \text{ finito}\} \subseteq A$, da cui la dimostrazione del

Teorema 11.9 (Hindman moltiplicativo)**.** $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \exists i \; \exists X$ infinito tale che $\text{FP}(X) \subseteq C_i$.

Per discorsi di logica, anche se uso la scelta nel dimostrare questa cosa, il Teorema vale comunque in ZF senza scelta.

Esercizio 11.10. Dimostrare Hindman moltiplicativo forte.

Esercizio 11.11 (molto difficile)**.** $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U} = \sqcup_2$

Con gli ultrafiltri idempotenti si dimostra roba tipo

Teorema 11.12. Un'equazione diofantea lineare è regolare per partizioni se e solo se esiste un sottoinsieme dei coefficienti a somma zero.

Definizione 11.13. $2\mathcal{U} = \sqcup_2 \odot \mathcal{U}$

Proposizione 11.14. $A \in 2\mathcal{U} \Leftrightarrow A/2 \in \mathcal{U}$

Esercizio 11.15 (Van der Waerden "lungo 3")**.** $\mathcal{U}$ idempotente, $A \in 2\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \Rightarrow \exists a, a+d, a+2d \in A$

Oltre la lunghezza 3 sti giochetti non ci sono, il trucco per 3 è scrivere le cose come soluzioni di diofantee del tipo $x + y - 2z = 0$.

Esercizio 11.16. Dimostrare Van der Waerden lungo 3 in modo elementare.

Teorema 11.17 (Hindman add/molt)**.** $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists i, \exists X, Y$ infiniti tali che $\mathrm{FS}(X), \mathrm{FP}(Y) \subseteq C_i$.

Dimostrazione. Il punto chiave è mostrare che $\mathcal{H}$ è un *ideale moltiplicativo sinistro*, cioè $\beta\mathbb{N} \odot \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$. Mostrato questo in particolare è chiuso per prodotti, per cui per Ellis ha un idempotente $\mathcal{V}$ i cui elementi sono tutti moltiplicativamente grandi per idempotenza e additivamente grandi perché $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$. Abbiamo $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Dunque esiste k tale che $A/k \in \mathcal{V} \in \mathcal{H}$, per cui esiste X infinito tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq A/k$. Ma allora[29] $\mathrm{FS}(kX) \subseteq A$. □

Attenzione: non si richiede $X = Y$, anzi

Problema aperto 11.18. È vero che $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esistono a, b, c tali che $a, b, c, a+b, a+c, b+c, ab, bc, ac \in C_i$?

Teorema 11.19 (possibile seminario)**.** Se $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esistono $a, b, a+b, ab \in C_i$.

Esercizio 11.20 (molto difficile)**.** $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$

12 31/10

12.1 Semigruppi topologici

Vogliamo dimostrare Van der Waerden cercando un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A$ è AP-rich.

Notazione 12.1. $(X, *)$ indicherà un semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff.

Definizione 12.1. $I \subseteq X$ è un *ideale sinistro* se assorbe a sinistra, cioè se $X * I \subseteq I$.

[29] $kX = \{kx \mid x \in X\}$.

Abbiamo già visto che un esempio di ideale sinistro in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ è $\mathcal{H}$. Osserviamo che se I è un ideale sinistro (eventualmente improprio), allora comunque scelto x anche $I*x$ è un ideale sinistro (eventualmente improprio). Assumeremo tacitamente che gli ideali siano non vuoti a meno di indicazione contraria.

Proposizione 12.2. I è minimale se e solo se $\forall x \in I\ X * x = I$.

Dimostrazione. $X * x \subseteq X * I \subseteq I$, dunque se I è minimale $X * x = I$. Viceversa se $x \in J \subseteq I$ si ha $I = X * x \subseteq X * J \subseteq J$. □

Corollario 12.3. Ogni ideale sinistro minimale è compatto.

Dimostrazione. Se $x \in I$ allora $I = X * x = \psi_x(X)$, ed è quindi immagine continua di un compatto. □

Da ora "ideale" vorrà dire "ideale sinistro".

Proposizione 12.4. $\forall J$ ideale sinistro, $\exists I \subseteq J$ ideale sinistro minimale.

Dimostrazione. La famiglia $\mathcal{F} = \{I \subseteq J \mid I \neq \emptyset$ è un ideale sinistro chiuso$\}$ è non vuota perché scelto un qualunque $x \in J$ si ha $I = X * x \subseteq J$ e quindi $I = \psi_x(X)$ è compatto in un Hausdorff. Dato che le catene in $\mathcal{F}$ hanno intersezione non vuota per compattezza e perché l'intersezione di ideali è un ideale, siamo nelle ipotesi del Lemma di Zorn. □

Proposizione 12.5. Se I è un ideale minimale, *tutti* (e soli) gli ideali minimali si ottengono da I, cioè J è minimale se e solo se $\exists x\ J = I * x$.

Dimostrazione. Se $x \in J$ minimale allora $I * x \subseteq J \Rightarrow I * x = J$. Viceversa se $\emptyset \neq L \subseteq I * x$ allora l'ideale $\Gamma = \{y \in I \mid y * x \in L\} \subseteq I$ è non vuoto e per minimalità $\Gamma = I$, per cui $I * x \subseteq L$. □

Proposizione 12.6. Se I è un ideale sinistro minimale e J è un ideale bilatero, allora $I \subseteq J$.

Dimostrazione. $I \cap J$ è non vuoto perché $J * I \subseteq I \cap J$. Ma $I \cap J \subseteq I$, per cui per minimalità $I \cap J = I$, cioè $I \subseteq J$. □

Proposizione 12.7. Il più piccolo ideale bilatero è $K = \bigcup\{I \mid I \text{ id. sx min.}\}$.

Dimostrazione. Per la Proposizione precedente K è incluso in ogni ideale bilatero, ed è un ideale sinistro perché unione di ideali sinistri. Inoltre K è un ideale destro perché se $x \in K$ allora $x \in I$ per un qualche I ideale sinistro minimale. Allora $x * y \in I * y$ che è minimale per la Proposizione 12.5 e quindi $x * y \in K$. □

Esercizio 12.8 (difficile, possibile seminario)**.** $K(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ *non* è chiuso.

Esercizio 12.9.

1. Esistono ultrafiltri idempotenti minimali, cioè tali che $\mathcal{U} \in K$ e $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$
2. Se $\mathcal{U}$ è minimale, allora $K = \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$, cioè tutti e soli i minimali hanno la forma $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Stavamo considerando i naturali senza 0, ora ce lo mettiamo.

12.2 Teorema di Van der Waerden

Teorema 12.10. $\forall \mathcal{U} \in K(\beta\mathbb{N}_0, \oplus)$ $\forall A \in \mathcal{U}$ A è AP-rich.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{U} \in K$. Fissato k vogliamo trovare una progressione $\{a + sd \mid 0 \leq s < k,\ d \geq 1\} \in A$. Consideriamo il prodotto topologico $(\beta\mathbb{N}_0)^k = \underbrace{\beta\mathbb{N}_0 \times \cdots \times \beta\mathbb{N}_0}_{k\text{volte}}$ con la somma $\oplus_k$ componente per componente.

Esercizio 12.11. $((\beta\mathbb{N}_0)^k, \oplus_k)$ è un semigruppo topologico destro compatto di Hausdorff.

Vogliamo mostrare che se $\mathcal{U} \in K$ allora[30] $\mathcal{U}^k \in \overline{AP_k}$, dove[31]

$$AP_k = \{(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d) \mid a \in \mathbb{N}_0,\ d \geq 1\} \subseteq \mathbb{N}_0^k \subseteq (\beta\mathbb{N}_0)^k$$

Questo conclude perché allora da $A \in \mathcal{U}$ segue[32] $\mathcal{U}^k \in (\mathcal{O}_A)^k$ e quindi $(\mathcal{O}_A)^k \cap AP_k \neq \emptyset$, il che vuol dire che esistono a e $d \geq 1$ tali che $(\sqcup_a, \sqcup_{a+d}, \ldots, \sqcup_{a+(k-1)d}) \in (\mathcal{O}_A)^k$, cioè $a, a+d, \ldots, a+(k-1)d \in A$.

Esercizio 12.12. $\forall \mathcal{U}\ \mathcal{U}^k \in \overline{\Delta}$, dove $\Delta = \{(a, \ldots, a \mid a) \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0^k$.

Sia $E = \{a, a+d, \ldots, a+(k-1)d \mid a, d \in \mathbb{N}_0\} \supseteq \Delta$ (notiamo che qui stiamo considerando anche le "progressioni aritmetiche" banali, di ragione 0). Consideriamo $\overline{E}$ e il suo sottospazio $\overline{AP_k}$. Abbiamo:

Esercizio 12.13. $\overline{E}$ è un sottosemigruppo di $((\beta\mathbb{N}_0)^k, \oplus_k)$.

Esercizio 12.14. $\overline{AP_k}$ è un ideale bilatero di $\overline{E}$.

Sappiamo che $\mathcal{U}^k \in \overline{\Delta} \subseteq \overline{E}$ e, se mostriamo che $\mathcal{U}^k$ è contenuto in un ideale minimale $\widetilde{I}$, per la Proposizione 12.6 $\mathcal{U}^k \in \overline{AP_k}$, che è la tesi. $\overline{E} \oplus_k \mathcal{U}^k$ è un ideale di $\overline{E}$ e quindi contiene un ideale sinistro minimale $\widetilde{I}$, ma dato che gli ideali sinistri minimali sono compatti possiamo applicare il Teorema di Ellis e trovare un $\vec{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k) \in \widetilde{I}$ idempotente che può essere scritto come $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{W}} \oplus_k \mathcal{U}^k$ perché $\widetilde{I} \subseteq \overline{E} \oplus_k \mathcal{U}^k$. Dato che per ipotesi $\mathcal{U} \in I$ ideale sinistro minimale su ogni componente abbiamo $\mathcal{V}_i = \mathcal{W}_i \oplus \mathcal{U} \in I$, dunque

[30] Con $\mathcal{U}^k$ intendiamo $(\mathcal{U}, \ldots, \mathcal{U})$.
[31] Continuiamo ad identificare n con $\sqcup_n$.
[32] Chiaramente $(\mathcal{O}_A)^k = \mathcal{O}_A \times \ldots \times \mathcal{O}_A$.

per la Proposizione 12.2 $I = \beta\mathbb{N}_0 \oplus \mathcal{V}_i$ e possiamo scrivere $\mathcal{U} = \mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{V}_i$ per un opportuno $\mathcal{Z}_i$. Allora per idempotenza, che passa alle componenti,

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_i = (\mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{V}_i) \oplus \mathcal{V}_i = \mathcal{Z}_i \oplus (\mathcal{V}_i \oplus \mathcal{V}_i) = \mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{V}_i = \mathcal{U}$$

Dunque $\mathcal{U}^k \oplus \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{U}^k$ ma, dato che $\vec{\mathcal{V}} \in \widetilde{I}$ che è un ideale sinistro, $\mathcal{U}^k \in \widetilde{I}$. $\square$

Esercizio 12.15 (difficile, ma anche no)**.** $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, $\exists i$ tale che C_i contiene sia progressioni arimetiche che geometriche arbitrariamente lunghe.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme degli ultrafiltri di Van der Waerden $\mathcal{A} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}, A \text{ è AP-rich}\}$ che, analogamente[33] ad $\mathcal{H}$ è chiuso. $\mathcal{A}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$, infatti dati $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}$, si ha $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e per ipotesi $A/n \in \mathcal{V}$ è AP-rich e quindi lo è anche A perché basta moltiplicare le progressioni di A/n per n. Se $\mathcal{U} \in I \subseteq \mathcal{A}$ ideale minimale di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ ogni elemento di $\mathcal{U}$ è GP-rich perché $\mathcal{U} \in I$ ed è anche AP-rich perché $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. $\square$

Esercizio 12.16. Trovare un insieme A-large che *non* include nessuna progressione aritmetica lunga 3.

Dimostrazione. Prendiamo $X = \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\mathrm{FS}(X)$ sono i numeri che in base 10 hanno solo zeri e uni. Presi $a < b \in X$, è chiaro che $a + 2(b - a) = 2b - a$ ha dei 2 o dei 9 da qualche parte. $\square$

13 07/11

Congettura 13.1. $\sum \frac{1}{a_n} = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ è AP-rich.

13.1 Analisi non standard

Costruiremo una struttura $^*\mathbb{R}$ a cui daremo il nome di chiamata "numeri iperreali". Consideriamo

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}\big/_{\mathfrak{Fr}}$$

dove $\mathfrak{Fr}$ è il filtro di Frechet, cioè le successioni di reali identificate quando coincidono definitivamente. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/_{\mathfrak{Fr}}$ è un anello commutativo parzialmente ordinato secondo

$$[\sigma] \leq [\tau] \Leftrightarrow \{n \mid \sigma(n) \leq \tau(n)\} \in \mathfrak{Fr}$$

(questa costruzione è usata dagli intuizionisti come surrogato dell'assioma di scelta). Questo attrezzo *non* è neanche un dominio, ad esempio l'indicatrice dei pari[34] e quella dei dispari sono non nulle ma hanno prodotto nullo.

[33] Dalla dimostrazione che $\mathcal{H}$ è chiuso è chiaro che lo stesso è vero per tutti gli insiemi del tipo "gli ultrafiltri i cui elementi hanno questa fissata proprietà".

[34] Ad essere precisi "la classe di equivalenza dell' ".

Esercizio 13.2. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ è un campo ordinato.

Dimostrazione (parziale). Un campo $\mathbb{F}$ è ordinato se e solo se esiste $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}$ chiuso per somme e prodotti e tale che $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+ \sqcup \mathbb{F}^- \sqcup \{0\}$, dove $\mathbb{F}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{F}^+\}$. Prendiamo ${}^*\mathbb{R}^+ = \{[\sigma] \mid \sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+\}$. Che è chiuso per somme e prodotti è ovvio, com'è ovvio che ${}^*\mathbb{R}^+, {}^*\mathbb{R}^-, \{0\}$ sono a due a due disgiunti. Resta da vedere che ricoprono ${}^*\mathbb{R}$. Ma se prendiamo $A = \{n \mid \sigma(n) < 0\}, B = \{n \mid \sigma(n) = 0\}, C = \{n \mid \sigma(n) > 0\}$, questi ricoprono $\mathbb{N}$, e quindi uno e uno solo dei tre sta in $\mathcal{U}$, ad esempio A. Ora basta sostituire σ con

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma(n) & \text{se} \quad n \in A \\ 1 & \text{se} \quad n \notin A \end{cases}$$

□

Esercizio 13.3. Completare la dimostrazione.

Definizione 13.4 (Ultrapotenza)**.** Il quoziente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$.

Se $\mathbb{R}$ identificato con le successioni costanti, ${}^*\mathbb{R}$ è un sovracampo ordinato di $\mathbb{R}$.

Esercizio 13.5. $\mathcal{U}$ è principale se e solo se ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

13.2 Infinitesimi

Definizione 13.6. Un *campo superreale* è un sovracampo ordinato dei reali proprio.

Definizione 13.7. $a \in \mathbb{F}$ è *infinitesimo* (si denota con $a \approx 0$) se $\forall n\, |a| < \frac{1}{n}$, cioè se $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$. $a \in \mathbb{F}$ è *infinito* se $\frac{1}{a}$ è infinitesimo, cioè se $\forall n\, |a| > n$. $a \in \mathbb{F}$ è *finito* se non è infinito.

Dunque qui dentro possiamo dire "prendiamo ε infinitesimo" senza nessun abuso di notazione.

Definizione 13.8. $\mathbb{F}$ campo ordinato si dice *archimedeo* se $\forall 0 < x < y\ \exists n \in \mathbb{N}\ x \cdot n > y$.

Dal punto di vista logico questa formula ha un problema *serissimo*: non è una formula del linguaggio dei campi (chi è n?). Dovrei scrivere $x + x > y \vee x + x + x > y \vee \ldots$, che non è una stringa valida in quanto è infinita. Non essendo questa una formula del linguaggio dei campi, è una delle cose che rischiano di saltare passando all'ultrapotenza (e lo farà). Anche l'esistenza del sup (cioè la completezza) salta; infatti dovrei quantificare su sottoinsiemi: è del second'ordine.

Esercizio 13.9. $\mathbb{F}$ campo ordinato. TFAE:

1. $\mathbb{F}$ è archimedeo;

2. 0 è l'unico infinitesimo di $\mathbb{F}$;

3. $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$;

4. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$.

Esercizio 13.10. 1. Superreale $\Rightarrow$ non-archimedeo $\Rightarrow$ non-completo.

2. Archimedeo $\Leftrightarrow$ isomorfo ad un sottocampo di $\mathbb{R}$.

$\mathbb{F}_{\text{finiti}}$ è un sottoanello ordinato locale il cui unico ideale massimale è quello degli infinitesimi, perché sono gli unici elementi non invertibili. Quindi se quoziento ottengo $\mathbb{R}$ (se parto un campo superreale, sennò ottengo comunque un campo archimedeo).

D'ora in avanti $\mathbb{F}$ indicherà un campo superreale.

Definizione 13.11. $\xi \approx \eta$ (diciamo che sono *infinitamente vicini*) se $\eta - \xi$ è infinitesimo.

Proposizione 13.12. $\forall \xi \in \mathbb{F}$ finito $\exists! r \in \mathbb{R}$ tale che $\xi \approx r$. Tale r si dice *parte standard* di ξ e si scrive $r = \text{st}(\xi)$.

Dimostrazione. Basta definire $\text{st}(\xi) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid s > \xi\}$ e fare le verifiche (esercizio). $\square$

Chiramente può capitare che $\text{st}(\xi) < \xi$, ad esempio prendendo $\xi = r + \varepsilon$, con $r \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ infinitesimo, ma comunque $\text{st}(x) \approx x$. È facile vedere che i reali sono discreti dentro ${}^*\mathbb{R}$ con la topologia dell'ordine. Per alcuni è una "maniera di riavvicinare il continuo al discreto".

Esercizio 13.13. Valgono le seguenti:

1. $\xi = [\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$ finito $\Rightarrow \text{st}(\xi) = \mathcal{U} - \lim \sigma(n)$

2. $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = r \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{st}([\sigma]) = r$. Il viceversa non solo non è vero, ma

3. Vale la proprietà che ogni $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimo è la classe di $\mathcal{U}$-equivalenza $\varepsilon = [\sigma]$ di una successione infinitesima (nel senso "classico" $\xrightarrow{n\to+\infty} 0$) se e solo se $\mathcal{U}$ è un P-point[35].

4. Come sopra dove si chiede σ monotona $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ è selettivo.

[35] L'esistenza di P-point è indipendente da ZFC, mentre ultrafiltri che non sono P-point esistono sempre.

Dimostrazione del punto 3. Assumiamo che $\mathcal{U}$ sia P-point. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{i \in \mathbb{N} \mid A_n = \left|\sigma(i) < \frac{1}{n}\right|\} \in \mathcal{U}$. Se $\bigcap A_n \in \mathcal{U}$ allora $[\sigma] = 0$, altrimenti possiamo assumere $\bigcap A_n = \emptyset$ e scrivere, posto $A_0 = \mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \bigcup (A_{n-1} \setminus A_n) = \bigcup B_n$$

I B_n non stanno nell'ultrafiltro ma la loro unione è $\mathbb{N}$. Per la proprietà di P-point esiste $C \in \mathcal{U}$ tale che $|C \cap B_n|$ è finito. Ora $\{i \in C \mid \sigma(i) \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_{k \leq n} B_k \cap C$ è finito, e basta estendere questa successione a 0 fuori da C.

Viceversa consideriamo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $A_n \notin \mathcal{U}$ WLOG a due a due disgiunti e $\bigcup A_n = \mathbb{N}$. Definiamo $\sigma(i) = \frac{1}{n}$ se $i \in A_n$ e abbiamo

$$\left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sigma(i) \geq \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \notin \mathcal{U}$$

dunque $[\sigma]$ è infinitesimo, e per ipotesi esiste $\sigma' \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ tale che $\lim_{n\to\infty} \sigma'(n) = 0$. Se $C = \{i \mid \sigma(i) = \sigma'(i)\} \in \mathcal{U}$, per ogni n l'insieme $A_n \cap C$ è finito perché σ' è definitivamente minore di $\frac{1}{n}$. $\square$

14 09/11

14.1 Transfer

Principio di transfer: ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si estende in modo canonico ad un sottoinsieme ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ e ad una funzione ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ in modo che le estensioni soddisfano le stesse "proprietà elementari" (in un senso che si può precisare bene, cioè nel senso che sono formule del prim'ordine in un certo linguaggio). Ci sono campi superreali dove succedono cose brutte, ad esempio ci sono numeri positivi che non hanno radice quadrata.

Definizione 14.1. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, definiamo

$${}^*A = {A^{\mathbb{N}}}/{\mathcal{U}} = \{[\sigma] \mid \sigma\colon \mathbb{N} \to A\}$$

Osserviamo che $A \subseteq {}^*A$. Insiemi a cui viene naturale pensare sono ${}^*\mathbb{N}$ (ipernaturali), ${}^*\mathbb{Z}$(iperinteri), ${}^*\mathbb{Q}$ (iperrazionali).

Esercizio 14.2. Dimostrare che

1. A è finito se e solo se ${}^*A = A$;
2. ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$; (questa varrebbe anche su un filtro)
3. ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$;
4. ${}^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$.

Esercizio 14.3. Dimostrare che

1. Ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ è infinito, cioè $\forall n\ \nu > n$;
2. Ogni $\nu \in {}^*\mathbb{Z}$ ha successore (cioè $\exists \eta \in {}^*\mathbb{Z}\ \eta > \nu$ e $\forall \zeta \in {}^*\mathbb{Z}\ \zeta > \nu \Rightarrow \zeta \geq \eta$);
3. Ogni $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ ha parte iperintera;
4. ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{R} \setminus {}^*\mathbb{Q}$ sono densi in ${}^*\mathbb{R}$;
5. $\forall \xi \in {}^*\mathbb{R}\ \exists \eta \in {}^*\mathbb{Q} \exists \eta' \in {}^*\mathbb{R} \setminus {}^*\mathbb{Q} \quad \xi \approx \eta,\ \xi \approx \eta'$.

Se avessimo dimostrato il principio di transfer sarebbe gratis praticamente tutta la roba sopra. Occhio che il transfer qualcosa la fa saltare. Ad esempio la proprietà archimedea

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ 0 < x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ n \cdot x > y$$

diventa

$$\forall \xi, \eta \in {}^*\mathbb{R}\ 0 < \xi < \eta \Rightarrow \exists \nu \in {}^*\mathbb{N}\ \nu \cdot \xi > \eta$$

che *non* è la proprietà archimedea, visto garantisce solo l'esistenza di un ipernaturale, magari infinito. Per le funzioni, data $f\colon A \to B$ e $[\sigma] \in {}^*A$ si ha ${}^*f([\sigma]) = [f \circ \sigma]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f \circ \sigma"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Esercizio 14.4. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow \forall \nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito $a_\nu = {}^*a(\nu) \approx \ell$

Esempio 14.5. Dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Prendo ν infinito. Usando il transfer su $\forall n \in \mathbb{N}\ \sqrt[n]{n} > 1$ possiamo scrivere $\sqrt[\nu]{\nu} = 1 + \delta$ con $\delta > 0$.

$$\nu = (1+\delta)^\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \delta^i > \binom{\nu}{2} \delta^2 = \frac{\nu(\nu-1)}{2} \delta^2$$

$$\delta < \sqrt{\frac{2}{\nu - 1}} \approx 0 \qquad \delta \approx \nu \Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu} \approx 1$$

Definizione 14.6. Un campo superreale $\mathbb{F}$ è un insieme di numeri *iperreali* se è un'immagine omomorfa dell'anello $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tramite un omomorfismo che manda le successioni costanti nella relativa costante.

Esercizio 14.7. Mostrare che è equivalente ad essere un'ultrapotenza.

Esercizio 14.8. $\mathbb{F} = {}^*\mathbb{Q}_{\text{fin}} \big/ _{\text{infinitesimi}} \cong \mathbb{R}$, cioè è un campo ordinato completo.

La parte non banale è immergerci $\mathbb{R}$.

15 16/11

15.1 Caratterizzazioni non-standard

Definizione 15.1. f è *continua* in x_0 se $\forall \varepsilon \approx 0\ {}^*f(x_0+\varepsilon) \approx {}^*f(x_0)$.

Definizione 15.2. $f\colon A \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* se

$$\forall \xi \approx \eta \in {}^*A \quad {}^*f(\xi) \approx {}^*f(\eta)$$

Esercizio 15.3. Verificare che le definizioni date sono equivalenti a quelle usuali.

Esempio 15.4. $f(x) = x^2$ è continua in ogni punto perché ${}^*f(x_0+\varepsilon) = (x_0+\varepsilon)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 \approx x_0^2 = {}^*f(x_0)$. Non è uniformemente continua e si vede calcolandola in Ω infinito e $\eta = \Omega + \frac{1}{\Omega}$.

Definizione 15.5. f localmente limitata in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

Esercizio 15.6. Dimostrare che f è localmente limitata in ogni punto se e solo se $\forall \xi$ finito ${}^*f(\xi)$ è finito.

Teorema 15.7 (Heine-Cantor)**.** Se f è continua su $[a, b]$, è uniformemente continua.

Dimostrazione. Prendiamo $\xi \approx \eta \in {}^*[a, b]$. $\mathrm{st}(\xi) = \mathrm{st}(\eta) = x$ perché $\mathrm{st}(\xi) \approx \xi \approx \eta \approx \mathrm{st}(\eta)$, e dato che gli estremi sono reali ed infinitamente vicini coincidono. Questo lo posso fare perché l'intervallo è limitato (gli infiniti non hanno parte standard). Inoltre $x \in [a, b]$ per chiusura[36]. Per continuità in x si ha ${}^*f(\xi) \approx f(x) \approx {}^*f(\eta)$. □

Esercizio 15.8. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha $\sup A = \ell$ se e solo se

1. $\forall a \in A\ a \leq \ell$;
2. $\exists \alpha \in {}^*A \quad \mathrm{st}(\alpha) = \ell$ (con la convenzione che se α è infinito $\mathrm{st}(\alpha) = \infty$).

Esercizio 15.9. Dimostrare il Teorema di Weierstrass (ogni funzione continua su un compatto ha massimo e minimo).

Definizione 15.10. f è *derivabile* in x_0 se $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall 0 \neq \varepsilon \approx 0\ \frac{{}^*f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx f'(x_0)$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon \approx 0\ \exists \tau \approx 0 \quad {}^*f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon \cdot f'(x_0) + \varepsilon \cdot \tau$$

[36] Basta ricordare la definizione di parte standard.

Teorema 15.11 (Regola della catena)**.** $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Possiamo assumere che esista un infinitesimo ε tale che ${}^*f(x_0+\varepsilon) \neq {}^*f(x_0)$, altrimenti f è localmente costante e la tesi vale. Per evitare di riempire la pagina di asterischi abusiamo la notazione e indichiamo ${}^*f$, ${}^*g$ con f, g.

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{\varepsilon} = \frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0)}{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$
$$\approx g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

15.2 Insiemi interni

Definizione 15.12. $A \subseteq {}^*\mathbb{R} = {}^{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$ è *interno* se esiste una successione $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tale che $[\varphi] \in A \Leftrightarrow \{n \mid \varphi(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}$.

Moralmente gli insiemi interni sono ${}^{\mathscr{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$, cioè quelli che "provengono" da sottoinsiemi di reali (non tutti i sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{R}$ sono di questa forma). I sottoinsiemi interni hanno un sacco di proprietà "buone" che in generale si perdono. Ad esempio, mentre insiemi come quello degli ipernaturali infiniti $\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ non hanno minimo, si ha

Proposizione 15.13. $\forall \emptyset \neq A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interno $\exists \min A$.

Dimostrazione. $A \sim \langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ successione di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. $\nu = [\varphi]$ dove $\varphi(n) = \min A_n$ è il minimo di A. □

Esempio 15.14. Dati $\xi < \eta \in {}^*\mathbb{R}$, $(\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}} = \{\zeta \in {}^*\mathbb{R} \mid \xi < \zeta < \eta\} \subset {}^*\mathbb{R}$ è interno.

Dimostrazione. Se $\xi = [\varphi]$ e $\eta = [\psi]$ poniamo $A_n = \big(\varphi(n), \psi(n)\big)$ (a meno di modificare φ e ψ su un insieme di punti fuori da $\mathcal{U}$). Basta quindi verificare (verifica sorvolata) che $\mathcal{U}$-quasi ovunque vale

$$(\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}} = \{[\tau] \mid \varphi(n) < \tau(n) < \psi(n)\}$$

e quindi $\tau(n) \in A_n$. □

Esercizio 15.15. Se A, B sono interni, allora sono interni anche $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$, ma *non* lo è $\mathscr{P}(A)$ (per le parti si andrebbe al terz'ordine, quindi lasciamo stare).

Nota: ${}^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$.

Esercizio 15.16 (banale, ma importante)**.** Se $X \subseteq \mathbb{R}$, allora ${}^*X$ è interno.

Definizione 15.17. Un insieme *iperfinito* è un insieme che "proviene" (nel senso sopra specificato) da una successione di insiemi finiti.

Definizione 15.18. La *cardinalità interna* di A iperfinito è $[\{|A_n|\}] \in {}^*\mathbb{N}$.

Supponiamo di avere degli $A \subseteq \mathbb{N}$. Una maniera di "misurarne" la grandezza è la densità asintotica, che ha i suoi pregi e i suoi difetti. Un'altra maniera è fissare $\nu \in \mathbb{N}_\infty$ e definire

$$m_\nu(a) = \operatorname{st}\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]_{^*\mathbb{N}}|}{\nu}\right) \in [0,1]_\mathbb{R}$$

Questa si comporta bene per unione disgiunta (cioè $m_\nu(A \sqcup B) = m_\nu(A) + m_\nu(B)$) ed è invariante per traslazioni.

Esercizio 15.19 (tosto)**.** Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ iperfinito. Allora se A non è finito, $|A| \geq \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Vedi Esercizio 18.9. □

16 21/11

16.1 Esercizi di analisi non-standard

Esercizio 16.1. Mostrare con l'analisi non standard che f è continua su tutti e soli gli irrazionali, dove

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \quad\text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 16.2. La S-topologia su ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^\mathbb{N}}\!/_{\mathcal{U}}$ è quella la cui base di aperti è $\{{}^*A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. Mostrare che la S-topologia è di Hausdorff se e solo se lo è $\mathcal{U}$, cioè se e solo se $\forall f, g\ f^*(\mathcal{U}) = g^*(\mathcal{U}) \Rightarrow f \equiv_\mathcal{U} g$.

Dimostrazione. Siano $a = [\varphi], b = [\psi] \in {}^*\mathbb{N}$. La S-topologia è di Hausdorff se e solo se $\exists A, B \subseteq \mathbb{N}$ tali che $a \in {}^*A, b \in {}^*B$ e ${}^*A \cap {}^*B = {}^*(A \cap B) = \emptyset$. Tuttavia $a \in {}^*A \Leftrightarrow \{n \mid \varphi(n) \in A\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{U} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \in \varphi(\mathcal{U})$ e similmente per B. $\exists A, B$ disgiunti e tali che $a \in {}^*A, b \in {}^*B$ se e solo se esistono A, B disgiunti $A \in \varphi(\mathcal{U}), B \in \psi(\mathcal{U})$, se e solo se $\varphi(\mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{U})$ se e solo se $\mathcal{U}$ è di Hausdorff. □

Esercizio 16.3. $\mathbb{F}$ ordinato è isomorfo a $\mathbb{R}$ se e solo se $\forall \xi \in \mathbb{F}^*$ finito $\exists x \in \mathbb{F}$ tale che $x \approx \xi$.

Dimostrazione. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione strettamente crescende e limitata in $\mathbb{F}$. Dato che è limitata $[x_n] \in {}^*\mathbb{F}_{\text{fin}}$. Prendiamo la "parte standard" s di $[x_n]$ assicurata dalle ipotesi. Se questa non fosse un maggiorante degli x_n, dato che questa è strettamente crescente, $s - [x_n]$ non sarebbe un di infinitesimo ${}^*\mathbb{F}$. Similmente se non fosse il minimo dei maggioranti. Dunque le successioni limitate di elementi di $\mathbb{F}$ hanno limite. Se $\mathbb{F}$ non fosse archimedo conterebbe un infinitesimo $\varepsilon \neq 0$. Allora sia $[\varepsilon]$ che $[2\varepsilon]$ sarebbero infinitamente vicini a $\left[\frac{1}{n}\right]$, che quindi non avrebbe inf. Ma un campo archimedeo completo per successioni è completo[37]. $\square$

Esercizio 16.4. $\operatorname{cof}({}^*\mathbb{N}) > \aleph_0$ e $\operatorname{coin}(\mathbb{N}_\infty) > \aleph_0$.

Dimostrazione. Se φ_k è illimitata superiormente basta prendere $\psi(n) = \max\{\varphi_1(n), \ldots, \varphi(n)_n\} + 1$ e $\forall n > k\ \psi(n) > \varphi_k(n)$. Per la coinizialità supponiamo che φ_k sia illimitata inferiormente. Sia $A_n = \{i \mid \forall k \leq n\ \varphi_k(i) \geq n\} \in \mathcal{U}$. Se $i \in \bigcap A_n$ allora $\forall n\ \varphi_1(i) \geq n$, quindi l'intersezione è vuota e possiamo definire $f(i)$ come il massimo n tale che $i \in A_n$. Allora $[f] \in \mathbb{N}_\infty$ perché $\{i \mid f(i) \geq n\} = A_n \in \mathcal{U}$, e dato che per $k \geq n$ si ha che su $A_k \setminus A_{k+1}$ vale $\varphi_n(i) \geq k = f(i)$ abbiamo $\{i \mid f(i) \leq \varphi_n(i)\} \supseteq A_n$, per cui $f - 1$ è un infinito minore di tutte le φ_n. $\square$

Domanda: $(\text{Infinitesimi}, <) \overset{?}{\cong} ({}^*\mathbb{R}, <)$. Risposta: di solito no, ma a volte sì.

$\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$ non è interno, infatti dato che gli interni sono stabili per differenza sarebbe interno anche ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{N}_\infty$ che non lo è poiché non ha minimo. Gli infinitesimi non sono interni (sono esterni). Infatti ogni interno limitato dall'alto ha sup, e gli infinitesimi non ce l'hanno. Analogamente ${}^*\mathbb{R}_{\text{fin}}$ è esterno. Esempi di insiemi interni sono $[\xi, \eta]_{{}^*\mathbb{R}}$ e $[\nu, \mu]_{{}^*\mathbb{N}}$. A interno infinito ha almeno la cardinalità del continuo (vedi Esercizio 18.9).

16.2 Overspill (overflow) e underspill (underflow)

Notazione 16.1. $[a, b]_{{}^*\mathbb{N}} = [a, b] \cap {}^*\mathbb{N}$.

Teorema 16.5 (Overspill)**.** Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interno. Se A contiene numeri finiti arbitrariamente grandi (ossia $A \cap \mathbb{N}$ è infinito), allora $\exists \nu \in A$ infiniti.

Dimostrazione. Se per assurdo esistesse A interno senza infiniti tale che $A \cap \mathbb{N}$ è infinito, sia

$$B = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} \mid \exists a \in A\ \xi \leq a\} = \bigcup_{a \in A} [0, a]_{{}^*\mathbb{N}}$$

Per questioni di logica B è interno poiché A lo è e B è descritto in termini di A con una formula "buona". Tuttavia, per com'è fatto A, $B = \mathbb{N}$, che abbiamo visto essere esterno. $\square$

Si può dimostrare anche usando il fatto che A è infinito, dunque $|A| \geq \mathfrak{c}$. I seguenti esercizi sono forme alternative:

[37] $\sup A$ può essere ottenuto come limite della successione ottenuta prendendo a_1 un maggiorante di A che disti da questo meno di 1, $a_2 = a_1 - 1$, come a_3 il loro punto medio, come a_4 il punto medio fra a_3 e "quello dalla parte giusta" (cioè a_2 se è un maggiorante, a_1 altrimenti)...

Esercizio 16.6 (Underspill)**.** Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e contiene numeri infiniti arbitrariamente piccoli, allora A contiene anche numeri finiti ($A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$).

Esercizio 16.7 (Overspill)**.** Se A è interno e $\mathbb{N} \subseteq A$, allora $\exists \nu$ infinito tale che $[0, \nu) \subseteq A$.

Esercizio 16.8 (Underspill)**.** Se A è interno e $[\nu, \infty)_{^*\mathbb{N}} \subseteq A$ per ogni ν infinito, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, +\infty)_{^*\mathbb{N}} \subseteq A$.

16.3 Teoria combinatoria dei numeri

Definizione 16.9. La *densità asintotica* di un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è (se esiste)

$$d(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \tag{1}$$

se non esiste in genere si considera la *densità asintotica superiore*

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \tag{2}$$

Vediamo qualche proprietà della densità asintotica superiore:

1. $\bar{d}$ è invariante per traslazioni;
2. Se $A \cap B = \emptyset$ ed esiste una fra $d(A)$ e $d(B)$, allora $\bar{d}(A \cup B) = \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$. In generale è vero solo che $\bar{d}(A \cup B) \leq \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$.

Teorema 16.10. $\bar{d}(A) > 0 \Rightarrow A - A$ è *sindetico*, cioè

Definizione 16.11. $B \subseteq \mathbb{N}$ è *sindetico* se esiste un naturale k, detto *tempo di attesa*, tale che $\forall x \ [x, x+k) \cap B \neq \emptyset$, cioè ogni intervallo lungo k interseca B.

La nozione duale di sindetico è

Definizione 16.12. $B \subseteq \mathbb{N}$ è *spesso* se include intervalli arbitrariamente lunghi, cioè $\forall k \exists x \ [x, x+k) \subseteq B$.

È duale nel senso che

Proposizione 16.13. A è sindetico se e solo se A^c non è spesso, se e solo se esiste $F \subset \mathbb{N}_0$ finito tale che $A + F = [n, +\infty)$.

Esercizio 16.14. Se B è spesso, allora è A-large e AP-rich.

Esercizio 16.15. Se B è sindetico è AP-rich.

Dimostriamo ora un risultato da cui il Teorema 16.10 segue come corollario.

Definizione 16.16. Un Δ^*-set è un insieme che interseca ogni Δ-set. Equivalentemente, per ogni X infinito interseca $X - X$.

Teorema 16.17. Se $\bar{d} > 0$, allora $A - A$ è un Δ^*-set.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che per ogni $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\}$ infinito $(A - A) \cap (X - X) \neq \emptyset$. Se riusciamo a far vedere che due traslati $A + x_1$ e $A + x_2$ si intersecano allora da $a + x_1 = a' + x_2$ abbiamo $a - a' = x_2 - x_1$. Dato che $\bar{d}$ è invariante per traslazioni, da $\bar{d}(A + x_i) = \bar{d}(A) = \alpha > \frac{1}{k}$ otterremmo che k degli $A + x_i$ devono per forza intersecarsi *se $\bar{d}$ fosse finitamente additiva*, cosa che purtroppo è falsa. Questa idea può comunque essere portata in fondo aggirando il problema via analisi non standard tramite il seguente

Esercizio 16.18. $\limsup a_n = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \max\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in \mathbb{N}_\infty\}$

Basta dunque prendere $N \in \mathbb{N}_\infty$ tale che $a_N = \frac{|{}^*A \cap [1,N]|}{N} \approx \alpha$. Abbiamo anche $\frac{|({}^*A + x_i) \cap [1,N]|}{N} \approx \alpha$. Ma quindi $\sum_{s=1}^{k} \frac{|({}^*A + x_s) \cap [1,N]|}{N} \approx k \cdot \alpha > 1$. □

Grazie all'analisi non standard abbiamo usato sostanzialmente il pidgeonhole, mentre se parliamo solo di densità bisogna andarci un attimino più cauti. I limiti sono rimpiazzati dalla parte standard. Ora per mostrare il Teorema 16.10 è sufficiente mostrare che

Esercizio 16.19. Se B è un Δ^*-set, allora è sindetico.

Dimostrazione. Gli spessi sono A-large e quindi Δ-set (vedi Esercizio 19.5). Se B non fosse sindetico il suo complementare sarebbe spesso, quindi un Δ-set, e quindi dovrebbe intersecarlo. □

Esercizio 16.20. Se A è sindetico, allora $\bar{d}(A) > 0$

Esercizio 16.21. Esistono insiemi A tali che $\underline{d}(A) = 0$ e $\bar{d}(A) = 1$.

Esercizio 16.22. $\bar{d}(A) > 0 \not\Rightarrow A$ sindetico

Dimostrazione (di 16.21 e 16.22). Consideriamo $\mathfrak{X} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{2^{2^n}}, 2^{2^{2^{n+1}}})$. $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^c$ sono spessi e non sono sindetici. $\bar{d}(\mathfrak{X}) = 1$, $\underline{d}(\mathfrak{X}) = 0$, e la stessa cosa vale per $\mathfrak{X}^c$ e questo mostra che non è vero che ogni insieme con $\bar{d} > 0$ è sindetico. □

Esercizio 16.23. $\underline{d}(A) = \alpha \Rightarrow \exists B \subseteq A\ d(B) = \alpha$

Esercizio 16.24. Gli spessi e i sindetici *non* sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. Per gli spessi basta spezzare $\mathbb{N}$ in pari e dispari, mentre per i sindetici basta spezzare con $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{X}^c$ dell'Esercizio 16.21. □

Definizione 16.25. A è *sindetico a tratti* se e solo se $A = B \cap C$ con B spesso e C sindetico, se e solo se $\exists k$ ed esistono intervalli I arbitrariamente lunghi tali che $I \cap A$ ha solo buchi di cardinalità $\leq k$.

Esercizio 16.26. [molto difficile] I sindetici a tratti (cioè intersezione di un sindetico e di uno spesso) sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. Segue dal prossimo Esercizio e dal Teorema 20.2. □

Esercizio 16.27. Se $\mathcal{U} \in L$ ideale sinistro minimale ogni $A \in \mathcal{U}$ è sindetico a tratti.

Dimostrazione. Abbiamo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A-n} \supseteq L$, perché $\forall \mathcal{V} \in L$ $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} = L$, dunque esiste $\mathcal{W}$ per cui $A \in \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$, cioè $\mathcal{W} \ni \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \neq \emptyset$. Dato che gli ideali minimali sono compatti abbiamo $L \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{A-n_i}$, e basta dimostrare [38] che $C = \bigcup_{i=1}^{k} A - n_i$ è spesso. Per minimalità abbiamo $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} = L \subseteq \mathcal{O}_C$, e in particolare $\forall n$ $C \in \sqcup_n \oplus \mathcal{U}$, cioè $\forall n$ $C - n \in \mathcal{U}$. Dunque la famiglia $\{C - n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha la FIP perché inclusa in $\mathcal{U}$ e per ogni $M \in \mathbb{N}$ esiste $t \in \bigcap_{n=1}^{M} C - n$, per cui $[t+1, t+M] \subseteq C$. □

Abbiamo visto che se $\{C-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP, allora C è spesso. In realtà vale anche il viceversa. Spoiler: A è sindetico se e solo se ${}^*A$ ha solo buchi finiti (se fossero arbitrariamente grandi per overspill ce ne sarebbe uno infinito).

17 23/11

Risoluzione di esercizi.

Definizione 17.1. $A \subseteq \mathbb{Z}$ è k-sindetico se vale una delle seguenti condizioni equivalenti

- Esiste g tale che per ogni I intervallo $|I| = k \Rightarrow I \cap A \neq \emptyset$
- Esiste F tale che $A + F = \mathbb{Z}$ e $|F| = k$.

Esercizio 17.2. Se A è k-sindetico $\underline{d}(A) \geq \frac{1}{k}$.

Dimostrazione. Si ha $\underline{d}(A \sqcup B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$ perché, usando l'analogo dell'Esercizio 16.18

$$\begin{aligned}\underline{d}(A \sqcup B) \approx& \frac{|{}^*(A \cup B) \cap [1, N]|}{N} = \frac{|{}^*A \cap [1, N]|}{N} + \frac{|{}^*B \cap [1, N]|}{N} \\ \geq& \frac{|{}^*A \cap [1, N_A]|}{N_A} + \frac{|{}^*B \cap [1, N_B]|}{N_B}\end{aligned}$$

e testare $\underline{d}(A)$ su N_A (similmente per B) fornisce un risultato maggiore che quello che la realizza, cioè che minimizza quella quantità. Ora prendiamo $F = \{n_1, \ldots, n_k\}$ $A + F = [m, +\infty)$, e consideriamo $B_i = (A + n_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. Abbiamo $\underline{d}(A) = \underline{d}(A + n_i) \geq \underline{d}(B_i)$, e siccome $\underline{d}\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} B_i\right) = 1$ deve per forza essere $\underline{d}(A) \geq \frac{1}{k}$. □

[38] Che un insieme è sindetico a tratti se e solo se un'unione finita di suoi traslati è spessa segue dalle definizioni.

18 28/11

18.1 Esercizi vari

Esercizio 18.1. Se $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di sottoinsiemi con la FIP, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*A_n \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Per ogni n scegliamo $\sigma(n) \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Allora $[\sigma] \in \bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$ perché per ogni k abbiamo $\{n \mid \sigma(n) \in A_k\} \supseteq [k, \infty) \in \mathcal{U}$. □

C'è un'altra dimostrazione fatta con l'overspill, non trascritta.

Esercizio 18.2 (Saturazione numerabile)**.** Se $\{B_n\}$ è una famiglia di sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{R}$ con la FIP, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

Dimostrazione. B_n, in quanto interno, proviene da una certa succesione $\langle B_{n,k} \rangle$. Vogliamo una successione σ che stia nell'interesezione della famiglia, e vorremmo prendere $\sigma(k) \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{j,k}$, ma magari quest'intersezione è vuota. Allora definiamo[39] $N_k = \max\left\{n \leq k \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{n} B_{j,k} \neq \emptyset\right\}$ e abbiamo

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \{k \mid \sigma(k) \in B_{n,k}\} \supseteq \{k \mid N_k \geq n\} = \{k \geq n\} \cap \left\{k \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{n} B_{j,k} \neq \emptyset\right\} \in \mathcal{U}$$

□

Esercizio 18.3. Se $A \cap B = \emptyset$, allora

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \bar{d}(B) \leq \bar{d}(A \cup B) \leq \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$$

Esercizio 18.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty \Rightarrow A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha densità 0.

Esercizio 18.5. Se X è infinito, $\exists [\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$ tale che ogni insieme $H \subset X$ omogeneo ha densità nulla relativamente ad X, cioè

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|H \cap [1, n]|}{|X \cap [1, n]|} = 0$$

Dimostrazione. Prendiamo $a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ e scriviamo $\mathbb{N} = \bigsqcup [a_n, a_{n+1})$. Coloriamo le coppie in questa maniera: $\{a, b\} \in C_1 \Leftrightarrow \exists n\ a, b \in [a_n, a_{n+1})$. Se H è omogeneo infinito deve avere il colore 2, perché altrimenti tutte le coppie (di infiniti elementi) starebbero nello stesso intervallo (finito). Ora è sufficiente considerare $a_n = \min\{m \mid X \cap [1, m] = n!\}$. □

[39] Potremmo avere $B_{1,k} = \emptyset$, ma questo deve accadere $\mathcal{U}$-quasi mai perché altrimenti $B_1 = \emptyset$, e quindi siamo liberi di sostituire $B_{1,k}$ con $\mathbb{N}$ quando accade.

18.2 Altre caratterizzazioni non-standard

Esercizio 18.6. A è spesso se e solo se ${}^*A$ include un intervallo infinito, cioè $\exists[\mu,\nu] \subset {}^*A$, con $\mu - \nu$ infinito.

Esercizio 18.7. A è sindetico se e solo se ${}^*A$ non ha buchi infiniti.

Esercizio 18.8. A è sindetico a tratti se e solo se esiste un intervallo infinito J tale che ${}^*A \cap J$ ha solo buchi finiti (di lunghezza finita).

Segue risoluzione dell'Esercizio 16.26 (riportata sotto l'enunciato dello stesso).

Esercizio 18.9. Se A è interno infinito, allora $\exists\nu \in \mathbb{N}_\infty, \exists\psi\colon [1,\nu] \hookrightarrow A$.

Esercizio 18.10. Se ν è infinito $|[1,\nu]| \geq \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Poniamo $\nu = [\sigma]$ e costruiamo $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow [1,\nu]$, ricordando che $[\varphi] \in [1,\nu] \Leftrightarrow \{n \mid \varphi(n) \in [1,\sigma(n)]\} \in \mathcal{U}$. Dato che ν è infinito, per ogni k abbiamo $Y_k = \{n \mid \sigma(n) \geq 2^k\} \in \mathcal{U}$. Se $n \in Y_k \setminus Y_{k+1}$ allora $\sigma(n) \in [2^k, 2^{k+1}-1]$ e, per ogni $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, possiamo definire $\bar{\eta}(n) = \sum_{i=i}^{k} \eta(i)2^{i-1}$ e per costruzione $[\bar{\eta}] \in [1,\nu]$ per quanto detto sopra. Resta da vedere che se $\eta \neq \theta$ allora $[\bar{\eta}] \neq [\bar{\theta}]$, ma questo è ovvio perché se $\eta(n) \neq \theta(n)$ allora $\bar{\eta}$ e $\bar{\theta}$ differiscono su tutto $[n,\infty)$. $\square$

19 30/11

19.1 Sindeticità e somme/differenze

Risoluzione di esercizi, alcuni non riportati.

Dal fatto che gli insiemi spessi sono A-large segue facilmente che

Corollario 19.1. Se A è sindetico a tratti, A include un insieme della forma $y + \mathrm{Fs}(X)$, con X infinito.

Dimostrazione. $(A - n_1) \cup \ldots \cup (A - n_k) = B$ è spesso e quindi A-large. Per Hindman forte esiste i tale che $A - n_i$ è A-large, cioè esiste X infinito con $\mathrm{Fs}(X) \subseteq A - n_i$. $\square$

Definizione 19.2. Un insieme è Δ_f se include insiemi di differenze di insiemi finiti arbitrariamente grandi.

Esercizio 19.3. Se $A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ è Δ_f, allora $\exists C_i\ \Delta_f$.

Dimostrazione. Supponiamo di voler trovare $|X| > m$ incluso in un C_i. Posto y il numero di Ramsey relativo a $m, r, 2$, prendiamo $|Y| > y$ tale che $A \supseteq Y - Y$ e coloriamo $\{y_1 < y_2\} \in [Y]^2$ con il colore di $y_2 - y_1$ in A. Se $X \subseteq Y$ è omogeneo per questa colorazione allora $X - X \subseteq C_i$ nella prima, ma per costruzione un tale X di cardinalità m esiste. $\square$

Esercizio 19.4. Trovare un insieme Δ_f ma non Δ.

Dimostrazione. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ è tale che $X - X \subseteq F$, allora abbiamo che, ad esempio, $x_3 - x_1 \in F$, $x_2 - x_1 \in F$, e $(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) = x_3 - x_2 \in F$. Dunque per mostrare che non esiste X infinito tale che $X - X \subseteq F$ non è restrittivo supporre $X \subseteq F$.

Data una successione $\{a_n\}$ consideriamo $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2, a_3\}$, $A_3 = \{a_4, a_5, a_6\}$, eccetera e poniamo $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F\small{D}}(A_n)$, dove $\mathrm{F\small{D}}$ è la chiusura di X per l'operazione distanza[40]. A questo punto prendiamo $a_n = 10^n$. Notiamo che $\mathrm{F\small{D}}(A_i)$ è finito[41] e che se $i > j$ si ha $\mathrm{F\small{D}}(A_i) \cap \mathrm{F\small{D}}(A_j) = \emptyset$, dato che

$$\min(\mathrm{F\small{D}}(A_i)) = \gcd(\mathrm{F\small{D}}(A_i)) = \gcd(A_i) = \min(A_i) > \max(A_j) = \max(\mathrm{F\small{D}}(A_j))$$

Inoltre, sempre supponendo $i > j$, se $x_i \in \mathrm{F\small{D}}(A_i)$ e $x_j \in \mathrm{F\small{D}}(A_j)$, allora $x_i - x_j$ non può stare in $\mathrm{F\small{D}}(A_k)$ se $k < i$ perché

$$x_i - x_j \geq \min(\mathrm{F\small{D}}(A_i)) - \max(\mathrm{F\small{D}}(A_{i-1})) = \min(A_i) - \max(A_{i-1}) > \max(A_{i-1})$$

D'altra parte $x_i - x_j < \min \mathrm{F\small{D}}(A_{i+1})$, e $x_i - x_j \notin \mathrm{F\small{D}}(A_i)$ perché $\min(A_i) = \gcd(A_i)$ non divide x_j. Dunque X dev'essere incluso in un $\mathrm{F\small{D}}(A_i)$, che è finito. □

Esercizio 19.5. A-large implica Δ-set.

Dimostrazione. Se $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\}$ è tale che $\mathrm{F\small{S}}(X) \subseteq A$, sia $Y = \{\sum_{i=1}^{k} x_i \mid k \in \mathbb{N}\}$. Chiaramente $Y - Y \subseteq \mathrm{F\small{S}}(X) \subseteq A$. □

20 05/12

20.1 Ultrafiltri minimali e sindeticità

Teorema 20.1. I minimali contengono una quantità sindetica di traslati dei loro elementi. Più precisamente, TFAE:

1. $\mathcal{U}$ è minimale.
2. $\forall A \in \mathcal{U} \quad \hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\}$ è sindetico.
3. $\forall \mathcal{V}\ \mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Dimostrazione. 1 ⇒ 2 Sia $A \in \mathcal{U} \in L$ ideale sinistro minimale. Ragionando come nell'Esercizio 16.27 si arriva a $L \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{A-n_i}$. Per mostrare che $\hat{A}$ è sindetico ci basta arrivare a $(\hat{A} - n_1) \cup \ldots \cup (\hat{A} - n_k) = \mathbb{N}$. Dato $m \in \mathbb{N}$ abbiamo $\sqcup_m \oplus \mathcal{U} \in L$, per cui esiste $i \leq k$ tale che tale che $A - n_i \in \sqcup_m \oplus \mathcal{U}$, cioè $A - n_i - m \in \mathcal{U}$. In altre parole $n_i + m \in \hat{A}$, e dunque $m \in \hat{A} - n_i$.

[40] $\mathrm{F\small{D}}(X)$ è l'unione sui naturali di $X = \{x_1 < \ldots < x_n\}$, $X_1 = X \cup (X - X)$, dove $X - X = \{x_j - x_i \mid j > i\}$, $X_2 = (X_1 \cup (X_1 - X_1)$, eccetera.

[41] È più difficile da scrivere che da capire: ad esempio $\mathrm{F\small{D}}(A_2) = \{10, 20, 30, \ldots, 100\}$.

$2 \Rightarrow 3$ Sia per assurdo $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{U} \notin \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Quest'ultimo coincide con $\psi_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}}(\beta\mathbb{N})$ ed è quindi compatto, per cui esiste A tale che che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ e $\mathcal{O}_A \cap (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) = \emptyset$. Dato che per ipotesi $\hat{A}$ è sindetico possiamo scrivere $(\hat{A} - n_1) \cup \ldots \cup (\hat{A} - n_k) = \mathbb{N}$, e per un certo i abbiamo $\hat{A} - n_i \in \mathcal{V}$, da cui $\hat{A} = \{m \mid A - m \in \mathcal{U}\} \in \sqcup_{n_i} \oplus \mathcal{V}$. Ma allora $A \in \sqcup_{n_1} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ contraddice $\mathcal{O}_A \cap (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) = \emptyset$.

$3 \Rightarrow 1$ Sia $\mathcal{V}$ minimale qualunque ed L ideale minimale sinistro a cui appartiene. Per ipotesi $\mathcal{U} \in (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{U} = L \oplus \mathcal{U}$, che è minimale per la Proposizione 12.5.

□

Con questa caratterizzazione possiamo fornire una dimostrazione più snella[42] dell'Esercizio 16.27 che, ricordiamo, asseriva che gli elementi di ultrafiltri minimali sono sindetici a tratti.

Dimostrazione. Per ipotesi $\exists n_1, \ldots, n_k$ con $(\hat{A} - n_1) \cup \ldots \cup (\hat{A} - n_k) = \mathbb{N}$. Mostriamo che $C = (A - n_1) \cup \ldots \cup (A - n_k)$ è spesso vedendo che $\{C - n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha la FIP. Questo è vero perché, dato che ogni n sta in un $\hat{A} - n_i$, $C - n \supseteq A - n - n_i \in \mathcal{U}$. □

Teorema 20.2. Se A è sindetico a tratti, allora $\exists \mathcal{U}$ minimale con $A \in \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Se $C = (A - n_1) \cup \ldots \cup (A - n_k)$ è spesso $\{C - m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ha la FIP e può essere estesa a un ultrafiltro $\mathcal{V}$. Dato che $\{m \mid C - m \in \mathcal{V}\} = \mathbb{N}$ abbiamo $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_C$. Se $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$ è minimale, da $C \in \mathcal{W}$ otteniamo $A - n_i \in \mathcal{W}$ per un certo i, e allora $A \in \sqcup_{n_i} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{U}$, che è minimale per la Proposizione 12.2. □

Corollario 20.3. $\overline{K(\beta\mathbb{N})} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ A \text{ è sindetico a tratti}\}$

Dimostrazione. Ogni intorno di un $\mathcal{U}$ a destra contiene un $\mathcal{O}_A$ con A sindetico a tratti, che per il Teorema precedente interseca $K(\beta\mathbb{N})$. □

Esercizio 20.4 (possibile seminario)**.** Ogni minimale si scrive come somma di due ultrafiltri non principali. Ci sono degli ultrafiltri nella chiusura degli idempotenti minimali che non sono in $\overline{K(\beta\mathbb{N})}$. (da controllare, potrebbe essere stata fatta confusione)

Esercizio 20.5. Esistono A, B tali che $\bar{d}(A), \bar{d}(B) > 0$ ma $A - B$ *non* è sindetico.

Dimostrazione. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [3 \cdot 4^i, 4^{i+1}]$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} [4^{i+1}, 5 \cdot 4^i]$. □

Teorema 20.6 (Jin (2000))**.** Se $\bar{d}(A), \bar{d}(B) > 0$ allora sia $A + B$ che $A - B$ sono sindetici a tratti.

[42] In realtà è praticamente la stessa dimostrazione, contando come si mostra la freccia della caratterizzazione che ci serve.

Definizione 20.7. La $\mathbb{N}$-topologia è quella i cui aperti $X \subseteq {}^*\mathbb{N}$ sono quelli per cui $\forall \xi \in X \; X \supseteq G_\xi = \{\zeta \mid |\zeta - \xi| \in \mathbb{N}\}$

In altre parole gli aperti di base sono le "palle del massimo raggio finito[43]".

Proposizione 20.8. *A non è sindetico a tratti se e solo se ${}^*A$ è nowhere-dense, cioè non è denso in nessun aperto, nella $\mathbb{N}$-topologia.*

Diamo una dimostrazione alternativa[44] dell'Esercizio 16.26, cioè del fatto che se $A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ è sindetico a tratti uno dei C_i lo è.

Dimostrazione. A meno di procedere induttivamente "incollando" tutti i colori tranne uno ci basta mostrarlo per $A = B \sqcup N$ (bianchi e neri[45]). Per ipotesi esiste un intervallo infinito I tale che ${}^*A \cap I = {}^*B \sqcup {}^*N \cap I$ ha solo buchi finiti. Se ${}^*B \cap I$ ha solo buchi finiti i bianchi sono sindetici a tratti, ma un buco infinito vuol dire un intervallo infinito in ${}^*N \cap I$, e quindi i neri sono addirittura spessi. □

20.2 Densità di Banach

Definizione 20.9. La *densità di Banach* di un insieme $A \subseteq \mathbb{Z}$ è

$$\mathrm{B{\small D}}(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n}$$

Ogni insieme di interi ha densità di Banach. L'esistenza del limite segue applicando alla successione $a_n = \max_{x\in\mathbb{Z}} |A \cap [x, x+n)|$ il seguente

Lemma 20.10 (di Fekete)**.** *Se $\{a_n\}$ è una successione non negativa e subadditiva (cioè $a_{n+m} \le a_n + a_m$), allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.*

Dimostrazione. Sia $\ell = \inf_n \frac{a_n}{n}$. Basta mostrare che $\forall \nu$ infinito $\frac{a_\nu}{\nu} \approx \ell$. Fissato $k \in \mathbb{N}$, scriviamo per divisione euclidea e transfer $\nu = \mu k + i$, dove $0 \le i < k$ (chiaramente anche μ è infinito). Ora, usando il fatto che per subadditività $a_{mn} \le m a_n$,

$$\frac{a_\nu}{\nu} = \frac{a_{\mu k+i}}{\mu k + i} \le \frac{\mu a_k + a_i}{\mu k + i} = \frac{\mu a_k}{\mu k + i} + \frac{a_i}{\mu k + i} \lesssim \frac{a_k}{k}$$

e quindi abbiamo, per ogni k e quindi anche per il loro inf, $\mathrm{st}\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \le \frac{a_k}{k}$, perciò $\mathrm{st}\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \le \ell$, e d'altra parte $\ell = \inf \frac{a_k}{k} \Rightarrow \frac{a_\nu}{\nu} \ge \ell$. □

Esercizio 20.11. $\bar{d}(A) \le \mathrm{B{\small D}}(A)$.

[43] Definizione mnemonica inventata da me e volutamente nonsense. Se volete insultarmi la mia mail è in prima pagina.

[44] Questa volta per davvero.

[45] Inb4: no racism intended.

Esercizio 20.12. Esiste A con $\bar{d}(A) < \textsc{Bd}(A)$.

Esercizio 20.13. A è spesso se e solo se $\textsc{Bd}(A) = 1$.

Dimostrazione. La freccia $\Rightarrow$ è ovvia. Per la freccia $\Leftarrow$, usiamo il fatto che, chiamando $a_n = \max_{k\in\mathbb{Z}} |A \cap [k, k+n)|$, per Fekete abbiamo $1 = \textsc{Bd}(A) = \inf_n \frac{a_n}{n}$, ma allora $\forall n \ \frac{a_n}{n} = 1$. □

Esercizio 20.14. Trovare A tale che $d(A) = 0$ e $\textsc{Bd}(A) = 1$.

Esercizio 20.15. Indicando con I un intervallo e con $|I|$ la sua lunghezza, sono equivalenti:

1. $\textsc{Bd}(A) \geq \alpha$
2. $\forall \nu \in \mathbb{N}_\infty \ \exists\, |I| = \nu \ \frac{|^*A\cap I|}{\nu} \gtrsim \alpha$
3. $\exists I \ \ |I| \in \mathbb{N}_\infty \ \frac{|^*A\cap I|}{|I|} \gtrsim \alpha$

Esercizio 20.16. Se A è k-sindetico a tratti[46] $\textsc{Bd}(A) \geq \frac{1}{k}$.

Dimostrazione.

$$1 = \textsc{Bd}(A+F) = \textsc{Bd}\Big(\bigcup_{i=1}^{k}(A+n_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \textsc{Bd}(A+n_i) = k\,\textsc{Bd}(A)$$

□

Esercizio 20.17 (non facile)**.** Per ogni $r < 1$ esiste A *non* sindetico a tratti tale che $\textsc{Bd}(A) > r$.

Dimostrazione. Iniziamo con un

Lemma 20.18. Se $\{a_n\}$ è una successione di naturali e definiamo

$$A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (ka_n, ka_n + n] \qquad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad B = A^c$$

allora B *non* è sindetico a tratti.

L'idea è mettere buchi sempre più grandi a distanze fissate. In seguito sceglieremo la successione per rendere la densità di Banach abbastanza grande.

Dimostrazione. Supponiamo che $B + [0, N)$ sia spesso[47] e troviamo un intervallo lungo $a_N + N + 1$ al suo interno. Per costruzione esisterà k tale che $(ka_N, ka_N + N) \cap B + [0, N) \ni i$. Questo è assurdo perché $A \cap B = \emptyset$. □

[46] Cioè k traslati di A coprono uno spesso.

[47] Non è necessario usare un intervallo, ma si visualizza meglio ed è un attimo accorgersi che non si perde di generaità.

A questo punto prendiamo una a_n adeguata, cioè tale che $\textsc{Bd}(B) > r$. Dato che $\textsc{Bd}(B) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{|B\cap[0,N]|}{N}$ ci basta stimare dal basso

$$
\begin{aligned}
&|B \cap [0,N]| = N - |A - [0,N]| \geq N - \sum_{n=0}^{\infty} |A_n \cap [0,N]| \\
\geq &N - \sum_{n=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor \cdot n \geq N\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a_n}\right)
\end{aligned}
$$

che scegliendo $a_n = \varepsilon n 2^{n+1}$ è maggiore o uguale di $N(1-\varepsilon)$. □

Esercizio 20.19. $\textsc{Bd}(A) = \alpha > 0 \Rightarrow (A - A) \cap (X - X) \neq \emptyset$ per ogni $|X| \geq \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$.

Esercizio 20.20 (difficile)**.** $\textsc{Bd}(A) > 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \textsc{Bd}(A + [-k,k]) = 1$.

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Sappiamo che $\textsc{Bd}(A \cup B) \leq \textsc{Bd}(A) + \textsc{Bd}(B)$. Se $\textsc{Bd}(A) = 0$, allora

$$\textsc{Bd}(A + [-n,n]) = \textsc{Bd}\Big(\bigcup_{i=-n}^{n} A + i\Big) \leq \sum_{i=-n}^{n} \textsc{Bd}(A+i) = 0$$

$\Rightarrow$ Sia $\textsc{Bd}(A) = \delta > 0$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Per n sufficientemente grande, comunque preso un intervallo I lungo n abbiamo $|A \cap I| \leq (\alpha + \varepsilon)n$, mentre per Fekete il nostro limite è un inf e dunque per ogni j esiste I_j lungo n^j tale che $|A \cap I_j| \geq \alpha n^j$. Spezziamo I_j in n^{j-1} intervalli lunghi n e chiamiamo S l'insieme di quelli che intersecano A. Abbiamo

$$\alpha n^j \leq |A \cap I_j| = \sum_{I\in S} |A \cap I| \leq |S|\,(\alpha+\varepsilon)n$$

e dunque $|S| \geq \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon} n^{j-1}$. Ora, comunque preso $I \in S$, dato che I è lungo n e A lo interseca, $A + [-n,n] \supseteq I$. Abbiamo quindi

$$|(A + [-n,n]) \cap I_j| \geq |S|\, n \geq \frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon} n^j$$

che, vista l'arbitrarietà di j e di ε, è la tesi.

□

Esercizio 20.21 (difficile)**.** $\textsc{Bd}(A) + \textsc{Bd}(B) > 1 \Rightarrow A + B, A - B$ sono spessi.

21 07/12

21.1 Notizie random

Risoluzione di esercizi. Notizia random: molti risultati ottenibili con la densità di Schnirelmann possono essere trasportati in forma più debole (relativamente a insiemi spessi) con la densità di Banach.

Definizione 21.1. La *densità di Banach inferiore* è

$$\underline{\mathrm{BD}}(A) = \lim_{n\to\infty} \min_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x, x+n)|}{n}$$

Altra info: dal fatto che $\exists\varepsilon > 0$ per cui valga Szemeredi $\forall\, \mathrm{BD}(A) > 1-\varepsilon$ segue Szemeredi.

22 12/12/12

22.1 Finita immergibilità

Definizione 22.1. $X \trianglelefteq Y$ (X è *finitamente immergibile* in Y) se $\forall F \subseteq X$ finito $\exists z \in \mathbb{Z}$ tale che $z + F \subseteq Y$, cioè se tutte le configurazioni finite di X si trovano in Y a meno di traslazioni.

Gli insiemi $\trianglelefteq$-massimali sono tutti e soli gli insiemi spessi (A spesso $\Rightarrow \mathbb{Z} \trianglelefteq A$).

Esercizio 22.2. Sia $X \trianglelefteq Y$. allora

1. Se X è AP-rich lo è anche Y.
2. Se X è sindetico a tratti lo è anche Y.
3. *Non* è vero che se X è sindetico lo è anche Y.
4. $\mathrm{BD}(X) \leq \mathrm{BD}(Y)$.

Esercizio 22.3. $X \trianglelefteq Y$ se e solo se $\exists\xi \in {}^*\mathbb{Z}$ tale che $\xi + X \subseteq {}^*Y$

22.2 Verso il Teorema di Jin

Per dimostrare il Teorema di Jin (Teorema 20.6), visto che con l'analisi non standard lo sforzo è lo stesso, dimostreremo una cosa più forte[48], cioè

Teorema 22.4. Se $A, B \subseteq \mathbb{Z}, \mathrm{BD}(A) = \alpha > 0, \mathrm{BD}(B) = \beta > 0$, allora $\exists\, |F| \leq \frac{1}{\alpha\beta}$ tale che $(A - B) + F$ è spesso.

[48]Ricordiamo che $\bar{d} \leq \mathrm{BD}$. Inoltre B e $-B$ hanno chiaramente la stessa densità.

Ci serviranno dei risultati preliminari. L'idea principale è ridursi al caso $E-E$, che quando E ha densità positiva è Δ^* e quindi addirittura sindetico, come già visto.

Lemma 22.5. Siano $N \in \mathbb{N}_\infty$ ed $E \subseteq [1, N]$ interno tale che $\frac{|E|}{N} \approx \delta > 0$. Allora $\exists F \subseteq \mathbb{Z}, |F| \leq \frac{1}{\delta}$ tale che $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+F$.

Dimostrazione. Definiamo induttivamente gli elementi di $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{Z}$. Prendiamo x_1 a caso. Se $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+x_1$ abbiamo finito. Altrimenti $\exists x_2 \in \mathbb{Z} \setminus ((E-E)+x_1)$. Questo succede se e solo se $\forall e, e' \in E$ si ha $x_2 \neq e - e' + x_1$, cioè $e' + x_2 \neq e + x_1$, il che significa $(E+x_2) \cap (E+x_1) = \emptyset$. Se $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+x_1 \cup (E-E)+x_2$ abbiamo finito. Induttivamente esiste $x_n \notin \bigcup (E-E)+x_i$ se e solo se $\forall i < n$ $(E+x_n) \cap (E+x_i) = \emptyset$. Dato che le densità relative a $[1, N]$ di $E - x_i$ e di E distano un infinitesimo, abbiamo

$$1 \geq \frac{1}{N}\left|\bigcup_{i=1}^{m}(E+x_i) \cap [1, N]\right| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}|(E+x_i) \cap [1, N]|$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m}\frac{|E| - x_i}{N} = \sum_{i=1}^{m}\frac{|E|}{N} - \sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{N} \approx m\delta$$

e quindi dopo al più $m = \frac{1}{\delta}$ passi ci dobbiamo fermare. □

Da questo Lemma segue che

Corollario 22.6. Siano $A \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathrm{BD}(A) = \delta > 0$. Allora $\exists |F| \leq \frac{1}{\delta}$ tale che $\mathbb{Z} = (A-A)+F$

Dimostrazione. Prendiamo un intervallo infinito tale che $\frac{{}^*A \cap [\Omega+1, \Omega+N]}{N} \approx \delta$. Posto $E = ({}^*A - \Omega) \cap [1, N]$ abbiamo

$$\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+F \subseteq [({}^*A-\Omega)-({}^*A-\Omega)]+F = ({}^*A-{}^*A)+F = {}^*((A-A)+F)$$

dove la prima disuguaglianza è per il Lemma e l'ultima uguaglianza è perché $F \subseteq \mathbb{Z}$. Ma $\mathbb{Z} \subseteq {}^*B \Leftrightarrow \mathbb{Z} = B$. □

L'idea ora è che esiste un traslato (infinito) di ${}^*A$ che interseca ${}^*B$ in modo da avere densità relativa $\geq \alpha\beta$ su un intervallo infinito. Lasciamo in sospeso questo discorso, per il momento.

22.3 Qualche esercizio

Esercizio 22.7. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ una famiglia di inisiemi finiti chiusa per traslazioni[49]. Allora $\mathcal{F}$ è "debolmente regolare per partizioni"[50] se e solo se $\forall A$ sindetico a tratti $\exists F \in \mathcal{F}$ $F \subseteq A$.

[49] Cioè $\forall F \in \mathcal{F}\ \forall x\ x + F \in \mathcal{F}$.

[50] $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists C_i \supseteq F \in \mathcal{F}$.

Esercizio 22.8. Sia $\mathcal{D} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ \mathrm{BD}(A) > 0\}$. Allora

0. $\mathcal{D}$ non è vuoto ed è chiuso;
1. $\mathcal{D}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$;
2. $\mathcal{D}$ è un ideale destro?
3. $\mathcal{D}' = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \mid \mathcal{U} \notin D\}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ e non è chiuso.

Dimostrazione parziale. Questa dimostrazione usa notazioni e risultati della lezione successiva. Preso $\mathcal{U} \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{V}$ qualunque,

1. $B \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \Leftrightarrow \{n \mid B - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, dunque $\exists \bar{n}$ tale che $B - \bar{n} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathrm{BD}(B - \bar{n}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{BD}(B) > 0$.
2. Per vedere che è un ideale destro, $B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \sqcup_\alpha \oplus \sqcup_\beta \Leftrightarrow A_\beta = \{n \mid N + n \in {}^*B\} \in \sqcup_\alpha = \mathcal{U}$ e quindi $\mathrm{BD}(A_\beta) > 0$. Ma $\beta + A_\beta \subseteq {}^*B$, cioè questo è finitamente immergibile in B ($A_\beta \trianglelefteq B$) e quindi $\mathrm{BD}(A_\beta) > 0 \Rightarrow \mathrm{BD}(B) > 0$.

□

22.4 Sul transfer

Definizione 22.9. Una *proprietà espressa in forma elementare* relativa a $A_1, \ldots, A_k$ è una proprietà formalizzata da una $\in$-formula al prim'ordine $\varphi(A_1, \ldots, A_k)$ con parametri $A_1, \ldots, A_k$.

Segue un po' di roba di logica, non riportata[51]. Notare che $A = \mathscr{P}(B)$ è una proprietà elementare di A e di $\mathscr{P}(B)$ ma *non* di A e B (diventa del second'ordine). Idem per il sup. Segue qualche discorso sul transfer e sul fatto che ${}^*\mathscr{P}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathscr{P}({}^*\mathbb{N})$ (in realtà sono gli interni). Il principio di transfer detto bene è che $\varphi(A_1, \ldots A_n) \Leftrightarrow \varphi({}^*A_1, \ldots, {}^*A_n)$, con φ come sopra.

23 14/12

23.1 Dimostrazione del Teorema di Jin

Lemma 23.1. Se $C \subseteq [1, N], D \subseteq [1, \nu]$, allora $\exists \bar{x}$ tale che

$$\frac{|(C - \bar{x}) \cap D|}{\nu} \geq \frac{|C|}{N} \cdot \frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N}$$

[51] Gli appunti del corso di Logica sono disponibili sullo stesso sito dove sono reperibili questi, indicato nel disclaimer.

Dimostrazione. Sia $\chi_C\colon [1,N] \to \{0,1\}$ la funzione caratteristica di C. Per ogni scelta di $\forall d \in D$ abbiamo la stima

$$\sum_{x=1}^{N} \chi_C(x+d) = |[d+1, d+N] \cap C| = |(C-d) \cap [1,N]| = |C| + e(d)$$

dove l'errore è $|e(d)| \leq d$ (male che vada perdo il pezzo prima di d). Allora

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\chi_C(x+d) = \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D}\sum_{x=1}^{N}\chi_C(x+d) = \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D}|C|+e(d) = \frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\frac{|C|}{N}+e$$

dove

$$e = \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D} e(d) \qquad |e| \leq \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D} d \leq \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D}\nu = \frac{|D|}{N}$$

per cui

$$\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\frac{|C|}{N} + e = \frac{|C|}{N}\cdot\frac{|D|}{\nu} + e \geq \frac{|C|}{N}\cdot\frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\chi_C(x+d)\right) \geq \frac{|C|}{N}\cdot\frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N}$$

e dato che per la media degli x vale questa disuguaglianza, vale anche per almeno un $\bar{x}$ (non possono essere tutti minori). Perciò esiste $\bar{x}$ tale che

$$\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\chi_C(\bar{x}+d) \geq \frac{|C|}{N}\cdot\frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N}$$

e il primo membro è uguale a $\frac{|(D+\bar{x})\cap C|}{\nu} = \frac{|D\cap(C-\bar{x})|}{\nu}$ □

Siamo pronti per la dimostrazione del Teorema 22.4, da cui come già visto segue il Teorema di Jin.

Dimostrazione. Prendiamo N, ν infiniti tali che $\frac{\nu}{N} \approx 0$. Usando la caratterizzazione non standard della densità di Banach, se $\mathrm{B{\small D}}(A) = \alpha > 0$ e $\mathrm{B{\small D}}(B) = \beta > 0$ possiamo trovare Ω, Θ e definire C, D tali che

$$\begin{array}{ll} \frac{|{}^*A\cap[\Omega+1,\Omega+N]|}{N} \approx \alpha & C = ({}^*A - \Omega) \cap [1,N] \subseteq [1,N] \\ \frac{|{}^*B\cap[\Theta+1,\Theta+\nu]|}{\nu} \approx \beta & D = ({}^*B - \Theta) \cap [1,\nu] \subseteq [1,\nu] \end{array}$$

Applichiando il Lemma 23.1 troviamo ζ tale che

$$\frac{|(C-\zeta)\cap D|}{\nu} \geq \underbrace{\frac{|C|}{N}}_{\approx\alpha}\cdot\underbrace{\frac{|D|}{\nu}}_{\approx\beta} - \underbrace{\frac{|D|}{N}}_{\approx 0} \approx \alpha\beta$$

Prendiamo ora $E = (C - \zeta) \cap D \subseteq [1, \nu]$ e sappiamo che st $\left(\frac{|E|}{\nu}\right) \geq \alpha\beta$, quindi il Lemma 22.5 ci garantisce l'esistenza di un $F \subseteq \mathbb{Z}$ tale che $|F| \leq \frac{1}{\alpha\beta}$ e $\mathbb{Z} \subseteq (E - E) + F$, per cui da

$$E - E \subseteq (C - \zeta) - D \subseteq ({}^*A - \Omega - \zeta) - ({}^*B - \Theta) = {}^*A - {}^*B - \mu$$

(dove $\mu = \Omega + \zeta - \Theta$) otteniamo

$$\mathbb{Z} \subseteq (E - E) + F \subseteq ({}^*A - {}^*B + F) - \mu = {}^*(A - B + F) - \mu$$

Ma allora ${}^*(A - B + F) - \mu$ contiene per overspill un intervallo infinito, per cui lo stesso accade per $\mu + \mathbb{Z} \subseteq {}^*(A - B + F)$ e quindi $A - B + F$ è spesso. $\square$

23.2 Regolarità per partizioni

Ricordiamo che

Definizione 23.2. $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ è *debomente regolare per partizioni* se $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \ \exists i \ C_i \in \mathcal{S}$.

Definizione 23.3. $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ è *regolare per partizioni* (PR, *partition-regular*) se $C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \in \mathcal{S} \Rightarrow \ \exists i \ C_i \in \mathcal{S}$.

Proposizione 23.4. TFAE:

1. $\mathcal{S}$ è debolmente PR
2. $\mathcal{F}_\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A^c \notin \mathcal{S}\}$ ha la FIP
3. $\exists \mathcal{U}$ ultrafiltro con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$

Proposizione 23.5. TFAE:

1. $\mathcal{S}$ è PR e chiusa per sovrainsieme
2. $\mathcal{F}_\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A^c \notin \mathcal{S}\}$ è un filtro
3. $\mathcal{S}$ è unione di ultrafiltri

Notiamo inoltre che questa cosa è collegata ai sottospazi chiusi di $\beta\mathbb{N}$

$$\bigcap_{B \in \mathcal{F}_\mathcal{S}} \mathcal{O}_B = \bigcap_{A \notin S} \mathcal{O}_{A^c}$$

Esempio 23.6.
1. Prendiamo come $\mathcal{S}$ l'insieme degli insiemi infiniti. $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ è il filtro di Frechet, ed $\mathcal{S}$ è l'unione di tutti gli ultrafiltri non principali.
2. Prendiamo $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \bar{d}(A) > 0\}$. $\mathcal{F}_\mathcal{S} = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid d(B^C) = 0 \Rightarrow d(B) = 1\}$. Quindi $\mathcal{S}$ è l'unione degli ultrafiltri fatti solo di pezzi di densità positiva.

23.3 Un po' di domande

Prendiamo un intervallo infinito I e definiamo

$$\mathcal{D}_I = \left\{ \mathcal{U} \;\middle|\; \forall A \in \mathcal{U} \operatorname{st}\left(\frac{|{}^*A \cap I|}{|I|}\right) > 0 \right\} \subseteq \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U} \;\; \mathrm{BD}(A) > 0\} = \mathcal{D}$$

È vero che $\mathcal{D} = \bigcap_I \mathcal{D}_I$? È vero che $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{D}\ \exists I$ intervallo infinito tale che $\forall A \in \mathcal{U}\ \frac{|{}^*A \cap I|}{|I|} \not\approx 0$?

Definizione 23.7. Data $\mathcal{S}$ debolmente PR si definisce $\bar{\mathcal{S}}$ la più grande sottofamiglia di $\mathcal{S}$ che è PR (in senso forte), cioè $\bar{\mathcal{S}} = \bigcup\{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}\}$ (uno ce n'è di sicuro).

Esercizio 23.8. $\overline{\text{Schur}} \supsetneq \{\text{A-large}\}$. Questo equivale a trovare A *non* A-large tale che $\forall A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists C_i \in \text{Schur}$.

Problema aperto 23.9. $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists X \text{ infinito } X + X \subseteq A\}$ è debolmente PR ma non PR (questo si dimostra). Ma $\bar{\mathcal{S}} = \{\text{A-large}\}$?

Problema aperto 23.10. $x^2 + y^2 = z^2$ è debolmente PR? (nel senso che per ogni colorazione finita di $\mathbb{N}$ esiste una soluzione monocromatica)

24 19/12

24.1 Ultrafiltri generati ed enlargement

Definizione 24.1. Dato $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$ l'*ultrafiltro generato* da α è $\sqcup_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \in {}^*A\}$, ed è principale se e solo se $\alpha \in \mathbb{N}$.

Proviamo a studiare la mappa $\Psi\colon {}^*\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} \quad \alpha \mapsto \sqcup_\alpha$. D'ora in poi l'ultrapotenza ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^I/\mathcal{U}$ potrà essere fatta anche su un insieme di indici $I \neq \mathbb{N}$.

Definizione 24.2. Se κ è un cardinale infinito diciamo che in ${}^*\mathbb{N}$ vale la proprietà di κ^+-*enlargement* se per ogni $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ di cardinalità $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ con la FIP $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A \neq \emptyset$.

Abbiamo già visto che per le $\mathcal{F}$ numerabili è vero, o in altre parole che l'$\aleph_1$-enlargment vale sempre.

Proposizione 24.3. In presenza di $\mathfrak{c}^+$-enlargement ψ è surgettiva.

Dimostrazione. $\mathcal{U}$ ha la FIP e quindi per enlargement esiste $\alpha \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} {}^*A$, e chiaramente $\psi(a) = \mathcal{U}$. □

Esercizio 24.4. L'insieme degli ultrafiltri $\left\{ \sqcup_\alpha \;\middle|\; \alpha \in {}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^\mathbb{N}/\mathcal{U} \right\}$ è esattamente $\{\mathcal{V} \mid \mathcal{V} \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{U}\}$.

Corollario 24.5. Se ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$ allora Ψ *non* è surgettiva (anche per ovvie questioni di cardinalità).

Corollario 24.6. La proprietà di $\mathfrak{c}^+$-enlargement non vale se ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$.

Proposizione 24.7. Esistono ultrafiltri $\mathcal{W}$ su $|I| = \mathfrak{c}$ tali che su ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^I}\!/\!_{\mathcal{W}}$ vale la proprietà di $\mathfrak{c}^+$-enlargement.

Dimostrazione. Sia $I = \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ definiamo $\tilde{A} = \{i \in I \mid A \in i\}$. La famiglia degli $\tilde{A}$ ha la FIP, perché $i = \{A_1, \dots, A_n\} \in \tilde{A}_1 \cap \dots \cap \tilde{A}_n$, e può essere estesa ad un ultrafiltro $\mathcal{W}$. Siano ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^I}\!/\!_{\mathcal{W}}$ e $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ con la FIP. Definiamo $\varphi\colon I \to \mathbb{N}$ in questo modo: indicizziamo[52] $\mathcal{F} = \{X_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ e, se $i = \{A_1, \dots, A_n\}$, scegliamo $\varphi(i) \in X_{A_1} \cap \dots \cap X_{A_n}$ che è non vuoto per FIP e per ogni A abbiamo $[\varphi] \in {}^*X_A$, dato che

$$\{i \in I \mid \varphi(i) \in X_A\} \supseteq \{i \in I \mid A \in i\} = \tilde{A} \in \mathcal{W}$$

□

Da qui in avanti supporremo che ${}^*\mathbb{N}$ soddisfi il $\mathfrak{c}^+$-enlargement. Sappiamo già che con questa condizione Ψ è surgettiva. Chiediamoci se è iniettiva.

Esercizio 24.8.
1. Se ${}^*\mathbb{N} = {}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$, Ψ è iniettiva se e solo se $\mathcal{U}$ è di Hausdorff.
2. Se $\Psi\colon {}^*\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ è surgettiva, allora *non* è iniettiva.

Definizione 24.9. $\alpha \underset{u}{\sim} \beta \Leftrightarrow \sqcup_\alpha = \sqcup_\beta$.

Esercizio 24.10. $\alpha \underset{u}{\sim} \beta$ se solo se $\forall A \subseteq \mathbb{N}\ \alpha \in {}^*A \Leftrightarrow \beta \in {}^*A$.

Osserviamo che

Proposizione 24.11. $\alpha < \beta, \alpha \underset{u}{\sim} \beta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ n \mid (\beta - \alpha)$.

Dimostrazione. Se $\beta \equiv i \pmod n$, $\beta \in {}^*\{k \mid k \equiv i \pmod n\}$, se e solo se $\alpha \in {}^*\{k \mid k \equiv i \pmod n\}$ per l'Esercizio precedente. □

Esercizio 24.12. Provare che

1. $f(\sqcup_\alpha) = \sqcup_{{}^*f(\alpha)}$
2. $\alpha \underset{u}{\sim} \beta \Rightarrow {}^*f(\alpha) \underset{u}{\sim} {}^*f(\beta)$
3. (difficile) ${}^*f(\alpha) \underset{u}{\sim} \alpha \Rightarrow {}^*f(\alpha) = \alpha$. Hint: $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{Id}$.

[52] Possiamo farlo perché $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$.

Esercizio 24.13. TFAE:

1. $A \in \sqcup_\gamma \oplus \sqcup_\delta$
2. $\{n \mid A - n \in \sqcup_\delta\} \in \sqcup_\gamma$
3. $\{n \mid \delta \in {}^*(A-n) = {}^*A - n\} \in \sqcup_\gamma$
4. $A_\delta = {}^*\{n \mid \delta + n \in {}^*A\} \in \sqcup_\gamma$

Osservando che $A_\delta = ({}^*A - \delta) \cap \mathbb{N}$.

Abbiamo già visto che il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è $\mathbb{N}$. Anzi, si può dimostrare il risultato più forte

Proposizione 24.14. Sia $\{x_n\}$ successione crescente di naturali tale che $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = \infty$. Consideriamo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[x_{2n}, x_{2n+1})$, $A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}[x_{2n-1}, x_{2n})$. $\forall\mathcal{U}$ non principale $\exists\mathcal{V}$ non principale tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Rightarrow A \notin \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Per l'assunzione della proprietà di $\mathfrak{c}^+$-enlargement, $\mathcal{U} = \sqcup_\alpha$. Ci sono due casi:

1. $\alpha + n \in {}^*A$ definitivamente
2. $\alpha + n \in {}^*A^c$ definitivamente

(qui intendiamo che n sia finito). Se siamo nel caso 1 abbiamo $\alpha + n \in [x_{2\nu}, x_{2\nu+1})$ definitivamente. Allora prendiamo $\mathcal{V} = \sqcup_\beta$, dove $\beta = x_{2\nu+1}$. Ora $A \in \sqcup_\alpha \oplus \sqcup_\beta \Leftrightarrow \{n \mid \beta + n \in {}^*A\} \in \sqcup_\alpha$, ma questo è falso perché $\{n \mid \beta + n \in {}^*A\} = \emptyset$, dunque $A \notin \sqcup_\alpha \oplus \sqcup_\beta$. D'altro canto $A \in \sqcup_\beta \oplus \sqcup_\alpha \Leftrightarrow \{n \mid \alpha + n \in {}^*A\} \in \sqcup_\beta$, che è vero perché $\{n \mid \alpha + n \in {}^*A\}$ è cofinito, dunque $A \in \sqcup_\beta \oplus \sqcup_\alpha$. Il caso 2 è simmetrico. □

24.2 Sistemi dinamici topologici

Definizione 24.15. Un *sistema dinamico topologico* è $(X, \{T_i\}_{i\in I})$, con X spazio topologico compatto, $T_i \colon X \to X$ continua e $\{T_i\}_{i\in I}$ chiusa per composizione.

Considereremo sistemi dinamici discreti (X, T), con $T \colon X \to X$ continua e $T^n = \underbrace{T\circ, \ldots, \circ T}_{n \text{ volte}}$.

Definizione 24.16. $x \in X$ è un *punto di ricorrenza* se $\forall U$ intorno di x esiste $n > 0$ tale che $T^n(X) \in U$, o equivalentemente se $x \in \overline{\mathrm{Orb}(x)}$, dove ovviamente $\mathrm{Orb}(x) = \{T^n(x) \mid n > 0\}$.

Definizione 24.17. $x \in X$ è *uniformemente ricorrente* se $\forall U$ intorno di x esiste k tale che $\forall n\ T^{n+i}(x) \in U$ per qualche $i \leq k$, cioè $\{n \mid T^n(x) \in U\}$ è sindetico.

Teorema 24.18. Tfae:

1. $\forall x \in X \operatorname{Orb}(x)$ è denso in X
2. (X, T) è *minimale*, cioè $\forall Y \subseteq X$ chiuso e T-invariante, $Y = X$.

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ Se $Y \subseteq X$ è T-invariante, $\forall y \in Y$ si ha $\operatorname{Orb}(y) \subseteq Y$, e quindi $X = \overline{\operatorname{Orb}(y)} \subseteq \overline{Y} = Y$

$2 \Rightarrow 1$ $Y = \overline{\operatorname{Orb}(x)}$ è compatto perché chiuso in un compatto; inoltre dato che T è continua $T(Y) \subseteq Y$ e passando alle chiusure abbiamo la tesi. □

Teorema 24.19. 1. Se (X, T) è minimale ogni $x \in X$ è uniformemente ricorrente.

2. Se x è uniformemente ricorrente, $(\overline{\operatorname{Orb}(x)}, T)$ è minimale.

Dimostrazione. 1. Prendiamo $x \in X$ e U suo intorno aperto.

Lemma 24.20. $X_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U) = X$

Se il Lemma è vero, $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ è un ricoprimento aperto, quindi per compattezza $X = \bigcup_{n=0}^{k} T^{-n}(U)$, quindi $\forall n$ si ha $T^n(x) \in U \vee \ldots \vee T^n(x) \in T^{-k}(U)$, cioè $T^n(x) \in U \vee \ldots \vee T^{n+k}(x) \in U$. Dimostriamo il Lemma.

Dimostrazione. $T(y) \in X_\infty \Rightarrow y \in X_\infty$ per definizione di X_∞. Se, per assurdo, $X_\infty \neq X$, preso un punto $y \in X \backslash X_\infty$ avrei $T(y) \notin X_\infty$, quindi $X \setminus X_\infty$ è T-invariante; dato che è anche chiuso (il complementare è aperto) andrei contro la minimalità di X. □

2. Esercizio. Serve il fatto che lo spazio è regolare (separo i chiusi dai punti).

□

Teorema 24.21 (Birkhoff)**.** Ogni sistema (X, T) ha punti uniformemente ricorrenti.

Dimostrazione. Uso Zorn (a rovescio) e trovo $Y \subseteq X$ chiuso T-invariante minimale. □

Consideriamo ora la mappa di shift $\sigma \colon \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N} \quad \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \oplus 1$. Questa è continua. Se consideriamo il sistema dinamico $(\beta\mathbb{N}, \sigma)$, abbiamo la seguente

Esercizio 24.22. Tfae:

1. I è un ideale sinistro chiuso di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$

2. I è σ-invariante chiuso

Hint. $\forall \mathcal{U} \in I\ \mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \subseteq I \Rightarrow \overline{\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}} \subseteq I \Rightarrow \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \subseteq I$. □

Corollario 24.23. $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro minimale se e solo se è un punto di uniforme ricorrenza in $(\beta\mathbb{N}, \sigma)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 20.1, $\mathcal{U}$ è minimale se e solo se $\forall A \in \mathcal{U}\ \hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\}$ è sindetico, se e solo se $\{n \mid A \in \sqcup_n \oplus \mathcal{U} = \sigma^n(\mathcal{U})\} = \{n \mid \sigma^n(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_A\}$ è sindetico. □

Proposizione 24.24. Se assumiamo la proprietà di $\mathfrak{c}^+$-enlargement, ${}^*\mathbb{N}$ con la S-topologia è compatto.

Dimostrazione. Data $\{C_i \mid i \in I\}$ famiglia di chiusi con la FIP, $C_i = \bigcap_{j \in I_i} {}^*A_{i,j}$, per FIP ed enlargement $\bigcap_{i,j} {}^*A_{i,j} \neq \emptyset$. □

Esercizio 24.25. Questo spazio non è T0, però è regolare (cioè separo i chiusi dai punti).

Il punto è che ipernaturali diversi danno lo stesso ultrafiltro, e ${}^*\mathbb{N}/\underset{u}{\sim} = \beta\mathbb{N}$. Comunque visto che è regolare in realtà ci si può fare dinamica sopra, molte proprietà importanti dipendono non tanto dall'essere Hausdorff ma dall'essere regolare. In ${}^*\mathbb{N}$ ci sono delle buone proprietà algebriche (si comporta praticamente come $\mathbb{N}$), quello che si perde rispetto a $\beta\mathbb{N}$ è –come dicevamo prima– il fatto di essere uno spazio di Hausdorff. Nel sistema $({}^*\mathbb{N}, s)$, dove s è il successore, i punti di uniforme ricorrenza sono gli α tali che $\sqcup_\alpha$ è minimale: in altre parole se ${}^*A$ contiene α allora $A_\alpha = \{n \mid \alpha + n \in {}^*A\}$ è sindetico sempre per il Teorema 20.1, e dato che $\alpha + A_\alpha \subseteq {}^*A$ per l'Esercizio 22.3 abbiamo $A_\alpha \trianglelefteq A$, e quindi A è sindetico a tratti per l'Esercizio 22.2 (comunque che gli elementi dei minimali sono sindetici a tratti lo sapevamo già).

$({}^*\mathbb{N}, s)$ è universale, nel senso che dato (X, T) sistema dinamico, $\forall x \in X$ posso definire $\varphi_x \colon {}^*\mathbb{N} \to X$ dove $\varphi_x(\nu) = \operatorname{st}({}^*T^\nu(x))$ (X è compatto se e solo se $\forall \xi \in {}^*X\ \exists x\ \xi \approx x \in X$, cioè $\xi \in \bigcap_{U \in I(x)} {}^*U$) e il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} {}^*\mathbb{N} & \xrightarrow{s} & {}^*\mathbb{N} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_x} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_x} \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Articoli per seminari e altro materiale disponibile su

`www.dm.unipi.it/~dinasso/ULTRABIBLIO`

Venerdì alle 9:30 davanti alla M1 si propongono i seminari.

25 21/12

25.1 Seminari

Date suggerite: 8/1, 14/1, 15/1, 13/2, 18/2, 22/2, 23/2 (sì, è sabato)

Nota: sulle home page di Vitaly Bergelson e Neil Hindman c'è un sacco di roba.

1. Lemma di regolarità di Szemeredi (Tao - Non standard analysis as a completion...)

2. Teorema di Roth ($\mathrm{BD}(A) > 0 \Rightarrow A$ è 3-AP, cioè in A c'è una progressione aritmetica lunga 3)

3. Van der Waereden dimostrato in maniera elementare $\mathcal{U}$ idempotente $\mathcal{U} \oplus 2\mathcal{U}$ (3-AP)

4. Hales-Jewett (Protasov)

5. Teorema di Rado (singola equazione) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ PR $\Leftrightarrow \exists \emptyset \neq J \subseteq \{1, \ldots, n\}\ \sum_{i \in J} a_i = 0$

6. Beiglböck - Arithmetic progressions in abundance by combinatorial tools (2009)

7. Beiglböck - An ultrafilter approach to Jin's theorem (2010)

8. Gruppi amenabili: (Bergelson - Ergodic Ramsey theory - an update (1996)) (non necessariamente un seminario solo)

   (a) Definizioni equivalenti. Successioni di Føluer
   (b) ogni gruppo abeliano è amenabile.
   (c) Nozioni di sindetico, spesso, sindetico a tratti (Bergelson-Hindman - Partition regular structures contained in large sets are abundant (2001)) (Beiglboeck - Arithmetic progressions in abundance by combinatorial tools (2009))

   (Bergelson - Ergodic Ramsey theory - an update (1996))

9. Insiemi centrali

10. Blass - Ultrafilters where topological dynamic = algebra = combinatorics (1993)

11. Bergelson - Sets of recurrence of Zm-actions and properties of sets of differences in Zm (1985)

12. Bergelson-Ruzsa - Sumsets in difference sets (2009)

13. Articoli di Renling Jin, qualcosa ci si tira fuori:

    (a) Jin - Nonstandard methods for additive and combinatorial number theory a survey

    (b) Jin - Nonstandard methods for upper Banach density problems (2001)

    (c) Jin - Ultrapower of N and density problems (2010)

14. Hindman - Monocromatic sums equal to products in N (2011)

15. Bergelson - Minimal idempotents and ergodic Ramsey theory (2003)

16. Hindman - Partition regularity of matrices (2007)

17. Furstenberg - Poincare recurrence and number theory (1981)

18. Teorema di Kronecker e generalizzazioni (con ultrafiltri) (in qualche articolo di Bergelson)

19. Teoria degli insiemi:

    (a) $\leq_{\mathrm{RK}}$ esistenza di ultrafiltri incomparabili (Kunen - Ultrafilters and independent sets)

    (b) Usando l'ipotesi del continuo dimostrare che esistono ultrafiltri selettivi, o che esistono P-point non selettivi,...

20. Libro di Hindman-Strauss (c'è un botto di roba), ad esempio

    (a) $\exists \mathcal{U}$ di Hindman non idempotenti

    (b) $K(\beta\mathbb{N})$ non è chiuso

    (Hindman - Simultaneous idempotents in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$)

21. Da verificare: Blü mlinger TRANS AMS "Levy group action and invariant measures in $\beta\mathbb{N}$"

    $$\mathcal{D} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \mid \mathcal{U}\text{unif. ric. nel s.d.t.}(\beta\mathbb{N}, \mathcal{G})\}$$

    dove

    $$\mathcal{G} = \left\{\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ permutazioni} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in [1, n] \mid \sigma(k) > n\}|}{n} = 0\right\}$$

Niente slides, ma un resoconto scritto (un paio di pagine).