Attenzione: madonne volanti

Prima di iniziare a rivolgere insulti diretti alla madre dell'autore di questi appunti, è bene sapere un paio di cosette.

Cosa *non* sono questi appunti

1. Un libro di testo. Se vi viene la malsana idea di usare questa cinquantina di pagine come unico supporto per preparare T.A.C. (ora la seconda parte di Geometria 2), sentitevi liberi di farlo ma sappiate che:

    (a) rischiate di non capirci un cazzo;

    (b) rischiate di trovare oggetti di cui non è presente la definizione (vedi punto 3);

    (c) né io né mia madre siamo responsabili del vostro eventuale fallimento all'esame.

2. Degli appunti presi a lezione. Sono stati partoriti in Aula Studenti, principalmente di notte, assumendo dosi piuttosto massicce di nicotina, caffeina ed etanolo. Tutto ciò per dire che se volete sapere cosa è stato fatto a lezione e cosa no, questi appunti *non* possono aiutarvi.

3. Completi. Per quanto detto al punto 2, manca un bel po' di roba, fra cui diverse definizioni, teoremi e lemmi che possono tornarvi utili (tipicamente definizioni come quella di "spazio connesso per archi" e teoremi del tipo "un lato del triangolo è omotopo all'unione degli altri due" e robe del genere).

4. Cosa più importante: **questi appunti non sono nati per essere divulgati**. Sono pienamente consapevole dello sforzo creativo necessario a partorie la mole di bestemmie necessaria a (ed inevitabile nello) studiare su materiale scritto col culo, ma quando ho scritto queste note l'ho fatto per me, quindi non mi sono assolutamente posto il problema di renderle intellegibili a terzi. Se non vi piacciono o non ci capite un cazzo, sentitevi liberi di ignorarle o, se siete particolamente masochisti, di modificarle a vostro piacimento.

5. Rispettosi del buon gusto. Ma questo dovreste averlo già capito.

Cosa sono questi appunti

1. In sostanza sono i capitoli dal 10 a parte del 14 del Manetti (Topologia, Springer) e dall'1 al 6 del Lang (Complex Analysis, Springer), con la scrematura di alcune parti che ritenevo particolarmente banali o che non erano nel programma (quando ho fatto l'esame io, vedi punto 2) e

con l'aggiunta di cose piuttosto a caso. Il tutto riscritto a *mio* gusto. Se vi fa cagare, vi capisco, ma ancora una volta in questo caso mia madre non c'entra niente.

≪Hey, come sarebbe "capitoli del Lang"? A lezione ci hanno detto di usare il Cartan.≫ Sì, ma il Cartan fa cagare. Magari sarà stato un bel libro all'epoca, ma è un libro di un secolo fa. Letteralmente. A me è piaciuto di più il Lang per tutta una serie di motivi, e se proprio volete sentirvi un pippone su questa cosa sentitevi liberi di chiedermelo. Attenzione però che gli argomenti trattati e i risultati presenti non sono esattamente gli stessi, quindi come al solito lasciate mia madre in pace e sentitevi liberi di integrare, modificare e stuprare a piacimento questo file.

2. Come conseguenza del fatto che alcune dimostrazioni sono varianti su quelle dei libri di cui al punto 1, ma sopratutto del fatto che sono un idiota, questi appunti sono probabilmente pieni di errori. Spero di no, ma in ogni caso non date per buono che quello che ci sia scritto qui sia vero senza sbatterci un minimo la testa sopra. Se ne trovate, magari segnalatemelo che li correggo (se volete correggerli voi e mandarmi il .tex tanto meglio).

3. Nonostante tutto quanto detto sopra, potreste trovare queste righe utili per vedere le cose in maniera lievemente diversa, o per avere un riassunto dei risultati principali e relative dimostrazioni da riguardare una volta assimilate piuttosto bene le cose. In sostanza non dovrebbero essere le prime cose che leggete in materia, ma potrebbe giovarvi guardarle in parallelo a testi più seri. Se non vi giova, cazzi vostri. Del resto ammecheccazzomenefregammè, io c'ho il diesel.[1]

Detto ciò, se trovate sto mucchio di roba utile sappiate che farmelo sapere farebbe un sacco bene alla mia autostima, e se proprio vi sentite in debito accetto pagamenti solo sotto forma di alcolici. Se avete delle critiche ben precise al tutto fatemelo sapere assolutamente, e se volete modificare/estedere questo tutto sentitevi liberi di farlo e, se volete, di farmelo sapere.

Buon Disagio,

Rosario "Mufasa" Mennuni

P.S.: Ascoltate www.radiocicletta.it

[1] Cfr. Maccio Capatonda - Italiano Medio

1 Omotopia portami via

Teorema 1.1. In uno spazio localmente connesso per archi le componenti connesse per archi:

1. sono aperte;
2. coincidono con le componenti connesse.

Dimostrazione. Per 1 data la componente connessa per archi di x basta prendere un intorno e saldare i cammini. Per 2 si considera che la componente connessa per archi $A(x)$ è il complementare dell'unione delle altre $A(y)$ che sono aperte e quindi è chiusa. L'inclusione non banale con $C(x)$ segue dal fatto che $A(x)$ è clopen e interseca $C(x)$. □

Teorema 1.2. $f_0 \sim f_1$, $g_0 \sim g_1 \Rightarrow g_0 f_0 \sim g_1 f_1$

Dimostrazione. Se le omotopie sono F e G, l'omotopia tra le composizioni è $G(F(x,t),t)$. □

Definizione 1.3. $f : X \to Y$ è un' *equivalenza omotopica* se

$$\exists g : Y \to X \quad fg \sim \mathrm{Id}_Y,\, gf \sim \mathrm{Id}_X$$

.

Teorema 1.4. Se f e g sono applicazioni continue $X \to Y$ omotope, allora $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Se f è un'equivalenza omotopica, $\pi_0(f)$ è bigettiva.

Dimostrazione. Per il primo punto basta considerare i cammini fra i punti dati dall'omotopia. Il secondo segue direttamente dall'esistenza dell'inversa omotopica. □

Teorema 1.5. Se $Y \subset X$ è un retratto per deformazione, l'inclusione i è un'equivalenza omotopica.

Dimostrazione. La deformazione R è l'omotopia fra Id_X e $i \circ r$, dove la retrazione r è $R(x,0)$. L'inversa omotopica di $i \circ r$ è $r \circ i$. □

2 U pi iun d mamt

Lemma 2.1. Se α è un cammino e $\varphi : I \to I$ fissa 0 e 1, allora $\alpha(t) \sim \alpha(\varphi(t))$.

Dimostrazione. L'omotopia è $F(t,s) = \alpha(s\varphi(t) + (1-s)t)$. □

Questo lemma serve a fare tutte le porcate possibili su I per riparametrizzare i cammini a piacimento e far vedere cose come $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$, o che l'inversione si comporta come deve, o che se spezzo un cammino a metà la giunzione delle due metà è omotopa al cammino originale, eccetera eccetera. Si fa tutto parametrizzando da 0 a 1/2 e da 1/2 a 1 e trucchi analoghi.

Lemma 2.2. Se f è continua si ha che

1. $\alpha \sim \beta \Rightarrow f\alpha \sim f\beta$
2. $f(\alpha * \beta) = f\alpha * f\beta$
3. $i(f(\alpha)) = f(i(\alpha))$

(ovviamente se la giunzione e l'omotopia di cammini hanno senso).

Dimostrazione. Se F è un'omotopia di cammini lo è anche fF e giunzione, inversione e troiai vari si fanno sul dominio quindi commutano con la composizione con applicazioni continue. $\square$

Lemma 2.3. Se γ è un cammino da a a b e definiamo per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$

$$\gamma_\sharp([\alpha]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

allora $\gamma_\sharp$ è un isomorfismo fra $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(X, b)$.

Dimostrazione. Basta fare la verifica che è un omomorfismo e notare che ha come inverso $i(\gamma)_\sharp$. $\square$

Teorema 2.4. $\pi_1(X \times Y, (a, b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$

Dimostrazione. I cammini e le omotopie nel prodotto sono univocamente determinati dalle loro componenti. La bigezione naturale fra i cammini da un lato e dall'altro induce un isomorfismo fra i π_1. $\square$

Teorema 2.5. Se A è un retratto di X, $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è iniettiva. Se è un retratto per deformazione è anche surgettiva (e quindi è un isomorfismo).

Dimostrazione. Se esiste in X un'omotopia F tra un cammino α interamente contenuto in A e il cammino costante (quindi $[\alpha] \in \mathrm{Ker}(i_*)$) e r è una retrazione, rF è un'omotopia interamente contenuta in A, quindi α è omotopo al cammino costante anche in A è $\mathrm{Ker}(i_*)$ è banale.

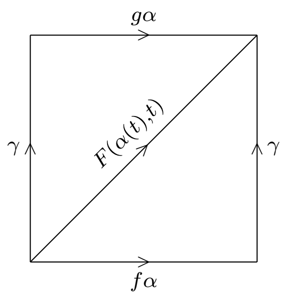
Se R è una deformazione di X su A e r è la corrispondente retrazione, dato un cammino α in X si ha che $R(\alpha(t), s)$ è un omotopia fra lui e $r\alpha$, quindi $i_*([r\alpha]) = [\alpha]$ e questo dimostra la surgettività. $\square$

Lemma 2.6. Se $f \overset{F}{\sim} g$ e $\gamma \in \Omega(Y, f(a), g(a))$ è definito come $\gamma(t) = F(a, t)$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X, a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\
\pi_1(Y, f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\sharp"] & & \pi_1(Y, g(a))
\end{tikzcd}$$

commuta.

Dimostrazione. Se F è l'omotopia fra f e g, basta notare che per ogni $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ sia $\gamma * g\alpha$ che $f\alpha * \gamma$ sono omotope a $F(\alpha(t), t)$ (vedi disegnino).



$\square$

Lemma 2.7. Se $g : X \to X$ è continua e omotopa a Id_X, $g_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Basta usare il lemma precedente con $f = \mathrm{Id}_X$. $\square$

Teorema 2.8. Se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, per ogni $a \in X$ f_* è un isomorfismo.

Dimostrazione. Se g è un'inversa omotopica di f, consideriamo

$$\pi_1(X, a) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(a)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, gf(a)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, fgf(a))$$

allora per il lemma precedente f_*g_* e g_*f_* sono isomorfismi. Dato che sono in particolare iniettive lo sono anche f_* e g_*. Dato che g_*f_* è surgettiva, possiamo considerare per ogni $y \in \pi_1(Y, f(a))$ un x tale che $gf(x) = g(y)$, e per iniettività di g si ha $f(x) = y$. Allora f_* è surgettiva e quindi un isomorfismo. $\square$

Teorema 2.9 (del numero di Lebesgue)**.** Siano Y uno spazio metrico compatto, $f : Y \to X$ continua e $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora

$$\exists \delta > 0 \quad \forall y \in Y \quad \exists A \in \mathcal{A} \quad f(B(y, \delta)) \subset A$$

Dimostrazione. Dato che $f(Y)$ è compatto in X possiamo trovare $A_1, \dots, A_n$ tali che $f(Y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Consideriamo i $C_i = f^{-1}(X \setminus A_i) = Y \setminus f^{-1}(A_i)$, le funzioni distanza $d_i(y) = \inf \{d(z, y) \mid z \in C_i\}$ e la funzione $g(y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(y)$. Notiamo ora che g è continua sul compatto Y. Prendiamo ora $\delta = \min g$, che è non nullo in quanto $\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_i = \emptyset$. Preso un qualunque punto y la sua distanza dal chiuso C_i più lontano è almeno δ, quindi $B(y, \delta) \subset f^{-1}(A_i)$. $\square$

Teorema 2.10 (Van Kampen-prima parte)**.** Se A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi, $X = A \cup B$, $x_0 \in A \cap B$ e $f : A \to X$, $g : B \to X$ sono le inclusioni, allora $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $f_*(\pi_1(A, x_0))$ e $g_*(\pi_1(B, x_0))$.

Dimostrazione: "Ma io ho chiuso la macchina?" Dato un $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ usiamo il Teorema del numero di Lebesgue per trovare un $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni i si ha $\alpha_i = \alpha_{|\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \subset A$ oppure $\alpha_i \subset B$. Consideriamo ora gli $x_i = \alpha\left(\frac{i}{n}\right)$ e consideriamo dei cammini

$$\beta_i \in \begin{cases} \Omega(A \cap B, x_i, x_0) & \text{se} \quad x_0 \in A \cap B \\ \Omega(A, x_i, x_0) & \text{se} \quad x_0 \in A \\ \Omega(B, x_i, x_0) & \text{se} \quad x_0 \in B \end{cases}$$

che esistono per ipotesi. Siano ora $\gamma_i = i(\beta_{i-1}) * \alpha_i * \beta_i$, con la convenzione che $\beta_0 = \beta_n = 1_{x_0}$. Ogni γ_i è per costruzione contenuto interamente in A o in B e chiaramente vale $\alpha \sim \gamma_1 * \ldots * \gamma_n$. □

Teorema 2.11. $\forall n \geq 2 \ \pi_1(S^n) = \{e\}$

Dimostrazione. Possiamo scrivere S^n come $S^n \backslash N \cup S^n \backslash S$, dove $N = (1, 0, \ldots, 0)$ e $S = (0, \ldots, 0, 1)$. Ognuno dei due aperti è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ che è convesso e quindi semplicemente connesso. L'intersezione è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$ meno un punto, che per $n \geq 2$ è connesso per archi. Per il Teorema di Van Kampen $\pi_1(S^n)$ è allora generato da due elementi omotopicamente banali ed è quindi banale. □

Teorema 2.12. Per $n \geq 3$ il complementare in $\mathbb{R}^n$ di $m \in \mathbb{N}$ punti è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Per $m = 0$ lo spazio è semplicemente connesso e per $m = 1$ si deforma su S^{n-1}. Ora per induzione su m. Prendiamo $p_1 \neq p_2$ e consideriamo un'applicazione lineare tale che $f(p_1) < f(p_2)$ e i due aperti $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < f(p_2)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > f(p_1)\}$. A, B e $A \cap B$ sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ meno k punti con $k < m$ e l'ipotesi induttiva conclude. □

Teorema 2.13. $\forall n \in \mathbb{N} \ \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{e\}$

Dimostrazione. Per induzione su n, notando che per $n = 0$ lo spazio ha un solo punto. Per il passo induttivo basta considerare come aperti $A = \{[x_0, \ldots, x_n] \mid x_0 \neq 0\}$ che è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ secondo la mappa $[x_0, y] \mapsto \left(\frac{y}{x_0}\right)$ e $B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \ldots, 0]\}$ che si deforma sull'iperpiano $x_0 = 0$, per ipotesi induttiva semplicemente connesso, secondo la mappa $([x_0, y], t) \mapsto [tx_0, y]$. L'intersezione è omeomorfa a $\mathbb{C}^n$ meno un punto ed è quindi connessa per archi. □

3 Rivesticazzi

Definizione 3.1. Un *rivestimento* $p : E \to X$ è un'applicazione continua e surgettiva tale che X è connesso e localmente connesso per archi ed ogni punto $x \in X$ è contenuto in un aperto banalizzante, cioè un aperto connesso V tale che per ogni U componente connessa di $p^{-1}(V)$ si abbia che $p_{|U}$ è un omeomorfismo.

Teorema 3.2. Se $p : E \to X$ è un rivestimento e X è connesso e localmente connesso per archi, allora:

1. p è un omeomorfismo locale (in particolare è aperto)
2. $\forall x, y \in X \ \left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(y)\right|$
3. $\forall Y \subset X$ connesso e localmente connesso per archi $p_{|p^{-1}(Y)}$ è ancora un rivestimento.

Dimostrazione.

1. Basta prendere un aperto banalizzante V e la restrizione di p a una componente connessa di $p^{-1}(V)$ è un'omeomorfismo locale per definizione. Inoltre gli aperti banalizzanti ricoprono X (sempre per definizione).
2. Usiamo la connessione di X e, fissato x_0, facciamo vedere che $A = \left\{x \in X \mid \left|p^{-1}(x)\right| = \left|p^{-1}(x_0)\right|\right\}$ è clopen (ed è ovviamente non vuoto). Per fare questo notiamo che preso un punto $x \in X$ esiste un aperto banalizzante V che lo contiene. A questo punto la fibra di ogni punto di V interseca ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ in un solo punto e questo dimostra che le fibre dei punti di V hanno tutte la stessa cardinalità, e che quindi vale $V \subset A$ oppure $V \subset X \setminus A$. Quindi sia A che il suo complementare sono intorno di ogni loro punto e sono quindi aperti.
3. La restrizione rimane continua e surgettiva, quindi bisogna solo far vedere che ogni $y \in Y$ è contenuto in un aperto banalizzante $A \cap Y$ che ricaveremo "ritagliandolo" da un aperto banalizzante $V \subset X$. Dato che in $V \cap Y$ le componenti connesse sono aperte (è localmente connesso per archi), prendiamo un aperto B tale che $B \cap Y$ è (in $V \cap Y$) la componente connessa di y. Prendiamo ora come A la componente connessa di $B \cap Y$ in $B \cap V$: A è ancora un aperto banalizzante di p (ma non sappiamo ancora che lo è per la restrizione $p_{|p^{-1}(Y)}$) che contiene y, perché è aperto, connesso ed è contenuto in un aperto banalizzante. Inoltre $A \cap Y$ è connesso, dato che è uguale a $B \cap Y$ e se le A_i sono le componenti connesse di $p^{-1}(A)$, le componenti connesse di $p^{-1}(A \cap Y)$ sono le $A_i \cap p^{-1}(Y)$ e $\forall i \ p_{|A_i \cap p^{-1}(Y)}$ è un omeomorfismo perché restrizione di un omeomorfismo.

$\square$

Teorema 3.3. Se $G \subset \mathrm{Omeo}(E)$ agisce in modo propriamente discontinuo, E è localmente conneso per archi e E/G è connesso, la proiezione al quoziente è un rivestimento.

Dimostrazione. Notiamo che la proiezione al quoziente p è aperta: infatti gli aperti del quoziente sono gli A tali che $p^{-1}(A)$ è aperto in E, e $p^{-1}(p(Z)) = \bigcup\{g(Z) \mid g \in G\}$. Se Z è aperto, quindi, è un'unione di aperti, e da questo segue che $p(Z)$ è aperto. Per un fissato punto $e \in E$ consideriamo ora un aperto U che lo contiene e tale che $\forall g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}\ \ g(U) \cap U = \emptyset$, e possiamo anche supporre che sia connesso (se non lo è, basta prendere la sua componente connessa che contiene e, aperta nell'aperto U, e quindi anche in E, per l'ipotesi di locale connessione per archi). Notiamo che $\{g(U) \mid g \in G\}$ è la famiglia delle componenti connesse di $p^{-1}(p(U))$; questo segue dal fatto che $g(U) \cap h(U) = h(h^{-1}g(U) \cap U) = \emptyset$. Inoltre $p_{|U}$ è continua, aperta e bigettiva su $p(U)$ (segue sempre dal fatto che $h \neq g \Rightarrow h(U) \cap g(U) = \emptyset$) ed è quindi un omeomorfismo. A questo punto basta notare che, $\forall g \in G$, $g(U)$ è omeomorfo a $p(U)$ secondo pg^{-1}. □

Teorema 3.4. Se E è di Hausdorff, $G \subset \mathrm{Omeo}(E)$ agisce liberamente (cioè $\exists\, e \in E\ g(e) = e \Rightarrow g = \mathrm{Id}$) e ogni punto e ha un intorno aperto U tale che $g(U) \cap U \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$, allora G agisce in modo propriamente discontinuo.

Dimostrazione. Dato un punto e vogliamo trovare un suo intorno V tale che $\forall g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}\ \ g(V) \cap V = \emptyset$. Se $\{g_1, \ldots, g_n\}$ è l'insieme dei $\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}$, possiamo trovare (per induzione, intersecando) n aperti disgiunti U_i tali che $g_i(e) \in U_i$. A questo punto possiamo prendere $V = \bigcap g_i^{-1}(U_i) \cap U$. □

Teorema 3.5. Se $p : X \to Y$ è continua e possiede una sezione continua s, allora è un'identificazione. Inoltre, se X è di Hausdorff, s è un'immersione chiusa.

Dimostrazione. Per possedere una sezione, p deve necessariamente essere surgettiva. Inoltre, se la sezione s è continua, dato un insieme A tale che $p^{-1}(A)$ è aperto, si ha che $A = s^{-1}(p^{-1}(A))$ è aperto per continuità e questo dimostra che p è un'identificazione. Dato che s è continua ed iniettiva, per dimostrare che è un omeomorfismo con l'immagine (cioè un'immersione) basta dimostrare che è chiusa. Considerando che $s(C) = s(Y) \cap p^{-1}(C)$ ci si può ridurre a dimostrare che $s(Y)$ è chiuso. Per fare questo usiamo il fatto che uno spazio è di Hausdorff se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto scrivendo $s(Y) = f^{-1}(\Delta)$, dove $f(x) = (x, s(p(x)))$, infatti $x \in s(Y) \Leftrightarrow s(p(x)) = x$. □

La condizione non è sufficiente: $e^{2\pi it} : \mathbb{R} \to S^1$ non ha sezioni continue perché non esistono applicazioni continue e inettive $S^1 \to \mathbb{R}$.

Teorema 3.6. Se $p : E \to X$ è un rivestimento, per ogni aperto banalizzante V esiste un'unica sezione continua $s_e : V \to p^{-1}(V)$ tale che $s_e(p(e)) = e$.

Dimostrazione. Per l'esistenza basta notare che p, in quanto rivestimento, è un omomorfismo locale e quindi p^{-1} ristretta alla componente connessa di e in $p^{-1}(V)$ è una sezione continua su un aperto banalizzante. Per l'unicità basta considerare una sezione continua è un'inversa locale e che –fissata la componente connessa di $p^{-1}(V)$– questa è unica. □

Teorema 3.7 (di unicità del sollevamento)**.** Se $p : E \to X$ è un rivestimento, Y è connesso, $f : Y \to X$ è continua e g, h sono due sollevamenti di f, allora $g = h$ oppure $\forall y \in Y \; g(y) \neq h(y)$.

Dimostrazione. Si sfrutta la connessione di Y facendo vedere che l'insieme $A = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$ è clopen. Dato $y \in Y$, prendiamo un aperto banalizzante V che contiene $f(y)$ e consideriamo le componenti connesse (per archi, aperte) $U_g, U_h \in p^{-1}(V)$ tali che $g(y) \in U_g,\; h(y) \in U_h$. Sia ora $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$, che notiamo essere aperto. A questo punto, se $y \in A$ si ha $g(y) = h(y)$ e quindi $U_g = U_h$. Dato che, se ci restringiamo a $U_g = U_h$, p è iniettiva e deve valere $pg = f = ph$, si ha $\forall w \in W \; g(w) = h(w)$. W è quindi un intorno di y interamente contenuto in A, che è quindi aperto. Se invece $y \notin A$, si ha $U_g \cap U_h = \emptyset$ (altrimenti l'unione sarebbe connessa e $p(g(y)) = p(h(y)) = f(y)$, assurdo perché V è un aperto banalizzante). Dato che $z \in W \cap A \Rightarrow g(z) = h(z) \in U_g \cap U_h$ si ha $W \cap A = \emptyset$ e quindi il complementare di A è aperto. □

Quindi sotto queste ipotesi ogni sollevamento è univocamente determinato dall'immagine di un punto. Notare che i sollevamenti dell'identità sono sezioni continue (che non sempre esistono) e quindi l'esistenza di sollevamenti non è ovvia.

Teorema 3.8 (di sollevamento dei cammini)**.** Se $p : E \to X$ è un rivestimento, $\alpha : I \to X$ è un cammino continuo, $e \in E$ e $p(e) = \alpha(0)$, allora esiste un unico sollevamento $\alpha_e : I \to E$ tale che $\alpha_e(0) = e$.

Dimostrazione. L'unicità l'abbiamo dimostrata già nel caso generale. Per l'esistenza usiamo il Teorema del numero di Lebesgue per trovare n aperti banalizzanti V_i tali che $\alpha_{|\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \subset V_i$. A questo punto basta prendere come α_e la giunzione delle sezioni continue che otteniamo col Teorema 3.6 su ogni V_i (ovviamente da scegliersi in modo che ogni sezione inizi dove finiva quella precedente). □

Ora vogliamo sollevare le omotopie, e per farlo ci tocca passare dal noiosissimo

Lemma 3.9 (del fastidio)**.** Sia i l'inclusione di $L = \{(t,s) \in I^2 \mid ts = 0\}$ (l'unione di due lati contigui) nel quadrato I^2, $p : E \to X$ un rivestimento, $F : I^2 \to X$, $f : L \to E$ continue e tali che $pf = Fi$. Allora esiste un sollevamento G di F tale che $Gi = f$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^2 \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "G"] & X \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Se l'immagine di F è contenuta in un aperto banalizzante V, dato che $Fi = pf$ e L è connesso si ha $f(L) \subset U$, dove U è una componente connessa di $p^{-1}(V)$. Se $s : V \to U$ è l'inversa locale di p, allora possiamo prendere $G = sF$. Dato che $pG = psF = F$ si ha che G solleva F. Inoltre $f = spf = sFi = Gi$ e siamo apposto. Per il caso generale basta rifare lo stesso ragionamento "a pezzi" e poi incollare. In dettaglio, si usa il Teorema del Numero di Lebesgue per trovare n^2 aperti banalizzanti V_{ij} ognuno dei quali contenga l'immagine di F ristretta a $Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$. A questo punto ordiniamo $\mathbb{N}^2$ in maniera che $(i,j) \leq (h,k)$ se $i + j < h + k$ oppure se $i+j = h+k$ e $j \leq k$ e notiamo che $Q_{hk} \cap \left(L \cup \bigcup_{(i,j)<(h,k)} Q_{ij}\right)$ è l'unione di due lati contigui di $Q(h,k)$. Possiamo quindi costruire G per ricorsione "incollando" il prossimo quadratino prendendo come f la G_{ij} estesa durante i passi precedenti ristretta a L_{ij}. $\square$

Teorema 3.10 (di sollevamento dell'omotopia)**.** Se $p : E \to X$ è un rivestimento, $F : I^2 \to X$, $\alpha : I \to E$ sono continue e $\forall t\ F(t,0) = p(\alpha(t))$, allora esiste un unico G che solleva F e tale che $\forall t\ G(t,0) = \alpha(t)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & E \arrow[d, "p"] \\ I^2 \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "G"] & X \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Come prima l'unicità è gratis perché I^2 è connesso. Per l'esistenza consideriamo il cammino $s \mapsto F(0,s)$ e il suo sollevamento β tale che $\beta(0) = \alpha(0)$. Incollandolo con α troviamo una $f : L \to E$ continua e tale che $f(t,0) = \alpha(t)$ e $f(0,s) = \beta(s)$. A questo punto la tesi segue dal Lemma del fastidio. $\square$

Teorema 3.11 (di srotolamento)**.** Siano $p : E \to X$ un rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, $e \in E$ tale che $p(e) = a$. Allora $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha_e \sim \beta_e$ (in particolare questi due devono finire nello stesso punto).

Dimostrazione. La "$\Leftarrow$" è banale perché $\alpha = p\alpha_e$ e $\beta = p\beta_e$. Se f è l'omotopia fra α_e e β_e basta considerare pf. Per la "$\Rightarrow$" bisogna usare il Teorema di sollevamento dell'omotopia. Nel dettaglio, se F è l'omotopia fra α e β, e quindi vale $F(0, t) = \alpha(t)$, $F(1, t) = \beta(t)$, $F(s, 0) = a$, $F(s, 1) = b$. Usiamo il Teorema di sollevamento dell'omotopia per trovare G tale che $G(s, 0) = e$. $G(s, 1)$ deve essere costante perché solleva il cammino costante 1_b e per l'unicità del sollevamento $G(0, t) = \alpha_e(t)$ e $G(1, t) = \beta_e(t)$. G è quindi un'omotopia di cammini. $\square$

Teorema 3.12. Se uno spazio è semplicemente connesso ogni suo rivestimento connesso è banale (cioè è un omeomorfismo).

Dimostrazione. Dato che i rivestimenti sono aperti e surgettivi basta dimostrare l'iniettività. Se $p : E \to X$ e $p(e) = p(u) = x$, basta considerare un cammino $\alpha : I \to E$ che esiste per l'ipotesi di connessione (e locale connessione per archi, sottaciuta). Dato che X è semplicemente connesso $p\alpha$ è omotopo al cammino costante, e per il Teorema di srotolamento lo è anche α. Quindi $e = u$. $\square$

Sappiamo quindi che S^1 non è semplicemente connesso perché ha un rivestimento non banale.

Teorema 3.13. Se $p : E \to X$ è un rivestimento e $f : S^2 \to X$ è continua, $\forall y \in S^2$, $\forall e \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento g di f tale che $g(y) = e$.

Dimostrazione. Consideriamo l'identificazione $q : I^2 \to S^2$ che collassa il bordo su y ed è un omeomorfismo fra la parte interna del quadrato e il complementare di y. Per il Teorema di sollevamento dell'omotopia esiste h che solleva fq e vale e su un lato del quadrato (basta prendere il cammino costante e come l'α del teorema). A questo punto consideriamo che una generica fibra F di q è connessa (è un punto oppure il bordo) e che quindi per $h_{|F}$ vale il Teorema di unicità del sollevamento, ma un (il) sollevamento è ovviamente quello costante. Dato che $h_{|F}$ è costante, per la proprietà universale delle identificazioni, esiste $k : S^2 \to E$ continua tale che $kq = h$. Allora possiamo scrivere $pkq = ph = fq$ e, per la surgettività di q, si ha $pk = f$ e k è un sollevamento di f.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "fq"] & E \arrow[d, "p"] \\
S^2 \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, bend left=80, "\mathbf{k}"] & X
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 3.14 (di Borsuk)**.** Non esistono $f : S^2 \to S^1$ continue dispari.

Dimostrazione. Consideriamo il rivestimento $p : \mathbb{R} \to S^1 \quad p(t) = e^{2\pi it}$ e usiamo il teorema precedente per sollevare f ad un'applicazione continua $g : S^2 \to \mathbb{R}$. L'applicazione $h(x) = g(x) - g(-x)$ è continua ed ha come immagine un connesso, quindi un intervallo A. Fissato $y \in S^2$ si ha $h(y), h(-y) \in A$ e quindi per convessità $A \ni \frac{h(y)}{2} + \frac{h(-y)}{2} = 0$. Quindi, se $x \in h^{-1}(0)$, si ha $g(x) = g(-x)$ e, siccome $f = pg$, $f(x) = f(-x)$. Ma $0 \notin S^2$ e quindi $f(x) \neq -f(-x)$. □

Teorema 3.15. Se $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ è continua, $\exists x \in S^2 \; g(x) = g(-x)$.

Dimostrazione. In caso contrario ci sarebbe una contraddizione col Teorema di Borsuk data dall'applicazione $f(x) = \dfrac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$. □

Teorema 3.16. Se $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ è continua e $\forall x \in S^2 \; f(-x) = -f(x)$, esiste $x \in S^2$ tale che $f(x) = 0$.

Dimostrazione. Applicando il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - f(-x)$ possiamo trovare un punto dove $f(x) - f(-x) = g(x) = g(-x) = -f(-x) - f(x)$ e quindi $f(x) = 0$. □

Teorema 3.17. Se $A \neq \emptyset$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, ogni applicazione continua $f : A \to \mathbb{R}^2$ non è iniettiva.

Dimostrazione. A contiene un sottospazio omeomorfo a S^2, sul quale vale quindi il Teorema 3.15. □

Teorema 3.18. Non esistono applicazioni continue $r : D^2 \to S^1$ dispari sul bordo, cioè tali che $\forall x \in S^1 \; r(-x) = -r(x)$.

Dimostrazione. L'applicazione che contraddice il Teorema di Borsuk è

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} r(x_1, x_2) & \text{se} \quad x_3 \geq 0 \\ -r(-x_1, -x_2) & \text{se} \quad x_3 \leq 0 \end{cases}$$

□

In particolare D^2 non si retrae sul bordo, ma questo potevamo già dimostrarlo notando che ci un'eventuale retrazione indurrebbe un'iniezione di un π_1 non banale in uno banale.

Teorema 3.19. (del punto fisso di Brouwer) Ogni funzione continua $f : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso.

Dimostrazione. L'idea è usare una f senza punti fissi per retrarre il disco sul bordo. La retrazione è $r(x) = x + t \cdot \frac{(x-f(x))}{\|(x-f(x))\|}$, dove t è scelto non negativo e tale che $r(x) \in S^1$. Graficamente, è l'intersezione del bordo del disco con la semiretta con origine in $f(x)$ che va verso x ed è ben definita se e solo se f non ha punti fissi, infatti bisogna prendere

$$t = -(x \cdot g(x)) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}$$

dove $g(x) = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ e l'espressione per t esce fuori imponendo

$$r(x) = x + tg(x) \qquad t \geq 0 \qquad \|r(x)\| = 1$$

. $\square$

Teorema 3.20. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è continua ed esistono $0 < a < 1$, $b > 0$ tali che $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $\|x - f(x)\| \leq a\|x\| + b$, f è surgettiva.

Dimostrazione. Se p non appartiene all'immagine di f, prendiamo $R > 0$ abbastanza grande e tale che $aR + b < R - \|p\|$. Se D ed S sono il disco e la circonferenza di raggio R, definiamo $R : D \to S \quad r(x) = p + t(f(x) - p)$ con $t \geq 0, \|r(x)\| = R$, cioè l'intersezione di S con la semiretta che parte da p e passa per $f(x)$. Se $x \in S$ si ha

$$\begin{aligned} &\|x - f(x)\| \leq a\|x\| + b \leq aR + b \\ <&R - \|p\| = \|x\| - \|p\| \leq \|x - p\| \end{aligned}$$

Se si avesse $r(x) = -x$ seguirebbe

$$\begin{aligned} &-x = p + t(f(x) - p) \\ &-x(t+1) = p + t(f(x) - x) - tp \\ &R(t+1) < (1-t)R + t\|x - p\| \leq (1 - t + t)R \\ &t + 1 < 1 \end{aligned}$$

e quindi $t < 0$, assurdo. Quindi $\forall x\ r(x) \neq -x$ e la funzione $-r(x) : D^2 \to D^2$ non ha punti fissi. $\square$

Teorema 3.21 (del cocomero)**.** Dato un cocomero di massa finita ed un suo punto c, esiste un piano passante per c che divide sia la polpa che i semi in parti dello stesso peso.

Dimostrazione. Basta fissare l'origine in c e definire $f(x) = (p_+ - p_-, s_+ - s_-)$, dove p_+ è il peso della polpa contenuta nel semipiano $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid (x \cdot y) > 0\}$, p_- il peso di quella contenuta in $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid (x \cdot y) < 0\}$, e s_+, s_- sono l'analogo per i semi. A patto di definire ragionevolmente il "cocomero" ed il "peso", f è continua e vale $f(-x) = -f(x)$, quindi per il Teorema 3.16 c'è un punto $x_0 \in f^{-1}(0)$ e questo dimostra il teorema. □

Teorema 3.22 (del pane, prosciutto e formaggio)**.** Se $B, H, C \subset \mathbb{R}^3$ sono aperti limitati e B è connesso, esiste un piano che divide ognuno dei tre in due parti dello stesso volume.

Dimostrazione. Dall'assoluta continuità della misura di Lebesgue segue che $\forall x \in S^2$ esiste un piano con giacitura ortogonale a x che divide B in due parti dello stesso volume, e dalla connessione di B segue che è unico. Si può allora ragionare alla stessa maniera del Teorema del cocomero considerando $f(x) = (h_+ - h_-, c_+ - c_-)$, che eredità la continuità dalla misura di Lebesgue (detto col culo, muovendo di poco il piano si affetta in due parti che si discostano poco). □

Teorema 3.23 (di Lusternik-Schnirelmann)**.** Se $A_1, A_2, A_3 \subset S^2$ sono chiusi e ricoprono S^2 esiste un indice i tale che A_i contiene una coppia di punti antipodali.

Dimostrazione. Se $B_i = \{-x \mid x \in A_i\}$, d_Z è la distanza dal chiuso Z e $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$, possiamo definire $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \left(\frac{d_{A_1}(x)}{d_{A_1}(x) + d_{B_1}(x)}, \frac{d_{A_2}(x)}{d_{A_2}(x) + d_{B_2}(x)} \right)$$

che è ovviamente continua e quindi, per il Teorema 3.15, esiste x tale che $f(x) = f(-x)$. Questo implica che, per $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} 0 = & d_{A_i}(x)(d_{A_i}(-x) + d_{B_i}(-x)) - d_{A_i}(-x)(d_{A_i}(x) + d_{B_i}(x)) = \\ & d_{A_i}(x) d_{B_i}(-x) - d_{A_i}(-x) d_{B_i}(x) \end{aligned}$$

ma $d^2_{A_i}(x) = d^2_{B_i}(x)$ e, per positività della distanza, $d_{A_i}(x) = d_{B_i}(x)$, perché per $i \in \{1, 2, 3\}$ vale $d_{A_i}(x) = d_{B_i}(-x)$. Inoltre, per la condizione $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$, queste distanze non possono essere 0. Ma allora, dato che gli A_i ricoprono S^2 e $x \notin A_1 \cup A_2$, deve valere $x \in A_3$. A questo punto basta notare che anche i B_i ricoprono S^2, e che analogamente $x \in B_3$, e questo prova la tesi. □

4 Monodromia in blu

Notazione: $\mathrm{Mon}(e, \alpha)$ è l'applicazione di monodromia e vuol dire $\alpha_e(1)$, mentre $e \cdot [\alpha] = \mathrm{Mon}(e, \alpha)$ indica praticamente la stessa cosa però fatta su un elemento del π_1 (è tutto ben definito grazie al Teorema di srotolamento). Notiamo che valgono $\mathrm{Mon}(e, \alpha * \beta) = \mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(e, \alpha), \beta)$ e $e \cdot ([\alpha][\beta]) = (e \cdot [\alpha])[\beta]$ (ovvio per definizione).

Teorema 4.1 (Kill 'em All)**.** Se $p : E \to X$ è un rivestimento connesso e localmente connesso per archi e $x = p(e)$ si ha che:

1. p_* è inettivo e $p_*(\pi_1(E, e)) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid e \cdot [\alpha] = e\}$.

2. $p^{-1}(x)$ è in bigezione con i laterali destri di $p_*(\pi_1(E, e))$ in $\pi_1(X, x)$.

3. $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x) \quad [\alpha]^{-1} p_*(\pi_1(E, e))[\alpha] = p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha]))$ e i coniugati di $p_*(\pi_1(E, e))$ sono tutti e soli i $p_*(\pi_1(E, u))$ al variare di u nella fibra di x.

Dimostrazione. 1. Per il Teorema di srotolamento $p(\alpha) \sim p(\beta) \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$, dove $\sim$ è l'omotopia di cammini (a estremi fissi) e questo prova l'iniettività. Inoltre $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e)) \Leftrightarrow [\alpha] = [p(\beta)]$, dove $\beta(0) = \beta(1) = e$. Sempre per il Teorema di srotolamento allora $\beta(1) = \alpha_e(1)$, quindi $e \cdot [\alpha] = e$. Se viceversa $e \cdot [\alpha] = e$, allora $[\alpha] = [p(\alpha_e)]$ (e $\alpha_e \in \pi_1(E, e)$ per l'ipotesi fatta).

2. $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta] \Leftrightarrow e \cdot [\alpha][\beta]^{-1} = e \Leftrightarrow [\alpha][\beta]^{-1} \in p_*(\pi_1(E, e))$ per il punto 1, quindi per provare la tesi basta dimostrare la surgettività di $[\alpha] \mapsto e \cdot [\alpha]$. Preso $u \in p^{-1}(x)$ per connessione per archi esiste un cammino γ fra e ed u. Basta quindi considerare che per unicità del sollevamento si ha $p(\gamma)_e = \gamma$ quindi u è l'immagine di $[p(\gamma)]$.

3. L'inclusione "$\subseteq$" si dimostra notando che

$$i(\alpha_e) * \Omega(E, e, e) * \alpha_e \subseteq \Omega(E, e \cdot [\alpha], e \cdot [\alpha])$$

dopodiché si ha

$$\begin{aligned}
[\alpha]^{-1}\, p_*(\pi_1(E, e))\, [\alpha] &\subseteq \quad p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha])) \\
p_*(\pi_1(E, e)) \quad &\subseteq [\alpha]\, p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha]))\, [\alpha]^{-1} \\
[\alpha]\, p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha]))\, [\alpha]^{-1} &\subseteq p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha][\alpha]^{-1})) = p_*(\pi_1(E, e)) \\
p_*(\pi_1(E, e \cdot [\alpha])) \quad &\subseteq [\alpha]^{-1}\, p_*(\pi_1(E, e))\, [\alpha]
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2. $\forall n \geq 2\ \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\forall n \geq 2\ \pi_1(S^n) \cong \{e\}$ e la proiezione al quoziente $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento connesso di grado 2 per il Teorema 3.3. Per il Teorema Kill 'em All allora il sottogruppo banale ha indice 2 in $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$, e i gruppi con due elementi sono tutti isomorfi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Teorema 4.3. Se p, q sono rivestimenti, f, φ sono continue e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

commuta, $\forall e \in E,\ \forall [\alpha] \in \pi_1(X, p(e))\ \varphi(e \cdot [\alpha])) = \varphi(e) \cdot f_*([\alpha])$.

Dimostrazione. X è connesso per definizione di rivestimento e quindi vale l'unicità del sollevamento per f, per cui

$$\begin{aligned} &q(\varphi(\alpha_e)) = f(p(\alpha_e)) = f(\alpha) \\ \Rightarrow &\varphi(\alpha_e(t)) = f(\alpha)_{\varphi(e)} \\ \Rightarrow &\varphi(e) \cdot f_*([\alpha]) = \varphi(e) \cdot [f(\alpha)] = \varphi(\alpha_e(1)) = \varphi(e \cdot [\alpha]) \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. Se G agisce liberamente e transitivamente a sinistra su T, H agisce a destra su T e le azioni sono compatibili, allora $\forall t \in T$ l'applicazione $\theta_t(h) = g \in G \mid g \cdot t = t \cdot h$ è un omomorfismo e $\{h \in H \mid t \cdot h = t\} \lhd H$.

Dimostrazione. Intanto notiamo che θ_t è ben definita perché per transitività $\forall r, s \in T\ \exists g \in G \mid g \cdot r = s$, e se $g \cdot r = s = j \cdot r$ allora $j^{-1}g \cdot r = r$ e dato che l'azione è libera questo implica $j^{-1}g = e$ e quindi $g = j$. Dato che le azioni sono compatibili, si ha che $\forall h, k \in H$

$$\theta_t(hk) \cdot t = t \cdot hk = (\theta_t(h) \cdot t) \cdot k = \theta_t(h) \cdot (t \cdot k) = \theta_t(h) \cdot \theta_t(k) \cdot t$$

Inoltre $\{h \in H \mid t \cdot h = t\} = \operatorname{Ker} \theta_t \lhd H$. □

Lemma 4.5. Se G è un gruppo di omeomorfismi che agisce in modo propriamente discontinuo su E, E/G è connesso e p è la proiezione al quoziente, allora $\forall x \in X$ l'azione sinistra di G su $p^{-1}(x)$ $g \cdot u \mapsto g(u)$ è libera, transitiva e compatibile con l'azione destra di monodromia.

Dimostrazione. Per definizione di topologia quoziente, $\forall u, v \in p^{-1}(x)\ \exists g \mid g(u) = v$, e il fatto che l'azione sia libera segue dal fatto che G agisce in modo propriamente discontinuo. Notiamo adesso che

$$g \cdot (e \cdot [\alpha]) = g(e \cdot [\alpha]) = g(e) \cdot [\alpha] = (g \cdot e) \cdot [\alpha]$$

dove l'uguaglianza centrale segue dal Teorema 4.3 applicato al diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\text{Id}} & X \end{array}$$

□

Teorema 4.6 (telefonato)**.** Se G agisce in maniera propriamente discontinua su E e $X = E/G$ è connesso, si ha l'omomorfismo

$$\theta_e : \pi_1(X,x) \to G \qquad \theta_e([\alpha]) = g \in G \mid g(e) = e \cdot [\alpha]$$

con nucleo $p_*(\pi_1(E,e))$. Inoltre se E è connesso θ_e è surgettivo e quindi

$$G \cong \frac{\pi_1(X,x)}{p_*(\pi_1(E,e))}$$

Dimostrazione. Che θ_e è un omomorfismo con nucleo $p_*(\pi_1(E,e))$ lo abbiamo dimostrato nel Lemma 4.4, applicabile grazie al Lemma 4.5. Se poi E è connesso, ricordando che stiamo considerando spazi localmente connessi per archi, $\forall g \in G$ esiste un cammino β fra e e $g(e)$. Basta allora notare che $\theta_e(p(\beta)) = g$. □

Teorema 4.7. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Basta usare il Teorema telefonato dopo aver scritto S^1 come quoziente di $\mathbb{R}$, che è semplicemente connesso, per $\mathbb{Z}$ tramite l'azione propriamente discontinua $n \cdot x \mapsto n + x$. □

Teorema 4.8. Siano X, Y connessi e localmente connessi per archi, $p : E \to X$ un rivestimento, $f : Y \to X$ continua e $f(y_0) = p(e_0)$. Allora esiste g continua che solleva f se e solo se $f_*\,\pi_1(Y,y_0) \subseteq p_*\,\pi_1(E,e_0)$.

Dimostrazione. Se g esiste, allora dato che $f_* = p_* g_*$, l'immagine di f_* è contenuta in quella di p_*. La dimostrazione della sufficienza si fa costruendo esplicitamente la g e facendo le verifiche. Dato che Y è connesso per archi, $\forall y \in Y\ \exists \alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$. Definiamo $g(y) = \mathrm{Mon}(e_0, f\alpha)$. Se $\beta \in \Omega(Y, y_0, y)$ allora $\alpha * i(\beta) \in \Omega(Y, y_0, y_0)$ e $[f(\alpha) * i(f(\beta))] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$, quindi per il primo punto del Teorema Kill 'em all si ha $e_0 \cdot [f(\alpha) * i(f(\beta))] = e_0$ e quindi $g(y) = \mathrm{Mon}(e_0, f(\alpha)) = \mathrm{Mon}(e_0, f(\beta)) = g(y)$ e la definizione ha senso. Che $f = pg$ è ovvio, quindi resta da verificare che g è continua. Per fare questo, ricopriamo X con una famiglia U_j di aperti banalizzanti. Gli $f^{-1}(U_j)$ sono aperti per continuità e la famiglia V_i delle componenti connesse degli $f^{-1}(U_j)$ è perciò un ricoprimento aperto, e quindi fondamentale, di Y. Basta quindi verificare che $\forall i\ g_{|(V_i)}$ è continua. Se $y_1, y_2 \in V_i$, $\exists \gamma \in \Omega(V_i, y_1, y_2)$. Prendiamo ora $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y_1)$ e consideriamo il sollevamento

$f(\alpha * \gamma)_{e_0}$. Ora, se $\alpha * \gamma$ è parametrizzato in maniera standard, $\forall c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ si ha $(\alpha * \gamma)_{e_0}(c) \in g(V_i)$ per costruzione e buona definizione di g. Quindi $\forall i \;\; g(V_i)$ è connesso è quindi $g(V_i) \subseteq C$, con C componente connessa di $p^{-1}(U_j)$. Ma dato che $f = pg$ e che p è un omeomorfismo se ristretta a una componente connessa di $p^{-1}(U_j)$ si ha che $g_{|(V_i)} = p^{-1} f_{|(V_i)}$ è composizione di funzioni continue ed è quindi continua. $\square$

Teorema 4.9 (Proprietà universale del rivestimento universale)**.** Se $u : \widetilde{X} \to X$ è un rivestimento universale, $p : E \to X$ è un rivestimento e $u(\tilde{x}) = p(e)$ esiste un unico morfismo di rivestimenti Φ tale che $\Phi(\tilde{x}) = e$. In particolare i rivestimenti universali di uno spazio fissato sono tutti isomorfi.

Dimostrazione. La semplice connessione di $\widetilde{X}$ implica che $u_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})) \subseteq p_*(\pi_1(E, e))$, e Φ esiste per il teorema precedente. Se anche p è universale esiste Ψ morfismo di rivestimenti tale che $\Psi(e) = \tilde{x}$. Per connessione di $\widetilde{X}$ ed E, l'unicità del sollevamento implica che $\Phi\Psi$ e $\Psi\Phi$ sono le identità. $\square$

Teorema 4.10. Supponiamo X connesso e localmente connesso per archi. Allora esiste un rivestimento universale di X se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.

Dimostrazione. Se esiste un rivestimento universale $u : \widetilde{X} \to X$, consideriamo l'inclusione i di un aperto banalizzante U in X. Allora $\forall x \in U$

$$i_* \pi_1(U, x) = u_*(s_*(\pi_1(U, x)))$$

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "u"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

ma u_* mappa tutto in $\{0\}$ perché parte dal gruppo banale. Se viceversa X è semilocalmente semplicemente connesso fissiamo $x \in X$ e consideriamo $\widetilde{X} = \bigcup_{y \in X} \pi(X, x, y)$, dove $\pi(X, x, y)$ è $\Omega(X, x, y)$ quozientato per la relazione di omotopia a estremi fissi, e $u : \widetilde{X} \to X \;\; u([\alpha]) = \alpha(1)$, che è chiaramente ben definita e surgettiva. Adesso definiamo una topologia su $\widetilde{X}$ che renda u un rivestimento universale. Prenderemo come base i sottoinsiemi della forma $W(\alpha, U) = \{[\alpha * \beta] \mid \beta \subset U\}$, al variare di $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e di $U \in I(y)$. Questi formano una base di una topologia perché $\forall [\alpha] \in \widetilde{X}$ $[\alpha] \in W(\alpha, X)$, e inoltre $[\gamma] \in W(\alpha, U) \cap W(\beta, V) \Rightarrow [\gamma] \in W(\gamma, U \cap V)$. Con questa topologia u è continua perché $u^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha(1) \in U} W(\alpha, U)$ ed aperta perché $u(W, (\alpha, U)) = U$. A questo punto, se U è un aperto connesso e ogni cammino chiuso in U è omotopicamente banale in X, fissato un $\alpha \mid \alpha(1) \in U$

si ha che $W(\alpha, U) \overset{u}{\to} U$ è un omeomorfismo. Sappiamo già che è continua e aperta, e l'iniettività segue dal fatto che se $u([\alpha * \beta]) = u([\alpha * \gamma])$, allora $i(\beta) * \gamma$ è chiuso in U, quindi β è omotopo a γ in X e di conseguenza $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$. Dato che ogni $x \in X$ ha un intorno U che verifica le proprietà sopra richieste, per verificare che gli U sono aperti banalizzanti basta dimostrare che $W(\alpha, U) = W(\beta, U)$, oppure $W(\alpha, U) \cap W(\beta, U) = \emptyset$, cioè che i $W(\alpha, U)$ sono le componenti connesse di $u^{-1}(U)$. Ma se $\exists [\gamma] \in W(\alpha, U) \cap W(\beta, U)$ si ha $[\alpha] = [\gamma * \alpha']$ e $[\beta] = [\gamma * \beta']$, quindi $[\beta] = [\alpha * i(\alpha') * \beta'] \in W(\alpha, U)$, da cui $W(\beta, U) \subseteq W(\alpha, U)$ e simmetricamente $W(\alpha, U) \subseteq W(\beta, U)$. Resta da dimostrare la connessione (per archi) e la semplice connessione di $\widetilde{X}$. Per la prima, sia $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ (cioè α "troncato" ad s riparametrizzato). Prendiamo come cammino $\hat{\alpha}(s) = [\alpha_s] \in \pi(X, x, \alpha(s))$. Questo è continuo in ogni punto s perché dato un intorno U di $\alpha(s)$ per il Teorema del numero di Lebesgue esiste un $J = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \ni s$ la cui immagine è contenuta in U e chiaramente $\forall j \in J$ $[\alpha_j] \in W(\alpha_s, U)$. Per la seconda, tramite il Teorema Kill'em All possiamo ridurci a dimostrare che $u_*(\pi_1(\widetilde{X}, [1_x])) \cong \{0\}$. Per fare questo consideriamo un cammino $\hat{\gamma} \in \Omega(\widetilde{X}, [1_x], [1_x])$ e $\gamma = u(\hat{\gamma})$. Si ha $\forall s$ $\hat{\gamma}(s) = [\gamma_s]$, e in particolare $[1_x] = \hat{\gamma}(1) = [\gamma]$. Questo dimostra che $u(\hat{\gamma}) = \gamma \sim 1_x$, e quindi la tesi. $\square$

5 Lucy in the sky with Van Kampen

Teorema 5.1 (Van Kampen in versione universale)**.** Siano $X = A \cup B$, con $A, B, A \cap B$ aperti e connessi per archi, $x_0 \in A \cap B$, α, β, f, g le inclusioni. Allora per ogni gruppo G e per ogni coppia di omomorfismi h, k tali che $h(\alpha_*) = k(\beta_*)$ esiste un unico omomorfismo φ che fa commutare il diagramma.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. La prima parte l'abbiamo già dimostrata (Teorema 2.10); sappiamo che $\forall \delta \in \pi_1(X, x_0)$

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in \Omega(A, x_0, x_0) \quad \exists b_1, \ldots, b_n \in \Omega(B, x_0, x_0)$$

$$\delta = f_*(a_1) * g_*(b_1) * \ldots * f_*(a_n) * g_*(b_n)$$

quindi φ deve essere della forma (unica)

$$\varphi(\delta) = h(a_1) * k(b_1) * \ldots * h(a_n) * k(b_n)$$

Che φ è un omomorfismo è ovvio. Se dimostriamo che è una buona definizione siamo apposto. Ricordando la costruzione degli a_i, b_i, questi sono della forma $\omega_i = i(m_{i-1}) * \delta_i * m_i$. Verifichiamo che φ non dipende dalla scelta degli m_i. Se sostiuiamo un m_i con un n bisogna sostituire ω_i con $i(m_{i-1}) * \delta_i * n$ e ω_{i+1} con $i(n) * \delta_i * m_{i+1}$. Se m_i ed n sono entrambi cammini (WLOG) in A, allora $\varphi = h$ e

$$\begin{aligned} &h(i(m_{i-1}) * \delta_i * n * i(n) * \delta_i * m_{i+1}) \\ =&h(\omega_i * i(m_i) * n * i(n) * m_i * \omega_{i+1}) \\ =&h(\omega_i * \omega_{i+1}) \end{aligned}$$

perché h è un omomorfismo. Il caso in cui m_i ed n sono uno contenuto in A e l'altro in B è analogo, grazie all'ipotesi $h(\alpha_*) = k(\beta_*)$, che serve anche a dire che se un cammino è in $A \cap B$ è indifferente prendere un suo rappresentante in $\pi_1(A, x_0)$ piuttosto che in $\pi_1(B, x_0)$. Che φ non dipende nemmeno dalla suddivisione fatta col Teorema del numero di Lebesgue si dimostra in maniera analoga sovrapponendo due suddivisioni e scegliendo una suddivisione più fine di entrambe. Resta da dimostrare che φ non dipende dal rappresentante scelto per la classe di omotopia di δ. Se ρ è un altro rappresentante e $F : I^2 \to X$ è l'omotopia, basta usare di nuovo il Teorema del numero di Lebesgue per restringersi a quadratini la cui immagine sia interamente contenuta in uno solo fra A e B. A questo punto basta dimostrare che φ è uguale sui due lati verticali (cioè tra due applicazioni intermedie) v, w di un generico quadratino. Prendiamo due cammini m_1, m_2 contenuti interamente in A (o in B, a seconda dei casi) da x_0 rispettivamente al primo e al secondo estremo di v e come cammini da x_0 al primo e secondo estremo di w prenderemo $m_i * l_i$, dove gli l_i sono i lati orizzontali. A questo punto l'omotopia fra il cammino su un lato e quello sugli altri tre fa il resto. $\square$

Corollario 5.2. Se $A, B, f, g, \alpha, \beta$ sono come nelle ipotesi del Teorema di Van Kampen e β_* è surgettivo, allora è surgettivo anche f_* e $\operatorname{Ker} f_* = \langle \alpha_*(\operatorname{Ker} \beta_*) \rangle$, e quindi $\pi_1(X, x_0) \cong \dfrac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\operatorname{Ker} \beta_*) \rangle}$. In particolare se β_* è un isomorfismo lo è anchef_*.

Dimostrazione. Sia $h : \pi_1(A, x_0) \to \dfrac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\operatorname{Ker} \beta_*) \rangle}$ la proiezione al quoziente. Dato che $\operatorname{Ker} \beta_* \subseteq \operatorname{Ker} h(\alpha_*)$, si può scrivere $h(\alpha_*) = k(\beta_*)$, dove, per surgettività di β_*,

$$k : \pi_1(B, x_0) \cong \frac{\pi_1(A \cap B, x_0)}{\operatorname{Ker} \beta_*} \to \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\operatorname{Ker} \beta_*) \rangle}$$

e siamo quindi nelle ipotesi del Teorema di Van Kampen in versione universale. Dato che h è surgettivo, lo è anche φ perché $h = \varphi(f_*)$. Dato che i cammini di $A \cap B$ omotopicamente banali in B lo sono a maggior ragione in X, si ha $\operatorname{Ker}\beta_* \subseteq \operatorname{Ker} f_*(\alpha_*)$, da cui $\alpha_*(\operatorname{Ker}\beta_*) \subseteq \operatorname{Ker} f_*$, quindi $\exists \psi : \frac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_*(\operatorname{Ker}\beta_*)\rangle} \to \pi_1(X,x_0)$ tale che $f_* = \psi(h)$. Per l'unicità di φ si deve avere $\varphi(\psi(\varphi)) = \varphi$, e allora, per surgettività di φ e ψ, si ha che $\psi(\varphi) = \mathrm{Id}$, e quindi φ è iniettiva. $\square$

Teorema 5.3 (Van Kampen in versione potabile)**.** Siano $X = A \cup B$, con $A, B, A \cap B$ aperti e connessi per archi, $x_0 \in A \cap B$, S un insieme di generatori di $\pi_1(A \cap B, x_0)$, $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ le composizioni degli omomorfismi indotti dalle inclusioni con le inclusioni nel prodotto libero. Allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{\left\langle \hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s \in S \right\rangle}$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, bend left, "\alpha_*"] \arrow[r, bend left, "\hat{\alpha}"] \arrow[r, bend right, "\hat{\beta}"'] \arrow[dr, bend right, "\beta_*"'] & \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0) \arrow[r, "\psi"] & \pi_1(X,x_0) \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

dove h, k sono le inclusioni e ψ è l'unica che fa commutare il diagramma (esiste per definizione di prodotto libero). Dato che l'immagine di ψ è il sottogruppo generato dalle immagini di f_* e g_* e che siamo nelle ipotesi del Teorema di Van Kampen, ψ è surgettiva. Notando che $\hat{\alpha} = h(\alpha_*)$ e $\hat{\beta} = k(\beta_*)$ si ha $\psi(\hat{\alpha}) = \psi(\hat{\beta})$ e quindi (basta fare il conto)

$$\operatorname{Ker}\psi \supseteq \left\{ \hat{\alpha}(\gamma)\hat{\beta}(\gamma^{-1}) \mid \gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0) \right\}$$

quindi passiamo dal prodotto libero al quoziente tramite la proiezione p notando che $\left\langle \hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1}) | s\in S \right\rangle = \left\langle \hat{\alpha}(\gamma)\hat{\beta}(\gamma^{-1}) | \gamma \in \pi_1(A\cap B, x_0) \right\rangle$

$$
\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "p(h)"] \arrow[dr, bend left, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\left\langle \hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s\in S\right\rangle} \arrow[r, bend right, "\Psi"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[l, bend right, "\varphi"'] \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "p(k)"'] \arrow[ur, bend right, "g_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

dove Ψ è tale che $\psi = \Psi(p)$ e φ è quella data dal Teorema di Van Kampen in versione universale, che è surgettiva perché $\frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\left\langle \hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s\in S\right\rangle}$ è generato dalle immagini di $p(h)$ e $p(k)$ e φ deve far commutare il diagramma. Per unicità (vedi dimostrazione del Corollario 5.2) φ è anche iniettiva ed è quindi un isomorfismo. $\square$

6 Are you fucking series?

Teorema 6.1. Una serie formale $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha inversa moltiplicativa se e solo se $\mathrm{ord}(f) = 0$.

Dimostrazione. Se ha inversa g si ha $\mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(fg) = \mathrm{ord}(1) = 0$, e $\mathrm{ord}(f) \in \mathbb{N}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{ord}(f) = 1$ e che WLOG $a_0 = 1$. Pensando alla serie geometrica, scriviamo $f = 1 - h$ dove $h = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ e ci aspettiamo che l'inversa di f sia $g = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n$. Intanto notiamo che la definizione ha senso perché, dato che somme e prodotti finiti di serie sono ben definiti e h^m ha coefficienti di ordine almeno m, basta definire il coefficiente di grado n di g come il coefficiente di grado n di $\sum_{m=0}^{n} h^m$. Inoltre $fg = (1-h)\sum_{n=0}^{+\infty} h^n = 1 + k$, dove k ha ordine arbitrariamente alto, ed è quindi la serie nulla. $\square$

Teorema 6.2. Se f, g e h sono serie formali e $\mathrm{ord}(h) \geq 1$, si ha

1. $(f+g)(h) = f(h) + g(h)$
2. $(fg)(h) = f(h)g(h)$
3. $\mathrm{ord}(g) = 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(h) = \frac{f(h)}{g(h)}$
4. $\mathrm{ord}(g) \geq 1 \Rightarrow (f \circ g)(h) = f(g(h))$

Dimostrazione. Passando dai polinomi e notando che per le ipotesi fatte calcolare il termine di grado m richiede un numero finito di operazioni. $\square$

Da ora considereremo anche serie di ordine negativo. Se $\operatorname{ord}(f) = m$ si ha $\operatorname{ord}\left(\frac{1}{f}\right) = -m$ e se $f = a_m x^m(1+h)$ si ha $\frac{1}{f} = \frac{1}{a_m x^m}\frac{1}{1+h}$.

Per le serie "vere" valgono tutti i risultati visti in analisi reale, in particolare il raggio di convergenza r è ben definito e vale

Teorema 6.3. $\displaystyle\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Dimostrazione. Se $\mathbb{R}^+ \ni t = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, per definizione di lim sup esistono solo un numero finito di termini a_n tali che $|a_n| \geq (t+\varepsilon)^n$ ed infiniti tali che $|a_n| \leq (t-\varepsilon)^n$, e quindi $\sum a_n z^n$ è definitivamente maggiorata in modulo da una serie geometrica convergente per $|z| < \frac{1}{t+\varepsilon}$ e minorata da una serie geometrica divergente per $|z| > \frac{1}{t-\varepsilon}$.

Se $t = 0$ la maggiorazione fatta continua a valere ovunque, mentre se $t = +\infty$ la serie converge solo in 0, perché per $|z| > 0$ troviamo un $t - \varepsilon$ con cui usare la minorazione precedente. □

Teorema 6.4. Se f, g convergono assolutamente su $B(0,r)$, allora convergono su $B(0,r)$ anche $f+g$, $f \cdot g$ e

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) \qquad (f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$$

Dimostrazione. Conveniamo che $f = \sum a_n z^n$, $g = \sum b_n z^n$, e quindi

$$\begin{aligned} f+g &= \sum d_n z^n & d_n &= a_n + b_n \\ f \cdot g &= \sum c_n z^n & c_n &= \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} \end{aligned}$$

Per convergenza assoluta sappiamo che per

$$\forall s \in]0, r[\, \exists C \;\; |a_n| \leq \frac{C}{s^n} \;\; |b_n| \leq \frac{C}{s^n}$$

da cui

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \sum_{0\leq k\leq n} |a_k b_{n-k}| \leq (n+1)\frac{C}{s^k}\frac{C}{s^{n-k}} & &\leq \frac{C^2(n+1)}{s^n} \\ |d_n| &\leq |a_n| + |b_n| & &\leq \frac{2C}{s^n} \end{aligned}$$

e

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{C^2(n+1)}{s^n}} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2C}{s^n}} = \frac{1}{s}$$

quindi, dato che è vero $\forall s \in]0, r[$, si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{r} \qquad \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|d_n|} \leq \frac{1}{r}$$

Inoltre per assoluta convergenza possiamo fare somme e prodotti nell'ordine che ci pare, in particolare possiamo ordinare $f(z)+g(z)$ e $f(z)g(z)$ in maniera che coincidano con $(f+g)(z_0)$ e $(f \cdot g)(z_0)$. $\square$

Teorema 6.5. Sia $f(z) = \sum a_n z^n$ una serie di potenze non costante e con raggio di convergenza non nullo. Allora

$$f(0) = 0 \Rightarrow \exists s \; \forall z \in B(0,s) \setminus \{0\} \; f(z) \neq 0$$

Dimostrazione. Se $m = \mathrm{ord}(f)$, scriviamo $f(z) = a_m z^m(1 + h(z))$, dove $\mathrm{ord}(h) = 1$ e h ha raggio di convergenza non nullo. Allora, per $z \neq 0$ abbastanza piccolo, nessuno dei due termini è 0. $\square$

Corollario 6.6. Se f, g sono serie di potenze e l'insieme $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ si accumula in 0, allora $f = g$ in un intorno di 0.

Dimostrazione. $f - g$ ha zeri che si accumulano in 0 ed è quindi localmente la serie nulla. $\square$

Teorema 6.7. Se $f = \sum a_n z^n$ ha raggio di convergenza non nullo, $\mathrm{ord}(f) = 0$ e $f \cdot g = 1$, anche g ha raggio di convergenza non nullo.

Dimostrazione. WLOG supponiamo $a_0 = 1$. Per convergenza $\exists A > 0 \; |a_n| \leq A^n$. Allora si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 - h(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} h^n(z)$$

ma dato che i coefficienti di h sono dominati in modulo da quelli di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A^n z^n = \frac{Az}{1 - Az}$$

si ha che i coefficienti di $\frac{1}{f}$ sono dominati in modulo da quelli di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{Az}{1 - Az} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{Az}{1-Az}} = (1 - Az) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2Az)^n \right)$$

Quindi $\frac{1}{f} = g$ ha i coefficienti dominati in modulo da quelli di una serie convergente su una palla di raggio non nullo, ed ha quindi raggio di convergenza non nullo. $\square$

Teorema 6.8. Siano

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$$

ed $r, s > 0$ tali che f converga assolutamente per $|z| \leq r$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \, s^n \leq r$$

Allora $g = f \circ h = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{k \geq 1} b_k z^k \right)^n$ converge assolutamente per $|z| \leq s$, e per questi z vale $g(z) = f(h(z))$.

Dimostrazione. I coefficienti di g sono dominati in modulo da quelli di

$$\sum_{n \geq 0} |a_n| \left(\sum_{k \geq 1} |b_k| \, z^k \right)^n$$

che per ipotesi converge per $|z| \leq s$. Il fatto che $g(z) = (f \circ h)(z)$ coincida con $f(h(z))$ si fa stimando le code e usando la convergenza. □

7 Anal fun

Per i teoremi dimostrati poco fa sappiamo che somma, prodotto, composizione e rapporto (dove il denominatore non è nullo) di funzioni analitiche è analitico.

Teorema 7.1. Se $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza r, è analitica su $B(0, r)$ (e il risultato si generalizza immediatamente tramite traslazioni).

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che $\forall z_0 \in B(0, r)$ esiste uno sviluppo in serie di f centrato in z_0 e convergente su una qualche $B(z_0, s) \subseteq B(0, r)$. Prendiamo un tale s e scriviamo

$$\begin{aligned} z &= z_0 + (z - z_0) \\ z^n &= (z_0 + (z - z_0))^n \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (z - z_0)^k \right) \end{aligned}$$

Dato che la serie converge assolutamente possiamo riordinarla ottenendo la serie (assolutamente convergente su $B(z_0, s)$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad c_k = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}$$

□

Teorema 7.2. Se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza r, allora f è olomorfa su $B(0,r)$ e la sua derivata è $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$, che ha lo stesso raggio di convergenza. In particolare anche f' è derivabile, e si ha quindi $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Dimostrazione. Che il raggio di convergenza delle due serie sia lo stesso segue dal fatto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e che $\sum n a_n z^{n-1}$ converge assolutamente dove converge assolutamente $\sum n a_n z^n$. Inoltre, se prendiamo $z \in B(0,r)$ $\delta > 0$, $|h| < \delta$, $|z| + \delta < r$, si ha

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(z^n + hnz^{n-1} + h^2 P_n(z,h)\right)$$

dove $P_n(z,h)$ è il polinomio che risulta dallo sviluppo binomiale. In particolare si ha

$$|P_n(z,h)| = \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}\right| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \delta^{k-2} |z|^{n-k} = P_n(|z|, \delta)$$

Inoltre

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = h \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(z,h)$$

dato che la somma di serie a sinistra converge assolutamente, anche quella a destra converge. Usando la disuguaglianza precedente troviamo

$$\left| h \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(z,h) \right| \leq |h| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| P_n(|z|, \delta) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

□

Corollario 7.3. Una funzione analitica $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con raggio di convergenza r ammette un primitiva locale.

Dimostrazione. La serie

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ha raggio di convergenza almeno r perché ha i coefficienti più piccoli di quelli di f, ed applicandole il teorema precedente si scopre che il raggio di convergenza è esattamente r e che $g' = f$.

□

Notiamo che gli stessi discorsi funzionano in un generico z_0 a meno di traslare.

Teorema 7.4. Sia $f(z)$ una serie formale tale che $\mathrm{ord}(f) = 1$. Allora $\exists! g(z)\ f(g(z)) = z$. Inoltre $g(f(z)) = z$ e, se f è una serie di potenze convergente, lo è anche g, quindi f vista come funzione è un biolomorfismo locale con l'immagine e in particolare è aperta.

Dimostrazione. Scriviamo $f(z) = a_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$. Vogliamo mostrare che esiste $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ tale che $f(g(z)) = z$. L'esistenza ed unicità segue dal fatto che i b_n possono essere ricavati ricorsivamente imponendo $a_1 g(z) - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n g^n(z) = z$. Per ogni n ci sono infatti solo un numero finito di termini che contribuiscono al termine di grado n, e dipendono solo dai coefficienti dei termini di grado minore, perché $a_0 = b_0 = 0$. In particolare si impone $a_1 b_1 = 1$ e $a_1 b_n = P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1})$, dove P_n è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{N}$ (sono binomiali). Per vedere che $g(f(z)) = z$ notiamo che sappiamo esistere h tale che $g(h(z)) = z$ quindi scriviamo

$$g(f(z)) = g(f(g(h(z)))) = g(h(z)) = z$$

Per la convergenza assumiamo WLOG $a_1 = 1$ e sia $\widetilde{f(z)} = z - \sum_{n=2}^{+\infty} \widetilde{a_n} z^n$ tale che $|a_n| \leq \widetilde{a_n} \in \mathbb{R}$. Se φ è l'inversa di $\widetilde{f}$ con coefficienti $c_1 = 1$, $c_n = P_n(\widetilde{a_2}, \ldots, \widetilde{a_n}, \widetilde{c_1}, \ldots, \widetilde{c_{n-1}})$ si vede facilmente per induzione che $|b_n| \leq c_n \in \mathbb{R}$, per costruzione dei b_n. Basta quindi trovare una $\widetilde{f}$ la cui inversa abbia raggio di convergenza positivo. Dato che sappiamo che $|a_n| \leq A^n$, prendiamo

$$\widetilde{f}(z) = z - \sum_{n\geq 2} A^n z^n = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$
$$z = \varphi(z) - \frac{A^2 \varphi^2(z)}{1 - A\varphi(z)}$$

Risolvere questa vuol dire praticamente risolvere un'equazione di secondo grado, dove per estrarre la radice quadrata si risolve un sistema simile a quello precedente, quindi φ sarà un prodotto di serie con raggio di convergenza non nullo. □

Teorema 7.5. Se f è analitica su un aperto U e non esiste nessuna $B(z_0, r)$ su cui f è costante, f è aperta.

Dimostrazione. Sviluppiamo f come serie WLOG centrata in 0. Se $\mathrm{ord}(f) = m$ scriviamo

$$f(z) = a_m z^m (1 + h(z))$$

e siano a una radice m-esima di a_m e $1+h_1(z)$ una radice m-esima di $1+h(z)$, che esiste perché $1 + h(z)$ non si annulla in 0 e quindi nemmeno in un suo intorno sufficientemente piccolo, per cui possiamo invertire localmente il rivestimento $z \mapsto z^m$. Allora possiamo scrivere f come la composizione delle funzioni aperte $z \mapsto az(1 + h_1(z)) = az + azh_1$ e $z \mapsto z^m$. □

Corollario 7.6. Sia f analitica in z_0, e $\text{ord}(f - a_0) = m$. Allora esiste un biolomorfismo locale φ tale che $f(z) = a_0 + \varphi((z - z_0)^m)$.

Dimostrazione. Vedi dimostrazione del teorema precedente. □

Teorema 7.7. Se f è analitica e iniettiva su un aperto U, allora $\forall z \in U$ vale $f'(z) \neq 0$ e f è un biolomorfismo con l'immagine.

Dimostrazione. Sviluppiamo f in un punto z_0 e scriviamo $f = f(z_0) + \varphi((z - z_0)^m)$ con φ biolomorfismo. Se fosse $m > 1$ f non sarebbe inettiva perché $z \mapsto z^m$ non è iniettiva per $m \geq 1$ in un intorno di 0. A questo punto possiamo usare il Teorema 7.4. □

Teorema 7.8 (Principio del massimo locale)**.** Se f è analitica su un aperto U e $z_0 \in U$ è un massimo per $|f|$, o un massimo (in questo caso anche un minimo) di $\Re(f)$ o $\Im(f)$, f è localmente costante.

Dimostrazione. Basta sviluppare f in serie centrata in z_0 e notare che, se non è localmente costante, è aperta. Quindi l'immagine di un intorno di z_0 è aperta e contiene sicuramente un punto w_0 tale che $|w_0| > |z_0|$. Lo stesso discorso si applica per eventuali massimi (e in questo caso anche minimi) di $\Re(f)$ e $\Im(f)$. □

Teorema 7.9 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.**

$$\forall p(z) \in \mathbb{C}[z] \ \deg(p(z)) > 0 \Rightarrow \exists z_0 \ p(z_0) = 0$$

Dimostrazione. Se $p(z)$ non avesse zeri, la funzione $\frac{1}{p(z)}$ sarebbe definita e analitica su tutto $\mathbb{C}$. Dato che $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0$ possiamo trovare R tale che $\frac{1}{|p|}$ sia arbitrariamente piccolo fuori da $B(0, R)$, in particolare tale che valga meno di $\frac{1}{|p(0)|}$. Tuttavia l'immagine di $\overline{B(0, R)}$ è compatta, e quindi $\frac{1}{p}$ ha un massimo in modulo su $\overline{B(0, R)}$ che per costruzione non può trovarsi sul bordo. Quindi $\frac{1}{p}$ è localmente costante in un punto z_0, e questo è assurdo perché allora sarebbe localmente costante anche $p(z)$, e i polinomi di grado positivo sono funzioni aperte. □

8 Complex anal

Teorema 8.1 (Relazione di Cauchy-Riemann)**.** $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è differenziabile come applicazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $f_y = if_x$.

Dimostrazione. Se f è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$, possiamo scrivere (dove $\lim_{z\to z_0} \gamma(z_0, z) = 0$)

$$\begin{aligned} f(z) =& f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0) \cdot \gamma(z_0, z) = \\ & f(z_0) + f'(z_0)(x - x_0) + if'(z_0)(y - y_0) + (z - z_0) \cdot \gamma(z_0, z) \end{aligned}$$

Da cui segue la differenziabilità come applicazione reale e il fatto che $f_x(z_0) = f'(z_0)$ e $f_y(z_0) = if'(z_0)$, da cui $f_y = if_x$.

Viceversa, se $if_x = f_y$ e f e f è differenziabile in senso reale in z_0, abbiamo

$$\begin{aligned} f(z) =& f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(z - z_0) \\ f(z) - f(z_0) =& f_x(z - z_0) + o(z - z_0) \\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =& f_x(z_0) = f'(z_0) \end{aligned}$$

□

Teorema 8.2. Se f è olomorfa su un aperto connesso U e $f' = 0$, f è costante.

Dimostrazione. Gli aperti connessi sono connessi per archi, quindi dati due punti a e b possiamo trovare $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{t}}(U, a, b)$ (cammini in U da a a b $\mathcal{C}^1$ a tratti). Basta dimostrare che su un intervallino (WLOG $[0, 1]$) su cui è $\mathcal{C}^1$ i valori agli estremi coincidono e generalizzare per induzione. Dato che $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$, $f(\gamma)$ è costante e $f(a) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(b)$. □

Corollario 8.3. Le primitive di una funzione su un aperto connesso differiscono per una costante.

Dimostrazione. Se g, h sono due primitive di f, $g' - h' = f - f = 0$ e quindi $g - h$ è costante. □

Teorema 8.4. Se f è analitica non costante su un aperto connesso U, l'insieme dei suoi zeri (in U) è discreto.

Dimostrazione. Per il Teorema 6.5, se $z_0 \in U$ è un punto di accumulazione di $Z = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$, f è costante su una qualche $B(z_0, r)$. A questo punto sfruttiamo la connessione di U e dimostriamo l'apertura e chiusura di

$$S = \{z \in U \mid \exists r > 0\ \forall u \in B(z, r)\ f(u) = 0\}$$

che è chiuso perché, se z_1 è un suo punto di accumulazione, per continuità di f si ha $f(z_1) = 0$. Dato che in ogni intorno di z_1 ci sono punti diversi da z_1 in cui f si annulla, sempre per il Teorema 6.5 f è localmente costante in z_1, e quindi $z_1 \in S$. Che S è aperto è ovvio, e per quanto visto prima è non vuoto, quindi $S = U$. □

Corollario 8.5. Se due funzioni analitiche definite su un aperto connesso U coincidono su un sottoinsieme non discreto di U, coincidono su tutto U. In particolare se U, V sono aperti connessi, $U \cap V \neq \emptyset$, $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ e f coincide con g su $U \cap V$, f e g coincidono su $U \cup V$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema precedente alla differenza. □

Corollario 8.6 (Principio del massimo globale)**.** Se U è un aperto connesso e z_0 è un massimo locale per $|f|$, con $f : U \to \mathbb{C}$ analitica, f è costante.

Dimostrazione. Sappiamo già che f è localmente costante in z_0. Per il Corollario precedente, f coincide con una funzione costante su U. □

Teorema 8.7. Sia f continua su un aperto U, g una primitiva di f e $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{t}}(U, \alpha, \beta)$. Allora $\int_\gamma f = g(\beta) - g(\alpha)$. In particolare l'integrale dipende solo dagli estremi.

Dimostrazione. È chiaro che basta dimostrare il Teorema nel caso di γ curva $\mathcal{C}^1$. La generalizzazione segue sommando. In questo caso l'integrale è

$$\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 g'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)) = g(\beta) - g(\alpha)$$

□

Lemma 8.8. Se f è continua su U e $\gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{t}}(U, a, b)$, vale

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \|f\|_\gamma L(\gamma)$$

Dimostrazione. Se γ è $\mathcal{C}^1$

$$\left|\int_\gamma f\right| = \left|\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))| \left|\gamma'(t)\right|\,dt \leq \|f\|_\gamma L(\gamma)$$

e se è $\mathcal{C}^1$ a tratti basta considerare le somme. □

Teorema 8.9. Sia f continua su un aperto connesso U. Allora f ha una primitiva g se e solo se $\forall a \in U, \forall \gamma \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{t}}(U, a, a)\ \int_\gamma f = 0$.

Dimostrazione. Se g esiste si ha

$$\int_\gamma f = g(a) - g(a) = 0$$

Viceversa, se f ha integrale nullo su ogni cammino chiuso, fissiamo $z_0 \in U$ e definiamo

$$g(z) = \int_{z_0}^z f$$

che è una buona definizione perché per l'ipotesi fatta l'integrale è indipendente dal cammino scelto. Si ha

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi$$

e per continuità di f si ha $f(\xi) = f(z) + \varphi(\xi), \quad \varphi(\xi) \xrightarrow{\xi \to z} 0$. Allora

$$\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,d\xi + \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \varphi(\xi)\,d\xi = f(z) + \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \varphi(\xi)\,d\xi$$

Possiamo ora prendere h abbastanza piccolo in maniera che il segmento fra z e $z+h$ sia interamente contenuto in U (le palle sono convesse), usare questo segmento come γ, e stimare

$$\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} \varphi(\xi)\,d\xi\right| \le \frac{1}{|h|}\,|L(\gamma)| \max_\gamma |\varphi(\xi)| = \frac{1}{|h|}\,|h| \max_\gamma |\varphi(\xi)| \xrightarrow{|h|\to 0} 0$$

□

Teorema 8.10. Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue su U che convergono uniformemente a f, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

in particolare se una serie di funzioni continue converge si ha

$$\int_\gamma \sum f_n = \sum \int_\gamma f_n$$

Dimostrazione.

$$\left|\int_\gamma f - \int_\gamma f_n\right| \le \|f - f_n\|_\gamma \, L(\gamma) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

□

Teorema 8.11 (di Goursat)**.** Sia R un rettangolo chiuso con i lati verticali o orizzontali, ∂R il suo bordo pensato come curva orientata in senso antiorario e sia f olomorfa su R (cioè su un aperto che lo contiene). Allora $\displaystyle\int_{\partial R} f = 0$.

Dimostrazione. Costruiamo una successione di rettangoli $\{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ partendo da $R_0 = R$. Dato R_n, consideriamo i quattro rettangoli R_n^j $j \in \{1,2,3,4\}$ con i bordi orientati in senso antiorario. Dato che i bordi degli R_n^j interni ad R_n vengono percorsi due volte ma in senso opposto, abbiamo

$$\int_{\partial R_n} f = \sum_{j=i}^{4} \int_{\partial R_n^j} f \quad \Rightarrow \quad \left|\int_{\partial R_n} f\right| \le \sum_{j=i}^{4} \left|\int_{\partial R_n^j} f\right|$$

Scegliamo ora come R_{n+1} il rettangolo R_n^j col minimo j tale che

$$\left|\int_{\partial R_n^j} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R_n} f\right|$$

Si ha quindi

$$\left|\int_{\partial R_n} f\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R_0} f\right| \qquad L\left(\partial R_n\right) = \frac{1}{2^n} L\left(\partial R_0\right)$$

Inoltre $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n = z_0$ per millemila motivi, ad esempio perché proiettando i lati sugli assi di ottengono due successioni di intervalli dimezzati. Ora f è olomorfa in z_0 e quindi esiste una palla B tale che, $\forall z \in B$, vale

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0)$$

con $h(z) \xrightarrow{z\to z_0} 0$. Prendiamo n abbastanza grande in maniera che $R_n \subset B$ e abbiamo

$$\int_{\partial R_n} f(z)\,dz = \int_{\partial R_n} f(z_0)\,dz + \int_{\partial R_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int_{\partial R_n} h(z)(z - z_0)\,dz$$

$$\int_{\partial R_n} f(z)\,dz = \int_{\partial R_n} h(z)(z - z_0)\,dz$$

perché gli altri due integrali fanno 0 in quanto esiste una primitiva. Notiamo ora che la funzione $z \mapsto (z - z_0)$ ristretta a R_n vale al più quanto il diametro di R_n (cioè la lunghezza della sua diagonale), e che $\operatorname{diam}(R_n) = \frac{\operatorname{diam}(R)}{2^n}$. Dunque

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f\right| \leq \left|\int_{\partial R_n} f\right| \leq \left|\int_{\partial R_n} h(z)(z - z_0)\,dz\right| \leq \frac{L(R)}{2^n}\frac{\operatorname{diam}(R)}{2^n}\,\|h\|_{R_n}$$

e quindi

$$\left|\int_{\partial R} f\right| \ll \|h\|_{R_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

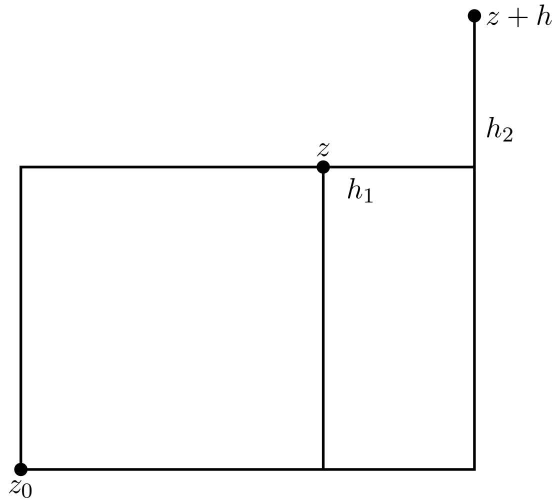
$\square$

Teorema 8.12. Siano $U = B(z_0, r)$, con $r > 0$, f continua su U con integrale nullo sul bordo di ogni rettangolo e

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f$$

calcolato lungo i lati di un rettangolo che li abbia paralleli agli assi e che abbia z_0 e z come vertici opposti. Allora g è una primitiva di f.

Dimostrazione. Intanto notiamo che ogni funzione olomorfa su U soddisfa le ipotesi per il Teorema di Goursat.



Si ha $g(z+h)-g(z) = \int_z^{z+h} f(\xi)\, d\xi = \int_{h_1} f + \int_{h_2} f$. Per continuità possiamo scrivere $f = f(z) + \psi(\xi)$ con $\psi(\xi) \xrightarrow{\xi \to z} 0$, per cui

$$g(z+h) - g(z) = \int_z^{z+h} f(z)\, d\xi + \int_z^{z+h} \psi(\xi)\, d\xi = hf(z) + \int_z^{z+h} \psi(\xi)\, d\xi$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) + \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \psi(\xi)\, d\xi$$

$$\left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} \psi(\xi)\, d\xi\right| \leq \frac{|h_1| + |h_2|}{|h|} \|\psi\|_{h_1 * h_2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

□

Lemma 8.13. Sia $\gamma : [0,1] \to U$ continua sull'aperto U. Allora $\exists r > 0$ tale che ogni punto di γ dista almeno r dal complementare di U.

Dimostrazione. Per compattezza dell'immagine di γ possiamo trovare una palla chiusa B tale che i punti nel complementare di B distino più di 1 da γ. A questo punto la funzione di distanza da γ ha un minimo sul compatto $B \setminus U$ che non può essere 0 perché $\gamma \subset U$ e U è aperto. □

Lemma 8.14. Sia $\gamma : [0,1] \to U$ continua su U aperto. Sia $0 = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = 1$ una partizione di $[0,1]$ tale che per ogni i esiste una palla B_i tale che $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset B_i \subset U$. Sia f olomorfa su U e $\forall i$ sia g_i una primitiva di $f_{|B_i}$. Allora la quantità

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i))$$

è una buona definizione di $\int_\gamma f$, cioè non dipende dalla scelta di partizioni, palle e primitive.

Dimostrazione. Notiamo che una partizione del genere esiste sempre, perché per il Lemma precedente basta ricoprire l'immagine di γ con palle di raggio r e poi usare il Teorema del numero di Lebesgue.

Fissata una partizione, se C_i è un'altra famiglia di palle che soddisfa le condizioni precedenti, allora $\forall i$ $B_i \cap C_i$ è un aperto connesso, quindi la primitiva h_i scelta per C_i differisce per una costante da g_i su $B_i \cap C_i$, e quindi $g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i)) = h_i(\gamma(a_{i+1})) - h_i(\gamma(a_i))$.

Dato che due partizioni finite di $[0,1]$ ammettono sempre un raffinamento comune, ci basta dimostrare la tesi se aggiungiamo un punto a una partizione, e il caso generale segue per induzione. Ma se aggiungiamo un punto c fra a_k e a_{k+1}, possiamo considerare g_k come primitiva su B_c per i discorsi fatti sopra. A questo punto basta notare che

$$g_k(\gamma(a_{k+1})) - g_k(\gamma(a_k)) = g_k(\gamma(a_{k+1})) - g_k(\gamma(c)) + g_k(\gamma(c)) - g_k(\gamma(a_k))$$

□

Notiamo che questa definizione di integrale su γ continua coincide con quella precedente nel caso $\mathcal{C}^1$ a tratti.

Dati ora $\gamma, \eta : [0,1] \to U$ continui, diciamo che sono *vicini* se esiste una partizione di $[0,1]$ tale che $\forall i \exists B_i \subset U$ $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \cup \eta([a_i, a_{i+1}]) \subset B_i$.

Lemma 8.15. Sia f olomorfa su un aperto U e siano γ, η due cammini continui su U, vicini. Se γ ed η hanno gli stessi estremi, oppure sono entrambi chiusi, si ha $\int_\gamma f = \int_\eta f$.

Dimostrazione. Sia g_i una primitiva di f sulla palla B_i che contiene $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \cup \eta([a_i, a_{i+1}])$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \int_\gamma f - \int_\eta f =& \sum_{i=0}^{n-1} g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i)) - (g_i(\eta(a_{i+1})) - g_i(\eta(a_i))) \\ =& g_{n-1}(\gamma(a_n)) - g_{n-1}(\eta(a_n)) - (g_0(\gamma(a_0)) - g_0(\eta(a_0))) \end{aligned}$$

$= 0$ perché i cammini hanno gli stessi estremi oppure perché sono chiusi e quindi g_n e g_0 differiscono per una costante. □

Teorema 8.16 (di Cauchy)**.** Sia f olomorfa su un aperto U e γ un cammino continuo in U. Allora $\int_\gamma f$ è invariante per omotopia a estremi fissi. In particolare, $\gamma \sim 1 \Rightarrow \int_\gamma f = 0$.

Dimostrazione. Fia $F : I^2 \to U$ l'omotopia fra due curve γ ed η. Dato che l'immagine di F è compatta, possiamo ricoprirla con delle palle $B_i \subset U$ e usare il Teorema del numero di Lebesgue per trovare n tale che

$\forall h, k \exists i\ F\left([\frac{h-1}{n}, \frac{h}{n}], [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]\right) \subset B_i$. A questo punto le restrizioni di F ai segmenti $[t, \frac{i}{n}]$ danno un numero finito di cammini continui e vicini a cui si può applicare il Lemma precedente. $\square$

Teorema 8.17. Sia f olomorfa su un aperto semplicemente connesso $U \ni z_0$. Allora

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

non dipende dal cammino fra z_0 e z e $g' = f$.

Dimostrazione. Se $\gamma, \eta \in \Omega(U, z_0, z)$, allora $\gamma * i(\eta)$ è chiuso e, siccome U è semplicemente connesso, omotopo a 1_{z_0}, quindi $\int_{\gamma * i(\eta)} f = 0$, da cui $\int_\gamma f = -\int_{i(\eta)} f = \int_\eta f$. Dato inoltre $z_1 \in U$, si ha $g(z) = g(z_1) + \int_{z_1}^{z} f$, che sappiamo essere localmente una primitiva di f per il Teorema 8.12. Quindi $\forall z\ g'(z) = f(z)$. $\square$

9 Logaritmo, questo sconosciuto

Definizione 9.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^*$ un aperto semplicemente connesso, $z_0 \in U$ e $w_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{w_0} = z_0$. Definiamo

$$\log z = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$$

Consideriamo la funzione analitica

$$L(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

che ha raggio di convergenza $1 = \left(\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$. In $V = B(z_0, 1)$ è analitica anche

$$F(z) = w_0 + L\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)$$

ma d'altronde, sviluppando $\frac{1}{z}$ in z_0 si ha

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{z}$$

per cui in V si ha $\log(z) = F(z) + K$. Dato che $\log(z_0) = w_0 = F(z_0)$ si ha $K = 0$. Inoltre in V si ha $e^{\log(z)} = z$, perché la serie sopra è la serie di Taylor del logaritmo reale, quindi lo sviluppo in serie (formale) di $e^{\log(z)}$ deve necessariamente essere z. Per punti in $U \setminus V$ possiamo scrivere

$$\log z = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi} = w_0 + \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{z_1}^{z} \frac{d\xi}{\xi} = w_1 + \int_{z_1}^{z} \frac{d\xi}{\xi}$$

e rifare discorsi analoghi deducendo l'analiticità anche in z_1 e, per arbitrarietà, in tutto U. Dato che le funzioni analitiche $e^{\log(z)}$ e z coincidono nell'aperto non vuoto V e che U è connesso, si ha quindi che coincidono su tutto U per il Corollario 8.5. Se P è una primitiva su U di $\frac{1}{z}$ che verifica $e^{P(z)} = z$ si deve avere $e^{\log(z)-P(z)} = 1$ e quindi $\log(z) - P(z) = 2\pi ik,\ k \in \mathbb{Z}$.

Fissato $\alpha \in \mathbb{C}$ e un aperto semplicemente connesso U, possiamo definire anche $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

Ora vogliamo definire $\log(f(z))$ per f analitica. Per farlo ci mettiamo su un aperto semplicemente connesso U dove f non si annulla mai, fissiamo z_0 e usiamo la definizione "telefonata"

$$\log(f(z)) = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi$$

che ovviamente dipende da w_0 e z_0, che la modificano per una costante additiva. Per dimostrare che questa costante è un multiplo intero di $2\pi i$, calcoliamo $\frac{d}{dz}e^{-\log(f(z))}f(z)$ e notiamo che fa 0. Dato che U è connesso, la funzione è quindi costante e $e^{-\log(f(z_0))}f(z_0) = 1$, quindi $e^{\log(f(z))} = f(z)$.

10 Anal toys

Teorema 10.1 (Formula di Cauchy locale)**.** Sia $D = B(\zeta, \rho),\ \rho > 0,\ f$ olomorfa su $\overline{D}$ (cioè su un aperto che lo contiene) e $\gamma = \partial\overline{D}$. Allora $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Dimostrazione. Sia $C_r = B(z_0, r)$. Si ha $C_r \sim \gamma$ in $U_0 = B(\zeta, \rho + \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, dove l'omotopia è $(t, s) \mapsto sC_r(t) + (1 - s)\gamma(t)$, parametrizzando $C_r(t) = z_0 + r\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|}$. Consideriamo ora $g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, olomorfa su $D \setminus z_0$. Per il Teorema di Cauchy si ha $\int_\gamma g = \int_{C_r} g$. Inoltre, dato che f è olomorfa, $\exists K \exists \delta\ \forall z \in B(z_0, \delta)\ |g(z)| \leq K$. Quindi, per r abbastanza piccolo,

$$\left|\int_\gamma g(z)\, dz\right| = \left|\int_{C_r} g(z)\, dz\right| \leq KL(C_r) = K2\pi r \xrightarrow{r \to 0} 0$$

e quindi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0)2\pi i$$

$\square$

Teorema 10.2. Sia f olomorfa su $\overline{B(z_0, R)}, R > 0$ e $C_R = \partial B(z_0, R)$. Allora in un intorno di z_0 vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

e inoltre

$$|a_n| \leq \frac{\|f\|_{C_R}}{R^n}$$

In particolare il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale di R.

Dimostrazione. Scriviamo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

e notiamo che per $z \in B(z_0, s), 0 < s < R$ la serie geometrica a destra converge assolutamente, quindi possiamo usare il Teorema 8.10 per scambiare serie e integrale. Usiamo la Formula di Cauchy locale e scriviamo

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |a_n| =& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \\ \leq& \left| \frac{L(C_R)}{2\pi i} \right| \left\| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right\|_{C_R} = \left| \frac{2\pi i R}{2\pi i} \right| \left\| \frac{f}{R^{n+1}} \right\|_{C_R} = \frac{\|f\|_{C_R}}{R^n} \end{aligned}$$

□

Corollario 10.3. Una funzione è olomorfa se e solo se è analitica.

Dimostrazione. Una freccia è il Teorema precedente, l'altra è il Teorema 7.2. SBADABIM-PUM-PAM! □

Teorema 10.4 (di Liouville generalizzato)**.** Sia f intera (cioè olomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) e $\|.\|_R$ la norma del sup su $R \cdot S^1$. Allora, se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per R arbitrariamente grande vale $\|f\|_R \ll R^k$, f è un polinomio di grado al più k.

Dimostrazione. Scriviamo $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e notiamo che il raggio di convergenza di questa serie è $+\infty$, perché se la serie non convergesse in un punto z_0 basterebbe sviluppare f come f centrata in z_0 e trovare una funzione analitica che coincide con f sull'aperto $B(0, |z_0|) \cap B(z_0, \varepsilon)$. Utilizziamo la stima sui coefficienti e le ipotesi per scrivere

$$|a_n| \leq \frac{\|f\|_R}{R^n} \leq \frac{CR^k}{R^n} \ll R^{k-n}$$

Dato che il raggio di convergenza in 0 è $+\infty$, possiamo prendere R arbitrariamente grande, e quindi $\forall n > k \ |a_n| = 0$. □

Teorema 10.5. Sia U aperto, γ un cammino (non necessariamente chiuso) in U e g continua su γ. Per $z \in U \setminus \gamma$ definiamo

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Allora f è analitica su $U \setminus \gamma$ e vale

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

Dimostrazione. Prendiamo $z_0 \in U \setminus \gamma$. Dato che l'immagine di γ è compatta, la funzione $d_{z_0}(z) : \gamma \to \mathbb{R}$ ha un minimo, quindi possiamo trovare R tale che $\overline{B(z_0, R)} \subset U \setminus \gamma$. A questo punto basta ripetere la dimostrazione del Teorema 10.2, che funziona perché non c'è bisogno di usare la Formula di Cauchy locale, dato che sappiamo per ipotesi che $f(z) = \int_\gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$. $\square$

Corollario 10.6. Sia f analitica su $\overline{B(z_0, R)}, R > 0$ e $\|.\|_R$ la norma del sup su $\partial B(z_0, R)$. Se $0 < R_1 < R$, per $z \in \overline{B(z_0, R_1)}$ vale

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n! R \|f\|_R}{(R - R_1)^{n+1}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\left| f^{(n)}(z) \right| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \right| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \right| L(C_R) \left\| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right\|_R \\
&\leq \left| \frac{n! 2\pi i R}{2\pi i} \right| \left\| \frac{f(\xi)}{(R - R_1)^{n+1}} \right\|_R = \frac{n! R \|f\|_R}{(R - R_1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 10.7 (di Morera)**.** Se f è continua su U e l'integrale di f sul bordo di ogni rettangolo contenuto in U è nullo, f è analitica.

Dimostrazione. Per il Teorema 8.12 $g(z) = \int_{z_0}^z f$ è una primitiva di f ed è quindi olomorfa. Per il Teorema 10.2 g è analitica, e quindi lo è anche $f = g'$. $\square$

11 Ride like the wind

Lemma 11.1. Se $\gamma \in \mathcal{C}^1_t(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}, z_0, z_0)$, allora $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Scriviamo γ come giunzione di n curve $\mathcal{C}^1$ $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ e supponiamo che la parametrizzazione di γ sia su $[0, 1]$, e ogni γ_i sia definita su $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Definiamo la funzione, continua su $[0,1]$ e differenziabile su $[0,1] \setminus \{\frac{i}{n} \mid i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$

$$F(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(\xi)}{\gamma(\xi) - \alpha}\, d\xi \qquad F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha}$$

Dato che $\frac{d}{dt} e^{-F(t)} (\gamma(t) - \alpha) = 0$, si ha $\gamma(t) - \alpha = Ce^{F(t)}$, e siccome

$$Ce^{F(0)} = \gamma(0) - \alpha = \gamma(1) - \alpha = Ce^{F(1)}$$

e $\gamma(t) \neq \alpha$ (quindi $C \neq 0$ e possiamo dividere) otteniamo $e^{F(0)} = e^{F(1)}$, per cui $\exists k \in \mathbb{Z}\ F(1) - F(0) = 2\pi ik$, ma $F(0) = 0$. □

Lemma 11.2. Sia γ un cammino $\mathcal{C}_1$ a tratti. La funzione

$$\mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C} \qquad \alpha \mapsto \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

è continua.

Dimostrazione. Bisogna far vedere che

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\gamma \frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0}\, dz = 0$$

Sia $\min t \mapsto |\alpha_0 - \gamma(t)| = s > 0$. Per α sufficientemente vicino ad α_0 si ha $|\alpha - \gamma(t)| \geq \frac{s}{2}$. Quindi per z su γ si ha

$$\left| \frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0} \right| = \left| \frac{\alpha - \alpha_0}{(z - \alpha)(z - \alpha_0)} \right| \leq \frac{|\alpha - \alpha_0|}{\frac{s^2}{2}}$$

da cui

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0}\, dz \right| \leq \frac{2L(\gamma)\, |\alpha - \alpha_0|}{s^2} \xrightarrow{\alpha \to \alpha_0} 0$$

□

Lemma 11.3. Sia γ un cammino $\mathcal{C}^1$ a tratti e S un connesso disgiunto da γ. Allora $\alpha \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}$ è costante su S. Se S è illimitato, è 0.

Dimostrazione. Per il Lemma 11.1 l'integrale è un intero (l'indice di avvolgimento). Una funzione continua su un connesso a valori in $\mathbb{Z}$, che è discreto, è per forza costante. Se S è illimitato, dato che $L(\gamma)$ è costante e $\left|\frac{1}{z-\alpha}\right|$ è arbitrariamente piccolo, l'integrale deve essere necessariamente 0. □

Teorema 11.4. Se due cammini chiusi sono omotopi o vicini, sono omologhi.

Dimostrazione. Caso particolare del Lemma 8.15 e del Teorema 8.16. □

Teorema 11.5 (formula di Cauchy globale)**.** Sia γ una catena chiusa omologa a 0 in U. Sia f analitica su U e $z_0 \in U \setminus \gamma$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\, \mathrm{W}(\gamma, z_0)$$

Dimostrazione (Dixon)*.* Definiamo $g : U \times U \to \mathbb{C}$

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{se} \quad w \neq z \\ f'(z) & \text{se} \quad w = z \end{cases}$$

Notiamo che, fissato w, la funzione $z \mapsto g(z,w)$ è olomorfa. Dimostriamo che g è continua. Per punti non sulla diagonale è ovvio, mentre se (z_0, z_0) è sulla diagonale, per (z,w) in una palla sufficientemente piccola possiamo scrivere

$$g(z,w) - g(z_0, z_0) = \frac{1}{w-z} \int_z^w f'(\xi) - f'(z_0)\, d\xi$$

e integrare lungo il segmento σ che congiunge w e z, in maniera da avere

$$\frac{1}{w-z} \int_z^w f'(\xi) - f'(z_0)\, d\xi \leq \frac{L(\sigma)}{w-z} \left\| f'(\xi) - f'(z_0) \right\|_\sigma \xrightarrow{\xi \to z_0} 0$$

per continuità di f', ed è chiaro che $(z,w) \to (z_0, z_0) \Rightarrow \xi \to z_0$.

Sia ora

$$V = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mid \mathrm{W}(\gamma, z) = 0 \}$$

notiamo che V è aperto e che $\mathbb{C} \setminus U \subseteq V$ per ipotesi, quindi $\mathbb{C} = U \cup V$. Definiamo ora

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma g(z,w)\, dw & \text{se} \quad z \in U \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw & \text{se} \quad z \in V \end{cases}$$

notando che le due definizioni coincidono nel caso $z \in U \cap V$, dato che

$$\int_\gamma g(z,w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

e l'integrale più a destra è 0 se $z \in V$ per definizione. Notiamo che h è analitica su V per il Teorema 10.5. Dimostriamo ora che h è analitica anche su U (e quindi su $\mathbb{C}$). La continuità di h su U segue dalla continuità uniforme di g sui compatti di $U \times U$. Fissato $z_0 \in U$ basterà ora dimostrare che $\exists \rho > 0$ tale che l'integrale di g lungo ogni rettangolo contenuto in $B(z_0, \rho)$ è nullo. Questo ci permette infatti di concludere che, per il Teorema 8.12, h ha una primitiva (locale) olomorfa (e dunque analitica) ed è quindi analitica. Ma per il Teorema di Fubini-Tonelli

$$\int_{\partial R} h(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \int_\gamma g(z,w)\, dw\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_{\partial R} g(z,w)\, dz\, dw = 0$$

perché $z \mapsto g(z,w)$ è analitica. Dimostriamo che h è limitata. Sia B una palla abbastanza grande da contenere γ. Se $z \in \mathbb{C} \setminus B$, per il Lemma 11.3 $z \in V$, e quindi

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$

Quindi per il Teorema di Liouville h è costante, e la stima precedente mostra che $h(z) = 0$. Ma allora, $\forall z \in U \setminus \gamma$

$$\begin{aligned} 0 = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z,w)\, dw &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\, dw \\ &\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z)\, \mathrm{W}(\gamma, z) \end{aligned}$$

□

Teorema 11.6 (di Cauchy)**.** Sia γ una catena chiusa omologa a 0 nell'aperto U e sia f olomorfa su U. Allora $\int_\gamma f = 0$.

Dimostrazione. Basta fissare $z_0 \in U \setminus \gamma$ e considerare la funzione analitica $F(z) = (z - z_0) f(z)$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = F(z_0)\, \mathrm{W}(\gamma, z_0) = 0$$

□

Corollario 11.7. Se γ ed η sono catene chiuse omologhe ed f è olomorfa, $\int_\gamma f = \int_\eta f$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema precedente alla catena chiusa $\gamma - \eta$. □

Teorema 11.8. Sia γ una catena chiusa omologa a 0 in un aperto U. Per $i = 1, \ldots, n$ siano $z_i \in U \setminus \gamma$, $\overline{B_i} \subset U$ una palla chiusa contenente z_i e $\gamma_i = \partial B_i$ orientata in senso antiorario tali che per $i \neq j$ si abbia $z_i \neq z_j$ e $\overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \emptyset$. Allora γ è omologa a $\sum_{i=1}^n \mathrm{W}(\gamma, z_i)\gamma_i$ in $U \setminus \{z_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. In particolare se f è olomorfa su $U \setminus \{z_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ si ha $\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n W(\gamma, z_i) \int_{\gamma_i} f$.

Dimostrazione. Sia $C = \gamma - \sum_{i=1}^n \mathrm{W}(\gamma, z_i)\gamma_i$. Consideriamo

$$W(C, \alpha) = W(\gamma, \alpha) - \sum_{i=1}^n W(\gamma, z_i) W(\gamma_i, \alpha)$$

Se $\alpha \notin U$ la quantità precedente è 0 perché $W(\gamma, \alpha) = 0$ per ipotesi e, dato che $\forall i\ \overline{B_i} \subset U$, si ha $W(\gamma_i, \alpha) = 0$ per il Lemma 11.3. Se invece $\alpha = z_k$, si ha $W(\gamma_i, z_k) = \delta_{ik}$ sempre per il Lemma 11.3 e la quantità è ugualmente nulla. Questo, insieme al Teorema di Cauchy, prova la tesi. □

12 Buchi

Teorema 12.1. Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzione olomorfe su un aperto U convergente uniformemente ad f su ogni $K \subset U$ compatto. Allora f è olomorfa e la successione $\{f_n'\}$ converge uniformemente su ogni $K \subset U$ compatto ad f'.

Dimostrazione. Siano $z_0 \in U$ e R tale che $B_R = \overline{B(z_0, R)} \subseteq U$. Per ipotesi f_n converge uniformemente su B_R. Per $z \in B_{\frac{R}{2}}$ possiamo scrivere

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

e per convergenza uniforme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial B_R} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{\lim f_n(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

e per il Teorema 10.5 f è analitica in z_0.

Per quanto riguarda le derivate, in un generico punto possiamo ripetere la costruzione precedente e scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} f_n'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial B_R} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{\lim f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi = f'(z) \end{aligned}$$

grazie alla convergenza uniforme delle $\{f_n\}$. A questo punto basta ricoprire K con un numero finito n di palle B_i e notare che $\|\cdot\|_K = \max_{i \le n} \|\cdot\|_{B_i}$. $\square$

Teorema 12.2. Sia f olomorfa sull'anello $A(R, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid r \le |z| \le R\}$ e sia $r < s < S < R$. Allora f ha un'espansione in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

che converge assolutamente (e quindi uniformemente) su $A(S, s)$. Se $C_\rho = \partial B(0, \rho)$, si ha $a_n =$

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi & \text{se} \quad n \ge 0 \\ \displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi & \text{se} \quad n < 0 \end{array}$$

Dimostrazione. Per ipotesi f è olomorfa su un aperto $U = A(R+\varepsilon, r-\varepsilon)$. Notiamo che la catena $C_R - C_r$ è omologa a 0 in U perché $\mathrm{W}(C_R, z) = \mathrm{W}(C_r, z) = 0$ se $|z| > R$ per il Lemma 11.3, altrimenti sono entrambi uguali ad 1. Quindi per la formula di Cauchy globale, per $z \in A \setminus \{C_R \cup C_r\}$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

A questo punto per il primo integrale si ripete la dimostrazione del Teorema 10.2, mentre per il secondo scriviamo

$$\xi - z = -z\left(1 - \frac{\xi}{z}\right)$$

e dato che $\left|\frac{\xi}{z}\right| \leq \frac{r}{s} < 1$ possiamo scrivere $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\xi}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi}{z}\right)^m$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\xi)}{z}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi}{z}\right)^m d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2\pi i} z^n \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi$$

e i coefficienti sono univocamente determinati perché dipendono solo da f, dato che per il Lemma 8.15 cambiare anello non cambia gli integrali. □

Ovviamente lo sviluppo si può fare in un generico z_0.

Teorema 12.3 (di estensione di Riemann)**.** Sia $U = B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ ed f analitica su U. Se f è limitata in un intorno di z_0, si può definire $f(z_0)$ in un'unico modo tale che f risulti analitica in z_0.

Dimostrazione. Supponiamo WLOG $z_0 = 0$ e sviluppiamo f in serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Basta far vedere che $n < 0 \Rightarrow a_n = 0$. Per ogni C_r, con r sufficientemente piccolo, si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\xi)\xi^{-n-1} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

perché f è limitata in un intorno di 0 ed $n < 0$. L'unicità segue dal fatto che una funzione analitica è continua. □

Teorema 12.4. f ha un polo di ordine m in z_0 se e solo se $f(z)(z-z_0)^m$ è analitica e non nulla in z_0.

Dimostrazione. Per definizione lo sviluppo in serie di Laurent di f in z_0 ha m termini negativi non nulli, e moltiplicare per $(z-z_0)^m$ shifta i coefficienti di m posizioni. Viceversa se $f(z)(z-z_0)^m$ è analitica e non nulla in z_0 dividendo per $(z-z_0)^m$ si shiftano i coefficienti di m posizioni indietro. □

Teorema 12.5 (di Casorati-Weierstrass)**.** Sia f olomorfa su $U = B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$ con una singolarità essenziale in z_0. Allora $f(U)$ è denso in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Se esistessero $\alpha \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R}^+$ tali che $B(\alpha, s) \cap f(U) = \emptyset$, la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}$ sarebbe olomorfa e limitata su U, quindi per il Teorema di estensione di Riemann z_0 è una singolarità removibile e g può essere estesa a una funzione olomorfa su tutta $B(z_0, \rho)$. Quindi $\frac{1}{g(z)} = f(z) - \alpha$ avrebbe una singolarità removibile o al più un polo in z_0. $\square$

Teorema 12.6. I biolomorfismi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono tutti e soli quelli della forma $z \mapsto az + b,\ a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Il "tutti" è ovvio. Per il "soli" possiamo supporre WLOG $f(0) = 0$. Quindi vogliamo dimostrare che se $f(z)$ è un biolomorfismo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, allora $f(z) = az,\ a \neq 0$. Sia $h(z) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Dato che f è un biolomorfismo locale in 0, è bigettiva, aperta e continua fra due intorni di 0, quindi siccome è anche surgettiva $\exists \delta > 0,\ \exists c > 0$ tali che $|w| \geq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(w)| > c$. Allora $\left|\frac{1}{w}\right| < \delta \Rightarrow \left|h\left(\frac{1}{w}\right)\right| > c$, quindi per il Teorema di Casorati-Weierstrass h non può avere una singolarità essenziale in 0. Quindi $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$ ha solo un numero finito k di termini non nulli, e perciò f è un polinomio di grado k. Se f ha due zeri distinti non può essere iniettiva, quindi dato che abbiamo supposto $f(0) = 0$ si ha $f(z) = az^k$, da cui $k = 1$ sempre per iniettività. $\square$

13 Residuati bellici

Teorema 13.1. Sia z_0 una singolarità isolata di f e sia $C = \partial B(z_0, \rho)$ orientato in senso antiorario e tale che f sia olomorfa su $\overline{B(z_0, \rho)} \setminus \{z_0\}$. Allora $\int_c f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$.

Dimostrazione. Per $z \in C$ la serie di Laurent di f converge assolutamente, quindi si può integrare termine a termine, e $n \neq -1 \Rightarrow \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$. $\square$

Teorema 13.2 (Formula dei residui)**.** Sia γ una catena chiusa omologa a 0 in un aperto U. Sia f olomorfa su $U \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Allora

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}\,(\gamma, z_k) \operatorname{Res}_{z_k} f$$

Dimostrazione. Segue immediatamente combinando il Teorema precedente con il Teorema 11.8. $\square$

Lemma 13.3. Se f ha un polo semplice in z_0 e g è olomorfa in z_0, $\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0}(f)$.

Dimostrazione. Supponiamo WLOG $z_0 = 0$. Allora se $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \ldots$ e $g(z) = b_0 + \ldots$ si ha $f(z)g(z) = \frac{b_0 a_{-1}}{z} + \ldots$, dove i puntini indicano termini di grado maggiore. $\square$

Lemma 13.4. Se $f'(z_0) \neq f(z_0) = 0$, allora $\frac{1}{f}$ ha un polo semplice in z_0 e $\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Dimostrazione. Supponiamo sempre WLOG $z_0 = 0$. Per ipotesi $f(z) = a_1 z(1-h)$, con $a_1 \neq 0$ e $\operatorname{ord} h \geq 1$. Quindi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_1 z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} h^n\right)$$

e questo conclude. □

Lemma 13.5. Sia f meromorfa in 0. Allora $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_{z_0} f$.

Dimostrazione. Al solito, $z_0 = 0$ WLOG. Dire che f è meromorfa in 0 vuol dire che f non ha una singolarità essenziale in 0, quindi possiamo scrivere $f(z) = a_m z^m (1 + h(z))$. Segue direttamente dalla formula per la derivata del prodotto che $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$. Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1 + h(z)}$$

e $\frac{h'(z)}{1+h(z)}$ è olomorfa in 0, quindi non ha termini negativi nel suo sviluppo in serie di Laurent. □

Teorema 13.6. Sia γ una catena chiusa omologa a 0 nell'aperto U. Sia f meromorfa su U con un numero finito di zeri e poli nei punti $z_1, \ldots, z_n$, nessuno dei quali su γ. Allora

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}\left(\gamma, z_k\right) \operatorname{ord}_{z_k} f$$

Dimostrazione. Combinazione del Lemma precedente con la Formula dei residui. □

Corollario 13.7. Se C è una curva semplice chiusa, f è meromorfa su C e il suo interno e non ha poli o zeri su C allora

$$\int_C \frac{f'}{f} = 2\pi i(z - p)$$

dove z e p sono rispettivamente il numero di zeri e poli (con molteplicità) nell'interno di C.

Teorema 13.8 (di Rouché)**.** Sia γ un cammino chiuso omologo a 0 in U dotato di interno. Siano f, g analitiche su U e tali che $z \in \gamma \Rightarrow |f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri nell'interno di γ.

Dimostrazione. Per le ipotesi fatte f e g non hanno zeri su γ (la disuguaglianza è stretta) e dividendo per $|f(z)|$, detta $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, si ha $F \circ \gamma \subset B(1,1)$, quindi $W(F \circ \gamma, 0) = 0$. Se γ è parametrizzata su $[0,1]$ si ha

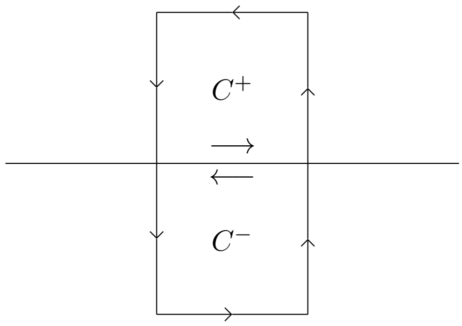
$$\begin{aligned} 0 =& W(F \circ \gamma, 0) = \int_{F\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t)\, dt \\ =& \int_\gamma \frac{F'}{F} = \int_\gamma \frac{\frac{g'f - f'g}{f^2}}{\frac{g}{f}} = \int_\gamma \frac{g'}{g} - \int_\gamma \frac{f'}{f} \end{aligned}$$

che per il Corollario precedente, dato che f e g sono olomorfe e quindi non hanno poli, è la differenza fra il numero di zeri di f e di g. $\square$

14 Tiri salvezza, prove di artigianato ed altre amenità

Teorema 14.1. Sia U^+ un aperto connesso contenuto nel semipiano superiore tale che $\partial U^+ \supset I$ con I intervallo aperto non vuoto di reali. Sia $U^- = \{\bar{z} \mid z \in U^+\}$ e supponiamo che $U = U^+ \cup I \cup U^-$ sia aperto. Se f è analitica su U^+ e U^- ed è continua su I, allora è analitica su U.

Dimostrazione. L'idea è costruire una g analitica su U e dimostrare che coincide con f.



Fissato un punto su I, consideriamo un rettangolo come in figura che lo contenga, con il bordo $C = C^+ + C^-$ orientato in verso antiorario. Per z nel rettangolo definiamo

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Se $z \notin I$ possiamo scrivere

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Se $C_\varepsilon^+, C_\varepsilon^-$ sono i bordi dei rettangoli delimitati da C^+ e C_- traslati rispettivamente in alto e in basso di ε e z è nel rettangolo delimitato da C_ε^+, per la formula di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

d'altronde, per gli z all'interno di C^+ si ha

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene stimando la differenza fra gli integrali e notando che l'integrale sui due rettangolini che formano $C_\varepsilon^+ - C_+$ tende a 0 per continuità di f. Similmente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

ma questa volta $\int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = 0$ perché $W(C_\varepsilon^-, z) = 0$. Notiamo inoltre che per gli $z \in C^-$ vale il discorso simmetrico. Quindi vale $f(z) = g(z)$ per z vicino ad I, e quindi anche per $z \in I$ per continuità. A questo punto la connessione di U implica $f = g$ per il Teorema 6.5. $\square$

Teorema 14.2 (Principio di riflessione di Schwarz)**.** Nelle notazioni precedenti, se f è continua su $U^+ \cup I$, analitica su U^+ e a valori reali su I, allora ha un'unico prolungamento analitico F su U, e questo verifica $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Dimostrazione. Basta verificare che $F = \overline{f(\bar{z})}$ verifica le ipotesi del Teorema precedente. La continuità di F su I segue dal fatto che f ha valori reali su I. Inoltre F è analitica su U^- perché

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\bar{z} - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} (z - \overline{z_0})^n$$

$\square$

Teorema 14.3 (Mittag-Leffler)**.** Siano $\{z_n\}$ una successione di complessi distinti tale che $|z_n| \to \infty$ e $\{P_n\}$ una successione di polinomi senza termine noto. Allora esiste f meromorfa i cui poli sono tutti e soli gli z_n, ciascuno con parte principale $P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right)$. In particolare

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{n=0}^{+\infty} P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z)$$

dove Q_n è un polinomio, φ è intera, e la serie converge assolutamente su ogni compatto disgiunto dai poli.

Dimostrazione. A meno di aggiungere una parte principale in 0 alla fine (il problema è banale se gli z_n sono finiti) possiamo supporre $\forall n z_n \neq 0$. Espandiamo $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ come serie di $\frac{z}{z_n}$ centrata in 0. Questa sarà una combinazione lineare (secondo i coefficienti di P) delle serie di potenze

$$\frac{1}{(z-z_n)^k} = \frac{(-1)^k}{z_n^k}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^k} = \frac{1}{z_n^k}\sum b_j\left(\frac{z}{z_n}\right)^j$$

dove i b_j vengono fuori sviluppando in serie geometrica $\frac{1}{1-\frac{z}{z_n}}$, elevando alla k, raggruppando i termini e considerando il $(-1)^k$. Siccome il raggio di convergenza di $\frac{1}{(1-t)^k}$ è 1, si ha

$$|b_j| \ll_k (1+\varepsilon)^j$$

quindi, fissato $d_n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, se Q_n è il polinomio di grado $\leq d_n - 1$ ottenuto troncando lo sviluppo di $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ in 0, si ha

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)\right| \ll_n \sum_{j=d_n}^{+\infty}(1+\varepsilon)^j\left|\frac{z}{z_n}\right|^j$$

e se la serie a destra converge le code sono infinitesime, quindi esiste d_n tale che per $\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}$ si abbia

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

Per dimostrare che la serie che ci interessa converge su ogni compatto disgiunto dagli z_n, fissiamo R e, visto che la successione $\{z_n\}$ diverge, possiamo trovare N tale che $R \leq |z_N|$ e spezzare

$$\sum_{n=1}^{N} P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - Q_n(z)$$

e notare che la prima è una somma finita e ha i poli desiderati, mentre la seconda è dominata da $\sum \frac{1}{2^n}$ e non ha poli per $|z| \leq \frac{R}{2}$. Per arbitrarietà di R, e per il fatto che siamo liberi di aggiungere una φ intera, abbiamo finito. □

Corollario 14.4 (problema di Weierstrass)**.** Siano $\{z_n\}$ una successione di complessi distinti tale che $|z_n| \to \infty$ e $\{m(z_n)\}$ una successione di interi. Allora esiste g meromorfa tale che, convenendo che i poli sono zeri di molteplicità negativa, gli zeri di g sono tutti e soli gli z_n, con molteplicità $m(z_n)$, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$ la funzione $\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m(z_n)}}$ è (prolungabile a) olomorfa non nulla in z_n.

Dimostrazione. Supponiamo di nuovo (WLOG a meno di moltiplicare alla fine per $z^{m(0)}$) che $\forall n\ z_n \neq 0$. Sia f la soluzione del problema di Mittag-Leffler con la stessa successione $\{z_n\}$, $P_n(Z) = m(z_n)Z$ e φ nulla. Allora la funzione

$$g(z) = \exp\left(\int_0^z f(t)\,dt\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \exp\left(\int_0^z \frac{m(z_n)}{(t-z_n)} - Q_n(t)\,dt\right)$$

è ben definita perché la funzione exp rimuove l'ambiguità dell'integrale e per costruzione converge assolutamente sui compatti disgiunti da $\{z_n\}$. Facendo due calcoli

$$g(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m(z_n)} \cdot e^{-R_n(z)}$$

dove R_n è una primitiva di Q_n e $\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ salta fuori imponendo che sia una funzione della forma $K(z-z_n)^{m(z_n)}$ con $K \in \mathbb{C}$ e valga 1 in 0. □

Teorema 14.5. Ogni funzione F meromorfa su $\mathbb{C}$ è esprimibile come $\frac{f}{g}$, con f, g intere e $g \neq 0$.

Dimostrazione. Se $\{z_n\}$ è l'insieme dei poli di F opportunamente numerato e $p(z_n)$ l'ordine del polo, e g è una soluzione del problema di Weierstrass associato, possiamo scrivere F come rapporto delle funzioni g (è intera perché l'ordine del polo è positivo: g ha zeri dove F ha poli, con le molteplicità giuste) ed $f = F \cdot g$, intera per costruzione. □

Teorema 14.6. Le funzioni olomorfe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono tutte e sole le funzioni razionali.

Dimostrazione. Il "tutte" è ovvio. Per il "sole" notiamo che f è meromorfa su $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$, e per il Teorema 14.5 si scrive come $\frac{h}{g}$. Dato che deve essere continua su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non può avere singolarità essenziali, nemmeno all'infinito. Questo vuol dire che il suo sviluppo in serie di Laurent in ogni punto ha un numero finito di termini, e quindi g ed f sono polinomi e conclude. $\square$

Lemma 14.7. Se X e Y sono spazi localmente compatti di Hausdorff e $f : X \to Y$ è propria, è chiusa.

Dimostrazione. Se X è compatto f è continua da un compatto in un Hausdorff e quindi è chiusa. Altrimenti siano $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ le rispettive compattificazioni di Alexandroff e $\hat{f}$ che coincida con f su X e tale che $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$. Notiamo che $\hat{f}$ è continua, perché se V è un intorno di ∞_Y, $\hat{f}^{-1}(\hat{Y} \setminus V)$ è per ipotesi compatto e quindi $\hat{f}^{-1}(V)$ è un intorno di ∞_X. Ora, i chiusi di $\hat{X}$ sono i compatti di X, complementari degli aperti che sono intorni di ∞_X, o i complementari di aperti di X, quindi sono della forma $C \cup \{\infty_X\}$, con C chiuso di X; discorso analogo per i chiusi di Y. Adesso siamo nell'ipotesi compatta, quindi $\hat{f}$ è chiusa e per la caratterizzazione precedente dei chiusi di $\hat{X}$ e $\hat{Y}$, si ha che $f(C)$, con C chiuso di X, è un chiuso di Y. $\square$

Lemma 14.8. Una funzione olomorfa e propria fra superifici di Riemann è surgettiva o costante.

Dimostrazione. Se è propria è chiusa per il Lemma precedente, ma in quanto olomorfa se non è costante è aperta, quindi la sua immagine è clopen e quindi tutto perché una superficie di Riemann è connessa per definizione. $\square$

Segue una dimostrazione alternativa del teorema della funzione inversa (Teorema 7.4). In sostanza vogliamo dimostrare che

Teorema 14.9. Sia f analitica in z_0 e tale che $f'(z_0) \neq 0$. Allora f è un biolomorfismo locale.

Dimostrazione. Supponiamo WLOG $f(z_0) = z_0 = 0$. Dato che $f'(0) \neq 0$ si ha $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ con $a_1 \neq 0$. A meno di dividere, possiamo considerare sempre WLOG $a_1 = 1$. Possiamo quindi scrivere $f(z) = z + h(z)$, dove $\operatorname{ord} h \geq 2$. In un intorno abbastanza piccolo di 0 possiamo quindi trovare una costante K tale che $|f(z) - z| \leq K\,|z|^2$. A questo punto prendiamo r tale che f' non si annulli mai in $B(0, r)$ (possiamo farlo perché f' è olomorfa) e che $r < \frac{1}{2K}$ e per $|\alpha| \leq \frac{r}{2}$ definiamo $f_\alpha(z) = f(z) - \alpha$ e $g_\alpha(z) = z - \alpha$. Abbiamo quindi $|f_\alpha(z) - g_\alpha(z)| \leq K\,|z|^2$ e per $z \in \partial B(0, r)$ si ha

$$K\,|z|^2 = Kr^2 < \frac{r}{2} < |z - \alpha| = |g(z)|$$

dato che g_α ha solo uno zero in $B(0,r)$, per il Teorema di Rouché $f(z)=\alpha$ ha una sola e una sola soluzione in $B(0,r)$ (se $|\alpha|<\frac{r}{2}$). Per continuità di f si ha che $U=f^{-1}(B(0,\frac{r}{2}))\cap B(0,r)$ è aperto, quindi $f_{|U}$ è olomorfa, aperta e bigettiva, quindi un omeomorfismo. Resta da dimostrare che $\varphi=(f_{|U})^{-1}$ è olomorfa. Fissato $w_1\in B(0,\frac{r}{2})$, scriviamo

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}=\frac{z-z_1}{f(z)-f(z_1)}\xrightarrow{w\to w_1}\frac{1}{f'(z_1)}$$

e, per la scelta di r, questo conclude la dimostrazione. $\square$