Disclaimer

Questi appunti nascono ad uso e consumo dell'autore, che li ha TEXati in diretta durante il corso di Elementi di Topologia Algebrica tenuto dal professor Petronio presso l'Università di Pisa. Come conseguenza possono essere *molto* poco chiari, difettare di qualcosa, eccetera eccetera, anche e sopratutto perché a un certo punto l'autore ha smesso di seguire il corso (mancano le ultime lezioni) e non li ha più risistemati. Sentitevi liberi di insultarmi, segnalare sviste, eccetera presso `mennuni@mail.dm.unipi.it`.

SPAM: ascoltate `www.radiocicletta.it`

Nota: (disegno) o cose simili significa "qua per capire meglio le cose servirebbe il disegno, fra l'altro disponibile negli appunti di Petronio sulla sua pagina, ma purtroppo non sono ancora in grado di farlo al volo in LaTeX".

Rosario "Mufasa" Mennuni

Indice

1 25/09

Mandare una mail a `petronio@dm.unipi.it` perché possa creare la mailing list del corso. I quarti d'ora accademici sono a *fine* ora.

1.1 Piccola infarinatura di Teoria delle Catgorie

Non insisteremo troppo sugli aspetti categoriali, tuttavia:

Definizione 1.1. Una *categoria* C è il dato di

- Una classe (possibilmente propria) di oggetti $\mathrm{Obj}(C)$
- per ogni $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$, un *insieme* $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ (eventualmente vuoto)
- per ogni $X, Y, Z \in obj(C)$ una legge $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$ (nonostante la notazione, non è detto che f, g siano funzioni)

tali che

- $\exists 1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ tale che $f \circ 1_X = f$, $1_X \circ f = f$
- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Esempio 1.2. Alcuni esempi di categorie:

- La categoria Set, dove la classe degli oggetti è V, gli omomorfismi sono le mappe e $\circ$ è la composizione di mappe. 1_X è Id_X
- La categoria Top, con oggetti gli spazi topologici e come mappe le funzioni continue.
- La categoria Group, con oggetti i gruppi e omomorfismi gli omomorfismi di gruppi.
- La categoria Inj, sottocategoria di Set dove le mappe sono solo quelle iniettive. Analogamente Surj e Bij.

Esempio 1.3. Esempi di categorie dove gli omomorfismi non sono mappe:

- Sia X un poset. Definiamo $\mathrm{Obj}(C) = X$ e, per ogni $x, y \in X$ definiamo

  $$\mathrm{Hom}_C(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se} \quad x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Inoltre la regola di composizione $\mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(y, z) \to \mathrm{Hom}(x, z)$ è definita come il vuoto a meno che $x \leq y \leq z$ dov'è definita come ci si aspetta.

- La categoria C dove gli oggetti sono i gruppi e $\mathrm{Hom}_C(G,H)$ è l'insieme delle classi di coniugio di omomorfismi $G \to H$, dove φ, ψ sono coniugate se esiste $h \in H$ tale che $\forall g \in G$ $\psi(g) = h \circ \varphi(g) \circ h^{-1}$. La composizione è definita come ci si aspetta, verificando la buona definizione, e chiaramente $1_G = [\mathrm{Id}_G] = \{\mathrm{Id}_G\}$.

(considerando la categoria KTop (spazi topologici + classi di omotopia) penso che ogni volta che una relazione di equivalenza si comporta bene con la composizione si ha un altro esempio di categoria dove i morfismi non sono funzioni, ma non ho controllato che sia vero).

Lemma 1.4. In una categoria C

- 1_X è unico
- Se $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ ha un inverso sinistro $g \in \mathrm{Hom}(Y,X)$ (cioè $g \circ f = 1_X$) è un inverso destro $h \in \mathrm{Hom}(Y,X)$ (cioè $f \circ h = 1_Y$), allora $h = g$ e lo chiameremo inverso.
- L'inverso è unico (se esiste).

Dimostrazione.

- Routine.
- $g = g \circ 1_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_X \circ h = h.$
- Ovvio.

□

Definizione 1.5. Se esiste $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ invertibile, f è un *isomorfismo* e X è *isomorfo* ad Y.

Definizione 1.6. La *categoria opposta* a C è denotata con $\mathrm{OP}(C)$ ed è quella con gli stessi oggetti, ma con $\mathrm{Hom}_{\mathrm{OP}(C)}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ e $f \circ_{\mathrm{OP}(C)} g = g \circ_C f$.

Definizione 1.7. Se C è una categoria in cui gli oggetti sono insiemi muniti di una qualche struttura e $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sono le mappe da $X \to Y$ che preservano la struttura, posso definire la *categoria delle coppie* derivata da C come la categoria $\mathcal{P}$ dove

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{P}) = \left\{ A \xrightarrow{i} X \mid A, X \in \mathrm{Obj}\, C, i \in \mathrm{Hom}(A,X), i \text{ iniettiva} \right\}$$

$$\mathrm{Hom}(A \xrightarrow{i} X, B \xrightarrow{j} Y) = \{(p,q) \mid \downarrow \text{ commuta}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Definizione 1.8. Siano C, D categorie. Un *funtore covariante* F da C a D è il dato di

- Una funzione-classe $F\colon \mathrm{Obj}(C) \to \mathrm{Obj}(D)$
- $F\colon \mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$

tali che

- $F(1_X^C) = 1_{F(X)}^D$
- $F(f \circ_C g) = F(f) \circ_D F(g)$

Osserviamo che

Lemma 1.9. Se $X, Y \in \mathrm{Obj}(C)$ sono isomorfi in C, allora $F(X), F(Y)$ sono isomorfi in D.

Dimostrazione. Ovvio. $\square$

Definizione 1.10. Un *funtore controvariante* F è il dato di

- Una funzione-classe $F\colon \mathrm{Obj}(C) \to \mathrm{Obj}(D)$
- $F\colon \mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_D(F(Y), F(X))$ (gira le frecce)

tale che

- $F(1_X) = 1_{F(X)}$
- $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

Osserviamo che un funtore controvariante $C \to D$ induce un funtore covariante $C \to \mathrm{OP}(D)$ e viceversa.

L'idea della topologia algebrica è quella di costruire funtori da Top o sue sottocategorie a categorie di tipo algebrico, con l'idea che in ambito algebrico è più facile fare i conti. Questo permette di ottenere invarianti.

Un altro

Esempio 1.11. Sia $\mathcal{G}$ la categoria dei gruppi *abeliani* e G_0 un gruppo[1] fissato. Costruisco un funtore covariante $F\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ definito come

- $F(G) = \mathrm{Hom}(G_0, G)$, dove l'operazione di gruppo dell'oggetto a destra è la moltiplicazione posto per posto, cioè $(\varphi \circ \psi)(g_0) = \varphi(g_0) \cdot \psi(g_0)$ (la buona definizione sfrutta l'abelianità, altrimenti non è un omomorfismo).
- Se $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, definisco $F(f)\colon \mathrm{Hom}(G_0, G) \to \mathrm{Hom}(G_0, H)$ come $\varphi \mapsto f \circ \varphi$.

[1] Non mi è chiaro se è necessario che sia anch'esso abeliano

La definizione è ben posta, nel senso che

$$F(\mathrm{Id}_G)(\varphi) = \mathrm{Id}_G \circ \varphi = \varphi \Rightarrow F(\mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(G_0,G)}$$

e che

$$F(f \circ \ell)(\varphi) = f \circ \ell \circ \varphi = F(f)(f(\ell)(\varphi)) = (F(f) \circ F(\ell))(\varphi) \Rightarrow F(f \circ \ell) = F(f) \circ F(\ell)$$

Sempre considerando $\mathcal{G}$ e G_0, se definisco $F\colon G \to G$ come $F(G) = \mathrm{Hom}(G, G_0)$ e $F(f)\colon \varphi \mapsto \varphi \circ f$ ho un funtore controvariante.

Definizione 1.12. Siano F_1, F_2 funtori covarianti da C a D. Una *trasformazione naturale* da F_1 ad F_2 è il dato di un'applicazione $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_D(F_1(X), F_2(X))$ per ogni $X \in C$ tale che per ogni $X, Y \in C$ e per ogni $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
F_1(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F_1(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
F_2(X) \arrow[r, "F_2(f)"] & F_2(Y)
\end{tikzcd}$$

1.2 Simplessi geometrici e orientazioni

Definizione 1.13. Dati $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^N$, definisco l'*inviluppo convesso* $\mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_n)$ come il più piccolo convesso che contiene $v_0, \ldots, v_n$.

È facile vedere che questo esiste ($\mathbb{R}^N$ è convesso quindi la famiglia da intersecare è non vuota).

Lemma 1.14. $\mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_n) = \{\sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$

Dimostrazione. Se D è l'insieme delle combinazioni convesse dei v_i, per mostrare che D è convesso basta notare che

$$\lambda \sum t_i v_i + (1-\lambda) \sum s_i v_i = \sum (\lambda t_i + (1-\lambda) s_i) v_i$$

Mostriamo l'altra inclusione per induzione sul numero k dei t_i non nulli. Se $k = 1$ è ovvio. Altrimenti sia $t_0 > 0$ e $t_j \neq 0$ con $j > 0$. Si ha $t_0 < 1$, e

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = t_0 \underbrace{v_0}_{\in C} + (1 - t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_0} v_i}_{\in C \text{ per ipotesi induttiva}}$$

e questo punto appartiene a tutti i convessi che contengono i v_i. $\square$

Proposizione 1.15. Siano $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$. Sono equivalenti:

1. Non esiste un sottospazio affine di dimensione $\leq n-1$ che li contiene
2. $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$ sono linearmente indipendenti
3. Se $\sum_{i=0}^n t_iv_i = 0$ e $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ allora $\forall i \; t_i = 0$
4. Ogni elemento di $\mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ si scrive in maniera unica come $\sum_{i=0}^n t_iv_i$.

Dimostrazione.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue dal fatto che il più piccolo sottospazio affine che li contiene è $v_0 + \mathrm{Span}(\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n})$.
- (2) $\Rightarrow$ (3) è ovvio.
- Per $\neg(3) \Rightarrow \neg(2)$ e $\neg(4) \Rightarrow \neg(2)$ rimonto una combinazione lineare che falsifica l'indipendenza.
- Per (3) $\Rightarrow$ (4) basta fare la differenza dei coefficienti e deve fare 0.
- Per $\neg(3) \Rightarrow \neg(4)$, se ho $\sum t_i = 0$ con i t_i non tutti nulli e $\sum t_iv_i = 0$, ho t_i sia positivi che negativi. Senza perdita di generalità siano $t_0, \dots t_p > 0$, $t_{p+1}, \dots t_q < 0$ e il resto nulli. Sia

$$a = \sum_{i=0}^{p} t_i = \sum_{i=p+1}^{1} (-t_i)$$

Ho che

$$\sum_{i=0}^{p} \frac{t_i}{a} v_i = \sum_{i=p+1}^{1} \frac{-t_i}{a}$$

sono due combinazione convesse diverse (i punti sono diversi!) che danno lo stesso punto.

$\square$

Definizione 1.16. Se vale una delle precedenti condizioni equivalenti $v_0, \dots, v_n$ si dicono *affinemente indipendenti* e $\mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ si dice *n-simplesso* (*geometrico*).

Definizione 1.17. Una *orientazione* per un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione finita è una scelta di

$$\omega \in {\{\mathscr{B} \mid \text{ base di } V\}}/{\sim}$$

dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza che identifica due basi se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo. Dare un'*orientazione* per uno spazio affine vuol dire darne una per la giacitura.

Osserviamo che le orientazioni possibili sono solo due.

Notazione 1.18 (a breve)**.** Se σ è un n-simplesso, $\bar{\sigma}$ è il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^N$ che contiene σ.

Definizione 1.19. Un'*orientazione* di σ è equivalentemente definita come:

1. Un'orientazione per $\bar{\sigma}$.

2. Un ordinamento dei vertici a meno di permutazioni pari (cioè elementi di A_{n+1}).

Verifichiamo che questa è una buona definizione.

Dimostrazione. Ad ogni ordinamento $v_0, \ldots, v_n$ dei vertici associo la classe di equivalenza della base $[(\overrightarrow{v_0v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_0v_n})]$ (è una base grazie alla Proposizione 1.15). Per mostrare la buona definizione devo mostrare che la matrice di cambiamento di base relativa ad una permutazione dei v_i ha determinate positivo se e solo se la permutazione è pari. Basta chiaramente mostrare che applicando una trasposizione la matrice di cambiamento di base cambia segno, e questo è ovvio dalle proprietà del determinante, controllando sulle trasposizioni $(m, m+1)$ (che generano S_n). Infatti, ad esempio, se come trasposizione considero $(0,1)$, ho che $\overrightarrow{v_1v_n} = \overrightarrow{v_0v_n} - \overrightarrow{v_0v_1}$. La matrice di cambiamento di base è l'identità, tranne che per la prima riga che è fatta da tutti -1. Se invece considero $(1,2)$ (gli altri casi sono analoghi) la matrice è l'identità con le prime due righe scambiate. $\square$

2 26/09

2.1 Facce e orientazioni indotte

Definizione 2.1. Una *k-faccia* è l'inviluppo convesso di di certi $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$.

Esercizio 2.2. Una k-faccia è un k-simplesso.

Definizione 2.3. Se $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, v_n)$, definisco la *parte interna*

$$\mathrm{int}(\sigma) = \left\{ \sum t_i v_i \mid \sum t_i = 1, \forall i \; t_i > 0 \right\}$$

È facile vedere che coincide con la parte interna nell'usuale senso della topologia euclidea sul minimo sottospazio affine che contiene σ. Osserviamo inoltre che σ è unione disgiunta delle parti interne delle sue facce.

Definizione 2.4. Siano σ un n-simplesso orientato e τ una faccia di codimensione 1. L'*orientazione indotta* da σ su τ è equivalentemente definita come

1. La cosiddetta regola della "normale esterna per prima": $(u_1, \ldots, u_n)$ base di $\bar{\tau}$ è positiva se, scelto $w \in \bar{\sigma}$ esterno a σ si ha che $w, u_1, \ldots, u_n$ è una base positiva per $\bar{\sigma}$ dove, considerando che $\bar{\tau}$ è un iperpiano in $\bar{\sigma}$ e σ giace in uno dei due semispazi determinati da $\bar{\tau}$, "esterno" vuol dire che punta nell'altro semispazio.

2. Se $(v_0, \ldots, v_n)$ è un ordinamento positivo e τ è opposta a v_i (le facce di codimensione 1 sono opposte ad un vertice), allora $(-1)^i \cdot (v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n)$[2] è positivo per τ.

Precisazione: per un punto (visto che non ha senso parlare di basi) un'orientazione è semplicemente un segno + o −. (esempi di calcolo dell'orientazione indotta con entrambe le definizioni via disegni, poi se ho tempo li aggiungo. Se qualcuno li vuole fare con `tikz`...)

Ora verifichiamo l'equivalenza delle precedenti.

Dimostrazione. Considero l'orientazione per cui con la regola (2) $(v_0, \ldots, v_n)$ è positivo, cioè secondo la (1) $\overrightarrow{v_0v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_0v_n}$ è positivo. Considero $\tau = \mathrm{Conv}(v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n)$. Per $i = 0$ ho che $\overrightarrow{v_0v_1}$ è esterno a τ. Devo vedere che $\overrightarrow{v_1v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_1v_n}$ è positiva secondo (1), cioè $\overrightarrow{v_0v_1}, \overrightarrow{v_1v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_1v_n}$ è positiva. Basta scrivere la matrice di cambiamento di base, che è l'identità tranne che per la prima riga che è $(1, -1, \ldots, -1)$. Nel caso $i > 0$ ho che $\overrightarrow{v_iv_0}$ è un vettore esterno. Devo vedere che l'ordinamento dato da (2) $\overrightarrow{v_0v_1}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{v_0v_1}}, \ldots, \overrightarrow{v_0v_n}$ hanno segno $(-1)^i$, cioè che $\overrightarrow{v_iv_0}, \overrightarrow{v_0v_1}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{v_0v_i}}, \ldots, \overrightarrow{v_0v_n}$ hanno segno $(-1)^i$. Dato che $\overrightarrow{v_iv_0} = -\overrightarrow{v_0v_i}$, la matrice di cambio base ha come prima colonna $(0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^t$, dove il -1 è in posizione i e la i-esima riga è per il resto fatta di 0, gli altri blocchi sono identità o 0 nei posti giusti e quindi torna. □

Proposizione 2.5. Siano $F, G \subset \sigma$ facce distinte di codimensione 1. $\tau = F \cap G$ è una faccia di codimensione 2. Scelta un'orientazione su σ le orientazioni su τ indotte "passando da F" e "passando da G" sono opposte fra loro.

"Passando da" vuol dire l'orientazione indotta su τ dall'orientazione indotta su F da σ. Vedremo due dimostrazioni.

Dimostrazione. Siano w_F esterno ad F lungo τ in $\bar{F}$, e w_G analogamente per G. Allora $w_F + w_G$ è esterno sia ad F che a G lungo $\tau = F \cap G$ in $\bar{\sigma}$. Sia $u_2, \ldots, u_n$ base di $\bar{\tau}$. Mi chiedo se è positiva rispetto all'orientazione $\sigma \rightsquigarrow F \rightsquigarrow \tau$. Questo succede se (definizioni) $w_F + w_G, w_F, u_2, \ldots, u_n$ è positiva in $\bar{\sigma}$. Similmente è positiva rispetto a $\sigma \rightsquigarrow G \rightsquigarrow \tau$ se $w_F + w_G, w_G, u_2, \ldots, u_n$ è positiva in $\bar{\sigma}$. La matrice di cambio ha in cima il blocco

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[2] Il cappuccio denota il vettore rimosso.

e per il resto è l'identità, e ha determinante -1. $\square$

Vediamo la seconda

Dimostrazione. Sia $i < j$, cioè $F = v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n$, $G = v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n$, con $v_0, \dots, v_n$ positiva per σ. L'orientazione su F è $(-1)^i(v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n)$, quella indotta da F su τ è $(-1)^i(-1)^{j-1}(v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_j} \dots, v_n)$ (il $j-1$ è perché ho tolto v_i *prima* di v_j). L'orientazione indotta da G su τ è invece $(-1)^i(-1)^j(v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n)$ perché tolgo prima v_j. $\square$

2.2 Complessi di catene

Definizione 2.6. Un *complesso di catene* è una successione di gruppi abeliani con omomorfismi infinita verso sinistra

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

tale che $\forall n$ $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, cioè $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$. Definisco $Z_n(C) = \operatorname{Ker} \partial_n$ (sono gli *n-cicli*) e le C_n le chiamo *n-catene*. $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ sono invece i *bordi*. Ho che

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \Leftrightarrow B_n(C) \subset Z_n(C)$$

Definisco $H_n(C)$ come ${Z_n(C)}\big/{B_n(C)}$, che è chiaramente un gruppo abeliano. Questo è l'*n-esimo gruppo di omologia* del complesso di catene C.

Introduciamo una struttura categoriale sui complessi di catene. Se C,C' sono complessi di catene chiamo *mappa tra complessi di catene* φ una successione di omomorfismi di gruppi abeliani $\varphi_n \colon C_n \to C'_n$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

(d'ora in poi la freccia circolare al centro significa che il diagramma commuta). Definisco la categoria che ha come oggetti i complessi di catene e come morfismi le mappe tra complessi di catene.

Se $\varphi \colon C \to C'$ è una mappa tra complessi di catene, φ induce per ogni naturale n una $\varphi_{*,n} \colon H_n(C) \to H_n(C')$. Verifichiamolo.

Dimostrazione. Ho $H_n = {Z_n(C)}\big/{B_n(C)}$ e vorrei definire per $z \in Z_n(C)$ la mappa come $\varphi_{*,n}([z]) = [\varphi_n(z)]$. Devo verificare che

- $\varphi_n(z) \in Z_n(C')$
- La buona definizione, cioè che $z \in B_n(C) \Rightarrow \varphi_n(z) \in B_n(C')$

Entrambi i fatti seguono facilmente dai diagrammi commutativi. La prima perché (guardare il diagramma)

$$\partial'_n(\varphi_n(z)) = \varphi_{n-1}(\partial_n(z)) = \varphi_{n-1}(0) = 0$$

La seconda usando sempre che i diagrammi opportuni commutano. Viene fuori che

$$z \in B_n(C) \Rightarrow z = \partial_{n+1}(w) \quad w \in C_{n+1}$$
$$\Rightarrow \varphi_n(z) = \varphi_n(\partial_{n+1}(w)) = \partial'_{n+1}(\varphi_{n+1}(w)) \Rightarrow \varphi_n(z) \in B_n(C')$$

□

Definizione 2.7. In termini categoriali abbiamo visto come ad un complesso di catene corrisponda una successione $\{H_n(C)\}_{n=0}^{+\infty}$ di gruppi abeliani e come ad una mappa $\varphi\colon C \to C'$ corrisponda una successione $\varphi_*\colon \{H_n(C)\} \to \{H_n(C')\}$ di omomorfismi di gruppi abeliani. Chiamo questo funtore H: è un funtore covariante dalla categoria dei complessi di catene a quella delle successioni di gruppi abeliani.

2.3 Omologia dei complessi simpliciali

Definizione 2.8. Un *complesso simpliciale* (*geometrico*) *finito* K è un insieme finito di simplessi in $\mathbb{R}^N$ tale che

1. Se $\sigma \in K$ e τ è faccia di σ, allora $\tau \in K$.
2. Se $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, allora $\sigma_1 \cap \sigma_2$ è una faccia di entrambi (possibilmente vuota[3]).

Notazione 2.9. $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, $K^{[n]} = \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) = n\}$[4], $K^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{n} K^{[n]}$.

Definizione 2.10. Sia K un complesso simpliciale in cui ogni simplesso ha una fissata arbitraria orientazione. Il *complesso di catene simpliciale* di K, denotato $C_n(K)$, è il gruppo abeliano libero generato da $K^{[n]}$, cioè l'insieme delle combinazioni lineari formali a coefficienti in $\mathbb{Z}$ degli n-simplessi. Se $\sigma \in K^{[n]}$ e τ è una faccia di codimensione 1 di σ pongo

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad \tau \text{ è orientato come faccia di } \partial\sigma \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[3]Pensando il vuoto come faccia -1-dimensionale
[4]Questa notazione non è standard.

Definisco

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

Estendo $\partial_n \colon C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ per $\mathbb{Z}$-linearità.

Corollario 2.11 (della Proposizione 2.5)**.** $\forall \sigma \in K^{[n]}$ $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = 0$

Sketch di dimostrazione. Se F, G sono orientate come in $\partial\sigma$ e τ è orientato come in ∂F si ha che $\varepsilon(\sigma, F) = +1$, $\varepsilon(\sigma, G) = +1$ e per la Proposizione 2.5 si ha $\varepsilon(F, \tau) = +1$ e $\varepsilon(G, \tau) = -1$. Ora il coefficiente di τ in $\partial_{n-1}\partial_n\sigma$ è $\varepsilon(\sigma, F)\varepsilon(F, \tau) + \varepsilon(\sigma, G)\varepsilon(G, \tau) = 0$. □

Poiché $C_n(K)$ è un complesso di catene sono definiti i gruppi di omologia $H_n(K)$. Questa sarà l'*omologia simpliciale* di K.

Il goal è provare che $H_n(K) = H_n(|K|)$ in maniera da poter buttare via la struttura simpliciale e usare l'omologia per studiare spazi topologici. Cominciamo mostrando che

Proposizione 2.12. $H_n(K)$ non dipende dalle orientazioni dei simplessi di K a meno di isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\widetilde{K}$ lo stesso complesso di K con altre orientazioni dei simplessi. Definisco $\varphi_n \colon C_n(K) \to C_n(\widetilde{K})$ estenendo per $\mathbb{Z}$-linearità la mappa

$$\varphi_n(\sigma) = \partial(\sigma) \cdot \sigma$$

dove

$$\delta(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad \sigma \text{ ha la stessa orientazione in } K, \widetilde{K} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È ovvio che φ_n è un isomorfismo. Affermo che

$$\begin{tikzcd} C_n(K) \arrow[r, "\partial_n^K"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1}(K) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ C_n(\widetilde{K}) \arrow[r, "\partial_n^{\widetilde{K}}"] & C_{n-1}(\widetilde{K}) \end{tikzcd}$$

e questo basta perché φ_* è l'isomorfismo indotto dalle φ_n^{-1}. Se $\sigma \in C_n(K)$ ho che

$$\varphi_{n-1}(\partial_n\sigma) = \varphi_{n-1} \sum \varepsilon^K(\sigma, \tau) \cdot \tau = \sum \varepsilon^K(\sigma, \tau) \cdot \delta(\tau) = \partial_n^{\widetilde{K}}(\varphi_n\sigma)$$

$$= \partial_n^{\widetilde{K}}(\delta(\sigma)\sigma) = \delta(\sigma) \cdot \sum \underbrace{\varepsilon^{\widetilde{K}}(\sigma, \tau)}_{\delta(\sigma)\cdot\varepsilon^K(\sigma,\tau)\cdot\delta(\tau) = \varepsilon^K(\sigma,\tau)} \cdot \tau$$

□

3 02/10

Finora stiamo seguendo il Matveev (con più dettagli, dovrebbe essere molto stringato, tipo Jech).

3.1 Suddivisioni

Vogliamo mostrare che l'omologia non dipende dalle triangolazioni. La strada sarà questa:

Definizione 3.1. L è una *suddivisione* di K se $|L| = |K|$ e ogni $\tau \in L$ è contenuto in qualche $\sigma \in K$.

Proposizione 3.2. Se L è una suddivisione di K, allora ogni $\sigma \in K$ è unione di elementi di L.

Osserviamo che se $X = \bigcup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ e $\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{A}\ B \subseteq A$, può comunque essere vero che ogni $A \in \mathcal{A}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, quindi bisognerà usare le ipotesi. Si fa un controesempio facile ricoprendo un segmento prima con due pezzi e poi con tre (servirebbe il disegno).

Teorema 3.3. Se L è una suddivisione di K, allora $\forall n\ H_n(L) \cong H_n(K)$.

Teorema 3.4. Se $|K_1| = |K_2|$, allora K_1 e K_2 hanno una suddivisione comune.

Notazione 3.5. Se σ è un simplesso, indico con $\mathcal{S}(\sigma)$ il minimo sottospazio affine che lo contiene.

Ricordiamo che con "parte interna" $\mathrm{int}(\sigma)$ intendiamo la parte interna topologica, che coincide con l'unione delle facce di codimensione positiva.

Lemma 3.6. Se $\tau \subset \sigma$ sono simplessi, η è una faccia di σ e $\eta \cap \mathrm{int}(\tau) \neq \emptyset$, allora $\tau \subset \eta$.

Dimostrazione. Dato che $\eta = \sigma \cap \mathcal{S}(\eta)$ e $\tau \subset \sigma$, se $\tau \not\subset \eta$, sia $p \in \tau \setminus \mathcal{S}(\eta)$, perché il punto non può essere sullo stesso piano perché sennò starebbe in η. Allora ho che i punti di $\tau \cap \eta$ non sono interni a τ perché per convessità in τ ci sono combinazioni convesse di p con qualche altro punto, e quindi τ interseca η sulla frontiera. (Ci sarebbe da fare un disegno per chiarezza.) □

Dimostriamo la 3.2:

Dimostrazione. Sia $\sigma \in K$. Devo mostrare che σ è unione di elementi di L. Dato $x \in \sigma$ voglio quindi trovare $\tau \in L$ tale che $x \in \tau \subset \sigma$. Poiché $|L| = |K| \ni x$, esiste $\tau \in L$ tale che $x \in \tau$. Posso supporre che $x \in \mathrm{int}(\tau)$, a meno di passare a una faccia dimensione più piccola. Più precisamente considero il più piccolo $\tau \in L$ tale che $x \in \tau$. Per ipotesi esiste $\sigma' \in K$ tale che $\tau \in \sigma'$. Usando il Lemma precedente, se $\eta = \sigma \cap \sigma'$, abbiamo che $\tau \subset \sigma'$ e $\mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$ (contiene x), quindi per il Lemma $\tau \subset \eta$, ma $\eta \subset \sigma$. □

Definizione 3.7. Se L suddivide K, data $\tau \in L$, il suo *antenato* $a(\tau) \in K$ il più piccolo simplesso di K che contiene τ.

Convengo di orientare $\tau \in L^{[n]}$ come $a(\tau)$ se $\dim(a(\tau)) = \dim(\tau)$, a caso altrimenti.

Proposizione 3.8. È vero che:

1. $\sigma \in K \Rightarrow \sigma = \bigcup_{\substack{\tau \in L \\ a(\tau)=\sigma}} \tau = \bigcup_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau)=\sigma}} \tau$

2. Se $\sigma \in K^{[n]}$, $\eta \in K^{[n-1]}$, $\eta \subset \sigma$, $u \in L^{[n-1]}$ tale che $a(u) = \eta$, allora esiste un unico $\tau \in L^{[n]}$ tale che $a(\tau) = \sigma$ e $u \subset \tau$. Inoltre $\varepsilon(\sigma, \eta) = \varepsilon(\tau, u)$.

3. $\tau \in L^{[n-1]}$ e $a(\tau) \in K^{[n]}$, allora esistono esattamente due $\beta \in L^{[n]}$ tali che $\tau \subset \beta$ e $a(\beta) = a(\tau)$. Inoltre date siffatte β_1, β_2, si ha $\varepsilon(\beta_1, \tau) + \varepsilon(\beta_2, \tau) = 0$.

4. Se $\beta, \beta' \in L^{[n]}$ e $a(\beta) = a(\beta') \in K^{[n]}$, allora β e β' sono unite da una sequenza di passaggi[5] $\beta \xrightarrow{\tau} \beta'$ come nel punto precedente.

Dimostrazione. Disegni. □

La dimostrazione del Teorema 3.3, che ci accingiamo a dare, dipende solo dalle proprietà elencate nella Proposizione 3.8. Vedremo altri contesti in cui queste proprietà varranno e ci farà comodo avere il Teorema, quindi useremo solo queste proprietà.

Dimostrazione. Definiamo $\psi_n \colon C_n(K) \to C_n(L)$ estendendo linearmente la mappa $\psi_n(\sigma) = \sum_{\substack{\tau \in L^{[n]} \\ a(\tau)=\sigma}} \tau$. Le catene in L sono molte di più, quindi non ci aspettiamo un isomorfismo di catene. Tuttavia riusciamo ad avere un isomorfismo in omologia. Dobbiamo dimostrare che:

1. $\partial_{n-1}^L \circ \psi_n = \psi_{n-1} \circ \partial_n^K$, cioè la famiglia $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ è una mappa fra complessi di catene e questo implica che $\psi_{n*} \colon H_n(L) \to H_n(K)$ è ben definita ed è un omomorfismo (come già dimostrato nella scorsa lezione).

2. $\forall z \in Z_n(L)\ \exists w \in Z_n(K)\ z = \psi_n(w)$ (questo implica la surgettività di ψ_{n*}).

3. $\forall z \in Z_n(K)\ \psi_n(z) \in B_n(L) \Rightarrow z \in B_n(K)$ (questo implica l'iniettività di ψ_{n*}

Dimostriamolo:

[5] La freccia *non* è una funzione!

1. Basta fare le verifiche su $\sigma \in K^{[n]}$. Ma
$$\partial^L_{n-1}(\psi_n(\sigma)) = \partial^L_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\tau\in L^{[n]}\\ a(\tau)\in\sigma}} \tau\Big) = \sum_{\substack{\tau\in L^{[n]}\\ a(\tau)\in\sigma}} \sum_{\substack{x\in L^{[n-1]}\\ x\subset\tau}} \varepsilon(\tau, x)x \tag{1}$$
e
$$\psi_{n-1}(\partial^K_n(\sigma)) = \psi_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\eta\in K^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}} \varepsilon(\sigma,\eta)\eta\Big) =$$
$$\sum_{\substack{\eta\in K^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}} \sum_{\substack{x\in L^{[n-1]}\\ a(x)=\eta}} \varepsilon(\sigma,\eta)x \tag{2}$$
Nella 1 e nella 2 sommo simplessi $x \in L^{[n-1]}$ con $x \subset \sigma$. Ho due casi: o $a(u) = \sigma$, e allora nella 2 non compare, mentre nella somma 1, per la terza proprietà della Proposizione 3.8, ci sono esattamente due facce di dimensione maggiore di uno che ce l'hanno come antenato e su cui inducono orientazione opposta. L'altro caso è che $a(u) = \eta \subset \sigma$, con $\eta \in K^{[n-1]}$. In questo caso nella 1, per la seconda proprietà della Proposizione 3.8, vi compare esattamente una volta, come nella 2, e con lo stesso coefficiente.

2. Siano $\sigma \in K^{[n]}$, $\beta, \beta' \in L^{[n]}$, con $a(\beta) = a(\beta')$. So che $\partial^L_n(z) = 0$, quindi in particolare in $\partial^L_n(z)$ hanno coefficiente 0 tutti i $\tau \in L^{[n-1]}$ con $a(\tau) = \sigma$. Usando la terza e quarta proprietà della Proposizione 3.8 abbiamo che β e β' hallo lo stesso coefficiente in z, perciò $z = \psi_n(w)$, con $w \in C_n(K)$. Vorremmo dire che è immagine di una catena. Ora
$$0 = \partial^L_n(z) = \partial^L_n\psi_n(w) = \psi_{n-1}(\partial^K_n w)$$
e per iniettività di ψ_{n-1} $\partial^K_n w = 0$, per cui $w \in Z_n(K)$.

3. Se $\psi_n(z) = \partial^L_{n+1}(u)$, come prima: in $\partial^L_{n+1}(u)$ hanno coefficiente nullo tutti gli $\eta \in L^{[n]}$, con $a(\eta) \in K^{[n+1]}$. Usando sempre la terza e la quarta proprietà vediamo che in u tutti i simplessi $\theta \in L^{n+1}$ che hanno come $a(\theta)$ un certo $\sigma \in K^{[n+1]}$ hanno lo stesso coefficiente (come prima). Perciò $u = \psi_{n+1}(w)$ con $w \in C_{n+1}(K)$. Ora
$$\psi_n(z) = \partial^L_{n+1}(u) = \partial^L_{n+1}(\psi_{n+1}(w)) = \psi_n(\partial^K_{n+1}(w))$$
ma ψ_n è inettiva e quindi $z = \partial^K_{n+1}(w)$.

□

4 03/10

La lezione del mercoledì verrà probabilmente spostata al Martedì dalle 18 alle 20 in sala seminari. petronio ci confermerà via mail.

4.1 Politopi convessi

Vogliamo ancora dimostrare il 3.4. Ricordiamo alcuni risultati sugli insiemi convessi.

Lemma 4.1. Se $X \subset \mathbb{R}^N$ è convesso, esiste un unico sottospazio affine di dimensione massimale in cui X ha punti interni.

Definizione 4.2. Questo sottospazio è denotato con $\mathcal{S}(X)$.

Inoltre $X \subseteq \mathcal{S}(X)$.

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$ è banale. Altrimenti esiste F di dimensione massima in cui X ha punti interni. Mostriamo che $X \subseteq F$. Se $x \in X \setminus F$ per convessità trovo dei punti interni nel sottospazio affine generato da F ed x, contro la massimalità. Mostriamo ora l'unicità. Se $F_1 \neq F_2$ sono come sopra, allora X è contenuto in un sottospazio di dimensione più bassa e quindi non ha punti interni in F_1, F_2. $\square$

Corollario 4.3. Se X è convesso, è ben definita $\dim(X) = \dim(\mathcal{S}(X))$.

Definizione 4.4. Se X è convesso, chiamo H semispazio in $\mathbb{R}^N$ di *supporto* se $X \subset H$.

Lemma 4.5. Se $X \subset \mathbb{R}^N$ è convesso e chiuso, e inoltre $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$ (cioè $F(X) = \mathbb{R}^N$), allora

$$\partial X = \bigcup \{X \cap \partial H \mid H \text{ semispazio di supporto}\}$$

Dimostrazione. "$\supset$" è ovvia. Viceversa, sia $x \in \partial X$. Prendo y_n successione di punti in $\mathbb{R}^N \setminus X$ tale che $y_n \to x$. Sia $x_n \in X$ il punto di X di minima distanza da y_n. Consideriamo[6] $\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} \to v \in S^{N-1}$. Ora è facile vedere che

$$H = x + \left\{z \in \mathbb{R}^N \mid \langle z, v\rangle \leq 0\right\}$$

è un semispazio di supporto per X. $\square$

Definizione 4.6. Chiamo *politopo convesso in* $\mathbb{R}^N$ l'inviluppo convesso di un numero finito di punti.

Ricordiamo che (Lemma 1.14)

$$\mathrm{Conv}(p_1, \ldots, p_k) = \left\{\sum_{i=1}^k t_i p_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^k t_i = 1, t_i \geq 0\right\}$$

Proposizione 4.7. Dati $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^N$, esiste un unico sottoinsieme minimale $\{v_1, \ldots, v_h\} \subset \{p_1, \ldots, p_k\}$ tale che $\mathrm{Conv}(p_1, \ldots, p_k) = \mathrm{Conv}(v_1, \ldots, v_h)$.

[6] Questo serve perché l'iperpiano potrebbe non essere unico.

Definizione 4.8. L'insieme della proposizione precedente è l'insieme dei *vertici.*

Dimostrazione. Basta notare che $p_1 \in \text{Conv}(p_2, \dots, p_k) \Leftrightarrow \text{Conv}(p_2, \dots, p_k)$ (semplice verifica). Partendo da $C = \{p_1, \dots, p_k\}$ scarto un punto tolto il quale l'inviluppo convesso non cambia, e reitero finché posso, ottenendo $\{v_1, \dots, v_h\}$, che è un sottoinsieme minimale con $\text{Conv}(p_1, \dots, p_k) = \text{Conv}(v_1, \dots, v_h) = C$. Inoltre $\forall j\ v_j \notin \text{Conv}(v_1, \dots, \hat{v}_1, \dots, v_h)$. Per l'unicità basta mostrare che gli elementi di $\{v_1, \dots, v_h\}$ sono caratterizzati dalla proprietà di non essere punto interno di un segmento con estremi distinti in C. Questo perché

- v_1 non è punto interno di un segmento con estremi distinti in C. Segue dal fatto che se $v_1 = sq_0 + (1-s)q_1$ con $0 < s < 1$ e $q_0 \neq q_1 \in C$. Posso scrivere

$$v_1 = s \cdot \sum_{i=1}^{h} t_i v_i + (1-s) \cdot \sum_{i=1}^{h} r_i v_i$$

  Inoltre dato che $q_0 \neq q_1$, almeno uno dei due è diverso da v_1. Perciò $t_1 < 1$ oppure $r_1 < 1$, da cui $s \cdot t_1 + (1-s)r_1 < 1$. Ora

$$v_1 = \sum_{i=2}^{h} \frac{st_i + (1 - sr_i)}{1 - (st_i + (1-s)r_i)} \cdot v_i$$

  è una combinazione convessa, perché

$$\sum_{i=2}^{h} (st_i + (1-s)r_i) = s(1-t_1) + (1-s)(1-r_1)$$

$$= s - st_1 + 1 - s - (1-s)r = 1 - (st_1 + (1-s)r_1)$$

- Se $x \in C$ non è uno dei v_j, allora è punto interno di un segmento con estremi distinti in C. Questo perché $x = \sum_{i=1}^{h} t_i v_i$. Dato che non è uno dei v_j ho almeno due coefficienti non nulli, e senza perdita di generalitàà $0 < t_1 < 1$, da cui

$$x = t_1 \underbrace{v_1}_{\in C} + (1-t_1) \cdot \underbrace{\sum_{i=2}^{h} \frac{t_i}{1-t_1} \cdot v_i}_{\in C}$$

□

Definizione 4.9. Una *faccia* di un politopo convesso X è un insieme della forma $X \cap \partial H$, con H semispazio di supporto per X.

Osserviamo subito che

Proposizione 4.10. Ogni faccia è un politopo convesso.

Dimostrazione. Basta provare che se $Y = X \cap \partial H$, allora vale

$$Y = \mathrm{Conv}(\{\text{vertici di } X \text{ contenuti in } \partial H\})$$

. Per farlo sceglo delle coordinate $x_1, \ldots, x_N$ tali che $H = \{x_1 \geq 0\}$. Allora

$$\sum_{i=1}^{h} t_i v_i \in \partial H \Leftrightarrow x_1 \left(\sum_{i=1}^{h} t_i v_i \right) = 0 \Leftrightarrow \forall j \ (x_1(v_j) > 0) \to (t_j = 0)$$

e questo accade se e solo se x è combinazione convessa dei vertidi di X su ∂H. □

Proposizione 4.11. Se X è un politopo convesso, ∂X è l'unione delle facce di codimensione 1

Dimostrazione. Sia $x \in \partial X$. Allora, dato che X è compatto in quanto immagine della mappa continua $\sum t \in \mathbb{R}^h \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \to \mathbb{R}^N$ che mappa $\sum t_i \mapsto \sum t_i v_i$ è chiuso, e per quanto visto esiste H semispazio di supporto tale che $x \in \partial H$. Consideriamo $X \cap \partial H$, che è una faccia. Se ha codimensione almeno 2, allora $\exists E \subseteq \partial H$ sottospazio affine di codimensione 1 in ∂H (e quindi 2 in $\mathbb{R}^N$) tale che $X \cap \partial H \subset E$. Proietto su $E^{\perp}$, che ha dimensione 2 e ruoto ∂H intorno ad E finché non trovo uno dei vertici che non stanno su E. Ho trovato H' tale che $\partial H' \ni x$ e $\dim(\partial H' \cap X) > \dim(\partial H \cap X)$. A meno di reiterare arrivo alla codimensione 1. □

4.2 Orientazione dei politopi convessi

Per politopi in generale non ha senso parlare di orientazione come ordinamento dei vertici. Tuttaiva si può dare la seguente

Definizione 4.12. Un'*orientazione* di un politopo X è un'orientazione per $\mathcal{S}(X)$.

Definizione 4.13. L'*orientazione indotta* da X su una faccia Y di codimensione 1 è data con la regola della normale esterna per prima: prendo v esterno a X lungo Y su $\mathcal{S}(X)$ e dico che $x_2, \ldots, x_n$ base di $\mathcal{S}(Y)$ p positiva se $v, x_2, \ldots, x_n$ è positiva per $\mathcal{S}(X)$.

Come per il simplessi, vale

Proposizione 4.14. Se Z è una faccia di codimensione 2 di X, esistono esattamente due facce Y_1, Y_2 di X di codimensione 1 che contengono Z. Inoltre le orientazioni $X \rightsquigarrow Y_1 \rightsquigarrow Z$ e $X \rightsquigarrow Y_2 \rightsquigarrow Z$ sono opposte fra loro.

Dimostrazione. Se $\mathcal{S}(Z)$ ha codimensione 2, in $\mathcal{S}(Z)^\perp$ ho (disegno, tanto è veramente in dimensione 2) esattamente due iperpiani (rette) di supporto per Z e si vede che le orientazioni indotte sono opposte esattamente come fatto per i simplessi (Proposizione 2.5). $\square$

Sempre analogamente al caso dei simplessi diamo la seguente

Definizione 4.15. Un *complesso politopale* K è un insieme finito di politopi convessi in $\mathbb{R}^N$ tale che

1. Se $X \in K$ e Y è faccia di X, allora $Y \in K$;
2. Se $X_1, X_2 \in K$, allora $X_1 \cap X_2$ è una faccia di entrambi.

Corollario 4.16. Se $C_n(K)$ è il gruppo libero generato da $K^{[n]}$[7], dove ogni faccia ha una fissata, arbitraria orientazione, allora posso definire

$$\partial_n(X) = \sum_{\substack{Y \in K^{[n-1]} \\ Y \subset X}} \varepsilon(X, Y) \cdot Y$$

ottenendo un complesso di catene e posso definire l'omologia.

Dimostrazione. La proposizione precedente dice che la composizione di due mappe di bordo consecutive è nulla. $\square$

Anche per i complessi politopali ho la nozione di suddivisione, che gode delle proprietà elencate nella Proposizione 3.8 (che per inciso forse va rivista nella parte riguardante la surgettività), e quindi l'analogo del Teorema 3.3.

Ora ci interessa dimostrare l'analogo del Teorema 3.4.

Teorema 4.17. Se K, L sono complessi politopali con $|K| = |L|$, allora hanno una suddivisione comune.

Ottenendo

Corollario 4.18. $H_n(K)$ dipende (a meno di isomorfismo) solo da $|K|$ anche per K politopale.

Ci servirà la seguente

Proposizione 4.19 (Chiave)**.** Se X e Y sono politopi convessi, allora lo è anche $X \cap Y$.

Esercizio 4.20. Dimostrare[8] che i vertici di $X \cap Y$ sono esattamente

$$\{X_1 \cap Y_1 \mid X_1 \subset X \text{ faccia}, Y_1 \subset Y \text{ faccia}, X_1 \cap Y_1 \text{ punto}\}$$

[7] Ovviamente la notazione è la stessa usata per i simplessi.

[8] "Sono piuttosto sicuro che sia vero questo fatto, però..." Quindi se non torna pensarci due volte.

Il Teorema 4.17 segue subito dalla Proposizione chiave: se $|K| = |L|$ allora $I = \{X \cap Y \mid X \in K, Y \in L\}$ è un complesso politopale che suddivide K ed L. La Proposizione chiave a sua volta segue dalla

Proposizione 4.21. $X \subseteq \mathbb{R}^N$ è un politopo convesso se e solo se è limitato ed è intersezione di una famiglia *finita* di semispazi.

Dimostrazione.

- ($\Rightarrow$) Notiamo che basta dimostrarlo nel caso in cui $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^N}(X) \neq \emptyset$ (cioè $\mathcal{S}(X) = \mathbb{R}^N$). Infatti sapendo ciò posso considerare $X = \cap_{i=1}^{p} H_i$ con $H_i \subset \mathcal{S}(X)$ semispazio. Ora scelgo $\tilde{H}_i \subset \mathbb{R}^N$ semispazio con $\tilde{H}_i \cap \mathcal{S}(X) = H_i$ e semispazi $K_1, \ldots, K_q$ di $\mathbb{R}^N$ con $S(X) = \bigcap_{i=1}^{q} K_i$, da cui

$$X = \bigcap_{i=1}^{p} \tilde{H}_i \cap \bigcap_{j=1}^{q} \tilde{K}_j$$

  Sia quindi $\mathcal{S}(X) = \mathbb{R}^N$. Siano $Y_1, \ldots, Y_p$ le facce di codimensione 1 di X. $Y_j = X \cap \partial H_j$, con H_j di supporto. Claim: $X = \bigcap_{j=1}^{p} H_j$. $X \subset \bigcap H_j$ è ovvio perché sono iperpiani di supporto. La limitatezza è banale perché parliamo dell'inviluppo convesso di un insieme *finito* di punti. Viceversa sia $y \notin X$. Scegliamo $x \in \mathrm{int}(X)$. Il segmento[9] $[x, y]$ contiene un solo punto z di ∂X perché l'intersezione di convessi è convessa, uno dei due è un segmento e non giacciono entrambi sul convesso. Facendo variare x nel suo intorno si evita l'intersezione con qualsiasi sottospazio di codimensione 2, e quindi con un numero finito di spazi di codimensione 2. Come conseguenza evito l'intersezione con le facce di codimensione 2, per cui posso supporre WLOG che $z \in \mathrm{int}(Y_j)$. Da questo segue (disegno) che $y \notin H_j$ e questo conclude.

- ($\Leftarrow$) Nella prossima puntata.

□

5 08/10

5.1 Fine dimostrazioni lasciate in sospeso

Il punto "surgettività" del Teorema 3.3 è sbagliato. Correggere con

$$\forall z \in Z_n(L)\ \exists u \in B_n(L), \exists w \in Z_n(K)\ \psi_n(w) = z + u$$

Hint per la Dimostrazione (per esercizio). Per provarlo basta trovare $u \in B_n(L)$ tale che per ogni τ con coefficiente non nullo in $z+u$ si ha $a(\tau) \in K^{[n]}$: cioè usando $B_n(L)$ devo "svuotare" da z la parte interna di ogni $\sigma \in K^{[m]}$, con $m > n$. Fatto questo, si prosegue come già detto. □

[9] Notazione introdotta ora, ma è quello che ci si aspetta.

Finiamo ora la dimostrazione lasciata in sospeso l'ultima volta.

Dimostrazione. Posso supporre $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(x) \neq \emptyset$, cioè $\mathcal{S}(X) = \mathbb{R}^n$. Infatti su $\mathcal{S}(X)$, X rimane limitato e interesezione di un numero finito di semispazi (basta scartare gli H con $\partial H \supset \mathcal{S}(X)$ e considerare $H \cap \mathcal{S}(X)$ per gli altri). Ora procediamo per induzione su $\dim(X) = n$. Per $n = 1$ abbiamo l'intersezione limitata di un numero finito di semirette in $\mathbb{R}$, che è chiaramente un segmento, e quindi un politopo convesso. Per il passo induttivo, sia $X = \bigcap_{i=1}^{p} H_j$, con gli H_j sottospazi e $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^n} \neq \emptyset$. Claim: $\partial X = X \cap \bigcap_{j=1}^{p} \partial H_j$. L'inclusione "$\supset$" è ovvia. Viceversa, se $x \in X \setminus \partial H_j$, allora $x \in \mathrm{int}(H_j)$, e quindi $x \in \mathrm{int}\Big(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{p} H_j}_{=X}\Big)$. Provato il primo claim, ne facciamo un secondo: se $X \cap \partial H_j = \mathrm{Conv}(V_0)$ dico che $X = Conv(V_1, \dots, V_p)$. L'inclusione "$\supset$" è ovvia perché X è convesso e contiene i V_i. Se invece $x \in X$. O $x \in \partial X$, e quindi $x \in X \cap \partial H_j$ per quanto detto poco fa, da cui è immediato $x \in \mathrm{Conv}(V_j)$, oppure $x \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. In tal caso prendo ℓ retta per x e considero $\ell \cap X$. Questo è un chiuso limitato e convesso di ℓ, e quindi è un intervallo $[p_0, p_1]$, con $p_0, p_1 \in \partial X$. Dato che $p_0, p_1 \in \mathrm{Conv}(V_1 \cup, \dots \cup V_p)$ per quanto visto prima, ho che $x \in \mathrm{Conv}(V_1 \cup, \dots \cup V_p)$. $\square$

5.2 Suddivisioni simpliciali

Osserviamo ora che

Proposizione 5.1. Ogni complesso politopale ha una suddivisione che è un complesso simpliciale.

Dimostrazione. Basta procedere ricorsivamente sulla dimensione. Il caso 0 è banale, e per il passo induttivo basta prendere un punto interno di ogni $\sigma \in K^{[m+1]}$ e fare i coni sulla suddivisione già trovata di $K^[m]$. $\square$

Corollario 5.2. Ogni complesso simpliciale K ha, per ogni $\varepsilon > 0$, una suddivisione L con $\max\{\mathrm{diam}(\tau) \mid \tau \in L\} < \varepsilon$.

Dimostrazione. Basta prendere K e intersecarlo con la suddivisione di $\mathbb{R}^n$ in cubi sufficientemente piccoli, da qui ottenere un complesso politpale e da questo una suddivisione simpliciale. $\square$

Il corollario precedente segue anche dall'iterazione della suddivisione baricentrica.

Definizione 5.3. Dato K complesso simpliciale, definisco la sua *suddivisione baricentrica* K' su $K^{(m)}$ ricorsivamente su m. Per $m = 0$ non faccio niente, per $m = 1$ aggiungo i punti medi dei lati, e da m a $m + 1$ aggiungo il baricentro $\sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{m+2} v_i$ e faccio i coni sulla suddivisione precedentemente ottenuta sul bordo.

Esercizio 5.4 (Difficile)**.** Provare che $\lim_{q\to\infty} \max\left\{\mathrm{diam}(\tau) \mid \tau \in K^{q\cdot'}\right\} = 0$ ($K^{q\cdot'}$ è la q-esima suddivisione baricentrica).

Non-dimostrazione. $\mathrm{diam}(\tau)$ è la massima distaza fra i suoi vertici, e siccome ad ogni nuova suddivione dimezzo ogni lato, il diametro si dimezza. Questo non funziona perché sto aggiungendo nuovi vertici. Basta considerare un triangolo equilatero per rendersene conto. □

5.3 Primi due gruppi di omologia

Osserviamo da subito che[10] $H_n(K \sqcup H) = H_n(K) \oplus H_n(H)$. Inoltre

Proposizione 5.5. Se $|K|$ è connesso, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Definisco $\psi\colon C_0(K) = Z_0(K) \to \mathbb{Z}$ come

$$\psi\left(\sum_{v\in K^{[0]}} n_v \cdot v\right) = \sum_{v\in K^{[0]}} n_v \cdot \varepsilon(v) = \pm 1$$

e supporremo WLOG $\forall v \varepsilon(v) = 1$. Per mostrare che ψ è surgettiva basta notare che $n \cdot \bar{v} \mapsto n$. Inoltre voglio mostrare che$\mathrm{Ker}(\psi) = B_0(C)$, cioè che $\mathrm{Ker}(\psi)$ è il sottogruppo di $C_0(K)$ generato da

$$\left\{\underbrace{v_1(e) - v_0(e)}_{=\delta(e)} \mid e \in K^{[1]}\right\}$$

Ovviamente $\psi(v_1(e) - v_0(e)) = 1 - 1 = 0$. Claim: $\mathrm{Ker}(\psi)$ è generato da

$$\left\{v_1 - v_0 \mid v_1, v_0 \in K^{[0]}\right\}$$

Questo si vede facilmente, con $z = \sum n_v \cdot v$, procedendo per induzione su $\sum |n_v|$. La conclusione segue dal Lemma seguente, prendendo fra due vertici un cammino simpliciale che li connetta e scrivendo $v_1 - v_0 = \partial(\sum \text{nodi del cammino} \cdot \textit{orientazione})$. □

Lemma 5.6. Se $|K|$ è connesso, allora ogni $v_0, v_1 \in K^{[0]}$ sono estremi di un cammino simpliciale semplice[11].

Dimostrazione. Dato che il supporto di un complesso simpliciale è localmente connesso per archi, so che esiste $\alpha\colon [0,1] \to |K|$ cammino continuo da v_0 a v_1. A meno di omotopia posso supporre che α sia C^1 a tratti. Da questo segue che in ogni simplesso di dimensione almeno 2 ci sono punti interni fuori da $\mathrm{Im}(\alpha)$. Ricorsivamente modifico α in modo che

[10] $\sqcup$ indica l'unione disgiunta

[11] Cioè inettivo.

$\mathrm{Im}(\alpha) \subset K^{(m+1)} \rightsquigarrow \mathrm{Im}(\alpha) \subset K^{(m)}$ perché $n \geq 1$. Alla fine ho $\Im(\alpha) \subset K^{(1)}$. A questo punto ho uno "scheletro" di dimensione 1 e qui è facile vedere che un arco continuo lo posso scegliere semplice e simpliciale. □

Esercizio 5.7. Se K è un complesso simpliciale, $|K|$ è localmente connesso per archi.

Definizione 5.8. Una grafo è $|K|$ con $\dim(K) = 1$.

Teorema 5.9. Se $|K|$ è connesso, allora $H_1(K)$ è l'*abelianizzato* di $\pi_1(|K|)$, ovvero

$$\pi(|K|) \big/ [\pi(|K|), \pi(|K|)]$$

dove il sottogruppo per cui si quoziente è generato da tutti gli $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, che ricordiamo essere sempre normale.

Prima di procedere alla dimostrazione ricordiamo che:

- Se X ed Y sono omotopicamente equivalenti, allora $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.
- Se $A \subset X$ è un retratto per deformazione, allora $\pi_1(X) \cong \pi_1(A)$.
- Vale il Teorema di Van Kampen.
- Le sfere sono semplicemente connesse, tranne S^1 che ha gruppo fondamentale isomorfmo a $\mathbb{Z}$.

Ora dimostriamo il Teorema.

Dimostrazione. Scelgo $\bar{v} \in K^{[0]}$ e affermo che[12]

$$gf(|K|) = \frac{\pi_1(\left|K^{(1)}\right|)}{\left\langle \left\{ w_T \mid T \in K^{[2]} \right\} \right\rangle}$$

dove i w_T sono i cammini che vanno dal vertice al triangolo, fanno un giro e tornano al vertice. Possiamo cioè dire che $\pi_1(\left|K^{(1)}\right|)$ è generato da lacci simpliciali basati su τ. □

6 10/10

6.1 Ancora sui primi due gruppi di omologia

Lemma 6.1. Se $|K|$ è connesso, allora $|K|$, $\left|K^{(1)}\right|$ sono connessi per archi e ogni coppia di vertici è unita da un cammino simpliciale semplice.

[12] $\langle \cdot \rangle$ indica il sottogruppo normale generato.

Dimostrazione. Fissato $\bar{v} \in K^{[0]}$ sia

$$\mathcal{S} = \left\{ \underbrace{e_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot e_N^{\varepsilon_N}}_{\text{cammino simpliciale da } \bar{v}} \cdot \beta \right\}$$

dove β è o costante o un segmento dritto da $v \in \sigma^{[0]}$ ad $x \in \mathrm{int}(\sigma)$. Sia $X = \{\alpha(1) \mid \alpha \in \mathcal{S}\}$. Claim: X è clopen in $|K|$ (e quindi è tutto per connessione). Verificarlo per esercizio.

Ne segue che $|K|$ è connesso per arcihi, $\left|K^{(1)}\right|$ è connesso per archi simpliciali, e un cammino simplicale minimale che unisce due vertici v_0, v_1 è semplice (facile verifica). $\square$

Lemma 6.2. $\pi_1(\left|K^{(1)}\right|, \bar{v})$ è l'insieme dei lacci simpliciali non semplificabili su $\bar{v}$, (dove non semplificabile vuol dire che non esistono cose del tipo $e^{\pm 1} \cdot e^{\mp 1}$ nel laccio) con la concatenazione a meno di semplificazione.

Dimostrazione. Sia $\alpha \colon [0,1] \to \left|K^{(1)}\right|$ un laccio in $\bar{v}$. Per ogni $e \in \left|K^{(1)}\right|$ sia $U(e)$ definito come l'unione fra e e l'unione dei semilati aperti con un estremo in comune con e. Ne segue che

$$\left\{ U(e) \mid e \in \left|K^{(1)}\right| \right\}$$

è un ricomprimento aperto di $\left|K^{(1)}\right|$, per cui $\left\{\alpha^{-1}(U(e)) \mid e \ldots\right\}$ è un ricoprimento aperto di $[0,1]$ ed ha quindi un numero di Lebesgue. Da questo otteniamo che

$$\exists 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1 \; \forall j \; \alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset U(e_j)$$

e possiamo supporre WLOG $\forall j \; e_{j+1} \neq e_j$.

$$\alpha(t_j) \in \underbrace{U(e_{j-1}) \cap U(e_j)}_{=\mathcal{U}} \Rightarrow \exists v_j \in e_{j-1} \cap e_j$$

si vede facilmente che $\mathcal{U}$ è l'unione dei semilati che finiscono in v_j, e dunque è contrattile (perché stellato). Scelgo e_j tale che $\alpha([t_j - \varepsilon, t_j + \varepsilon]) \subseteq \mathcal{U}$ e, a meno di omotopia (siamo su un contrattile) posso supporre che $\alpha(t_i) \in v_j$. Cantinua a valere $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U(e_j)$ e a meno di omotopia $\alpha_{|[t_{j-1}, t_j]} = e^{\pm 1}$. Quindi ogni cammino è omotopo ad uno simpliciale. Che le semplificazioni si possano fare con omotopie è ovvio, e resta da vedere l'ultima parte. Sia $I = [0,1]$ e sia $F \colon I^2 \to \left|K^{(1)}\right|$, dove identifichiamo il lato inferiore del quadrato con un cammino α_0 e quello superiore con un cammino α_1. Posso suddividere il quadrato in quadratini in maniera che su ogni lato di un quadratino F è costante o un lato e tale che F di ogni singolo quadratino sia incluso in $U(e)$. Mostrare che posso passare dal cammino sotto a quello sopra tramite omotopia è routine e disegni (ma senza i disegni probabilmente è poco chiaro). $\square$

Teorema 6.3. $\pi_1(|K|) \cong \frac{\pi_1(\left|K^{(1)}\right|,\bar{v})}{\langle w_T | T\in K^{[2]}\rangle}$. Inoltre

$$H_1(K) = \frac{\left\{\sum_{e\in\left|K^{[1]}\right|} n_e \cdot e \mid \partial_1(\ldots) = 0\right\}}{\partial\tau \mid \tau \in \left|K^{[2]}\right|}$$

Teorema 6.4. $H_1(K) = \frac{\pi_1(|K|)}{[\pi_1(|K|),\pi_1(|K|)]}$

Dimostrazione. Definisco $\psi\colon \pi_1(|K|) \to H_1(K)$ come $\psi(e_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}^{\varepsilon_k}) = [\varepsilon_1 \cdot e_{i_1} + \ldots + e_k \cdot e_{i_k}]$. Per la buona definizione noto che $\partial_1(\varepsilon_1 e_{i_1} + \ldots + \varepsilon_k e_{i_k}) = 0$ e $\psi(w_T) = \partial_T$. ψ inoltre è surgettiva perché se

$$z = \sum_{e\in\left|K^{[1]}\right|} n_e \cdot e \in Z_1(K)$$

provo che $z \in \mathrm{Im}(\psi)$ per induzione su $\sum |n_e|$. Se questo è 0 è vero. Altrimenti, se ad esempio $n_{e_1} > 0$ e $\partial z = 0$ ci sarà un e_2 tale che $n_{e_2} < 0$. Di nuovo, $\partial z = 0 \Rightarrow \exists e_3$ tale che $n_{e_3} < 0$ (senza disegno probabilmente si capisce poco). Procedo fino a rivisitare uno stesso vertice. A questo punto scarto la parte che non rientra nel ciclo appena chiuso e coniugo con un cammino per connettere il ciclo a $\bar{v}$. Facendo il conto vedo che la nuova $\sum |n_e|$ è calata di k, dove k è la lunghezza del ciclo, e per induzione $\sum n_e \cdot e \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Per conludere mostriamo che $\mathrm{Ker}(\psi) = [\pi_1(|K|), \pi_1(|K|)]$. Sia $e_1^{\varepsilon_1} \ldots e_k^{\varepsilon_k} \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Questo vuol dire che $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_k e_k = \partial T_i + \ldots + \partial T_k$ perché LHS è nullo in omologia ed è quindi un bordo. Posso trovare γ_j cammino simpliciale tale che $\psi(\gamma_j) = \partial T_j$. Dunque, sostituendo $e_1^{\varepsilon_1} \ldots e_k^{\varepsilon_k}$ con $e_1^{\varepsilon_1} \ldots e_k^{\varepsilon_k} \gamma_1^{-1} \ldots \gamma_h^{-1}$ posso supporre che $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_k e_k = 0$. In queste ipotesi dobbiamo provare che $e_1^{\varepsilon_1} \ldots e_k^{\varepsilon_k}$ è prodotto di commutatori. Ciò vale nel gruppo libero generato da $K^{[1]}$. In altre parole devo mostrare che una parola abelianizzata da 0 è prodotto di commutatori. Procediamo per induzione sul numero dei generatori. Con 0 o 1 generatore è banale (il gruppo è abeliano). Per il passo induttivo procedo per induzione sul numero di volte in cui compare $e_1^{\pm 1}$. Se è 0 è evidente per il passo induttivo (dell'induzione più "esterna"). Altrimenti, se e_1 compare, so che la somma degli esponenti nella parola è 0 (abelianizzata è 0), quindi ho una cosa della forma $w \cdot e_1^{\pm 1} \cdot v \cdot e_1^{\mp 1} \cdot x$ (dove in v non compare e_1). Ora noto che

$$w \cdot \underbrace{e_1^{\pm 1} \cdot v \cdot e_1^{\mp 1} \cdot v^{-1}}_{\in[.,.]} \underbrace{\cdot v \cdot x \cdot w}_{\in[.,.]\text{per induzione}} \cdot w^{-1}$$

Quindi la stringa precedente è coniugata ad un prodotto di commutatori ed è quindi un commutatore. $\square$

6.2 Presentazioni dei primi gruppi di omotopia e omologia

La relazione precedente fra il $\pi_1(|K|)$ e $H_1(|K|)$ segue anche da un altro discorso.

Definizione 6.5. Un grafo G è $|K|$ con $\dim(K) = 1$. $\Gamma \subset K$ è un *albero* se $\forall v_0, v_1 \in \Gamma^{[0]}$ esiste un unico cammino simpliciale semplice che li unisce.

Lemma 6.6. Se G è connesso e $\Gamma \subset G$ è un albero massimale, allora $\Gamma \supset G^{[0]}$, cioè Γ contiene tutti i vertici.

Dimostrazione. Altrimenti trovo un albero H che estende Γ considerando la sua unione con tutti i lati di G con entrambi gli estremi in Γ. $|H|$ è chiuso perché è un sottocomplesso ed è aperto perché se $x \in |H| \setminus H^{[0]}$ è chiaramente interno al supporto, altrimenti se x è un vertice e non è interno vuol dire che è l'estremo di un lato non in H. Per definizione di H questo vertice non è in Γ e quindi posso estenderlo. Dunque $|H| = G$, ma $H^{[0]} = \Gamma^{[0]}$ e quindi $\Gamma^{[0]} = G^{[0]}$. $\square$

Siano K un complesso simpliciale, $\Gamma \subset K^{[1]}$ un albero massimale e $G = K^{[1]} \setminus \Gamma^{[1]}$. Considero $\mathbb{Z}^{*G}$, $\mathbb{Z}^{G}$ e $\mathrm{Ab}\colon \mathbb{Z}^{*G} \to \mathbb{Z}^{G}$. Per $T \in K^{[2]}$ considero $w_T \in \mathbb{Z}^{*G}$ definito come la parola ∂T con i lati in Γ cancellati, che è ben definita a meno di coniugio o inverso.

Teorema 6.7. $\pi_1(|K|) \cong \frac{\mathbb{Z}^{*G}}{\langle w_T | T \in K^{[2]} \rangle}$. $H_1(|K|) \cong \frac{\mathbb{Z}^{G}}{\langle \mathrm{Ab}(w_T) | T \in K^{[2]} \rangle}$

Dimostrazione. Γ ha vertici liberi (cioè di valenza 1 in Γ) per pidgeonhole. Usando questo provo che Γ è contrattile per induzione sul numero di vertici di Γ. Fissato un vertice $\bar{v}$, per ogni $v \in K^{[0]}$ sia $c_\Gamma(v)$ l'unico cammino semplice da $\bar{v}$ a v in Γ. Per $e \in G$ (orientato) siano $v_0(e)$ e $v_1(e)$ i suoi estremi e sia $\alpha(e) = c_\Gamma(v_0(e)) \cdot e \cdot c_\Gamma(v_1(e))^{-1}$. Claim: la funzione $\mathbb{Z}^{*G} \to \pi_1(\left|K^{(1)}\right|, \bar{v})$ che mappa $e \mapsto [\alpha(e)]$ è un isomorfismo. Per induzione sulla cardinalità di G. Se è 0 è banale. Altrimenti sia $e \in G$ e poniamo $U = \left|K^{[1]}\right| \setminus \{m\}$ dove m è il punto medio di e, e V uguale all'unione di $\alpha(e)$ con tutti i semilati che lo toccano. È facile vedere che U si retrae si $\left|K^{(1)}\right| \setminus \{e\}$, mentre V si retrae su $\alpha(e)$ e $U \cap V$ si retrae su $\bar{v}$. Per il Teorema di Van Kampen si ha

$$\pi_1\left(\left|K^{(1)}\right|\right) = \underbrace{\pi_1\left(\left|K^{(1)} \setminus \{e\}\right|\right)}_{\mathbb{Z}^{*(G \setminus \{e\})}} * \mathbb{Z}_{\alpha(e)}$$

Claim: $\pi_1(\left|K^{(2)}\right|) = \frac{\mathbb{Z}^{*G}}{\langle w_T | T \in K^{[w]} \rangle}$. Si mostra per induzione sulla cardinalità di $K^{[2]}$. Se è 0 è ovvio. Altrimenti sia $T \in K^{[2]}$ e sia $U = \left|K^{(2)}\right| \setminus b$ con b il baricentro di T. Scegliamo V intorno aperto regolare di $c_\Gamma(v) \cup T$, con $v \in T^{[0]}$. U si retrae su $\left|K^{(2)} \setminus T\right|$, V è contrattile e $U \cap V$ si retrae su $c_\Gamma(v) \cup \partial T$ che è omotopo ad S^1. Ne segue che $\pi_1(\left|K^{[2]}\right|) = {}^{\pi_1(\left|K^{[2]} \setminus T\right|)}\!/_{\mathbb{Z}}$. Per concludere devo vedere che tramite l'isomorfismo datomi dal passo induttivo $\frac{\mathbb{Z}^{*G}}{\langle w_S | S \in K^{[w]} \setminus T \rangle} \to \pi_1(\left|K^{[2]} \setminus T\right|)$ il generatore di $\pi_1(c_T(v) \cup \partial T)$ è w_T. Bisogna distinguere diversi casi a seconda di quanti lati di T sono in Γ (0, 1 e 2, non 3 perché Γ è un albero) e a seconda delle orientazioni (servono disegni). $\square$

Corollario 6.8. $H_1 \cong {}^{\pi_1}\!/_{[\pi_1, \pi_1]}$.

7 15/10

Proposizione 7.1. Se $\Gamma \subset K^{(1)}$ è un albero massimale e $G = K[1] \setminus \Gamma^{[1]}$ avevamo visto che $H_1(K) = \frac{\mathbb{Z}^G}{\langle \partial^G T | T \in K^{[2]} \rangle}$, dove $\mathbb{Z}^G$ è l'abelianizzato di $\mathbb{Z}^{*G}$ e $\partial^{*G} T$ è "orienta T e cancella dal porto i lati in Γ", allora $\partial^G T$ è l'abelianizzato di w_T.

Da questo segue di nuovo la relazione fra π_1 e H_1.

Dimostrazione. $\alpha(e) = c_\Gamma(v_0(e)) \cdot e \cdot c_\Gamma(v_1(e))$, $e \in G$. Provo che $Z_1(K) = \langle \mathrm{Ab}(\alpha(e)) \mid e \in G \rangle \cong \mathbb{Z}^G$. Abbiamo visto che ogni ciclo è abelianizzato di un prodotto di lacci, quindi di lacci in $\bar{v}$ e quindi di lacci $\alpha(e)$ (ovvio: $\forall e\ \partial_1(\alpha(e)) = 0$. Questa è una bigezione perché in $\sum_{e \in G} \mathrm{Ab}(\alpha(e)) \cdot n_e$, e ha coefficiente n_e. Per concludere mostriamo che, sotto la corrispondenza $\mathrm{Ab}(\alpha(e)) \leftrightarrow e$, ∂T corrisponde a $\partial^G T$. Si fa come per il π_1. C'è da distinguere alcuni casi (disegni). $\square$

7.1 Proprietà dell'omologia simpliciale

Definizione 7.2. Se K, L sono complessi simpliciali, una mappa $g\colon |K| \to |L|$ è detta *simpliciale* se

- $G(K^{[0]}) \subset L^{[0]}$ (manda veritici in vertici)
- $(v_0, \dots, v_n) \in K \Rightarrow (g(v_0), \dots, g_(v_n)) \in L$
- $g(\sum t_i v_i) = \sum t_i g(v_i)$

Chiaramente g è determinata dalla sua restrizione ai vertici, e data una mappa fra i vertici essa si estende ad una mappa simpliciale.

Data $g\colon K \to L$ simpliciale e $\sigma \in K^{[n]}$, pongo

$$g_{*n}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{se} g(\sigma) \notin L^{[n]} \\ \delta(\sigma) g(\sigma) \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\delta(\sigma) = \pm 1$ a seconda che $g_{|\sigma}\colon \sigma \to g(\sigma)$ rispetta o meno le orientazioni fissate. Estendo per $\mathbb{Z}$-linearità ad una mappa $g_{*n}\colon \mathbb{Z}^{K^{[n]}} = C_n(K) \to C_n(L) = \mathbb{Z}^{L^{[n]}}$

Proposizione 7.3. $g_*\colon C(K) \to C(L)$ è una mappa di complessi di catene.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che

$$\begin{tikzcd} C_n(K) \arrow[r, "\partial_n^K"] \arrow[d, "g_{*n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1}(K) \arrow[d, "g_{*n-1}"] \\ C_n(L) \arrow[r, "\partial_n^L"] & C_{n-1}(L) \end{tikzcd}$$

e basta verificarlo su ogni $\sigma \in K^{[n]}$. Ci sono tre casi:

1. $g(\sigma) \in L^{[n]}$: in questo caso $g_{*n-1}(\partial_n^K(\sigma)) = g_{*n-1}(\sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau)$, e questo è uguale a $\sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \delta(\tau) \cdot g(\tau)$. Ora $\partial_n^L(g_{*n}(\sigma)) = \partial_n^L(\delta(\sigma) \cdot g(\sigma)) = \sum_{\substack{\eta \in L^{[n-1]} \\ \eta \subset g(\sigma)}} \delta(\sigma) \cdot \varepsilon(g(\sigma), \eta) \cdot \eta$, che è uguale a $\sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \delta(\sigma) \cdot \varepsilon(g(\sigma), g(\tau)) cdot g(tau)$ ma $\varepsilon(g(\sigma), g(\tau)) = \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \delta(\sigma) \cdot \delta(\tau)$.

2. $g(\sigma) \in L^{[n-1]}$: qui se $g_{*n}\sigma = 0$ devo vedere che $g_{*n-1}(\partial_n^K(\sigma)) = 0$. Senza perdita di generalità sia $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$. Sia $(w_1, \dots, w_n) = g(\sigma)$ e supponiamo $g(v_0) = g(v_1) = w_1$ e, per $j \geq 2$, $g(v_j) = w_j$. Ho che

   $$\partial_n^K(\sigma) = (v_1, \dots, v_n) - (v_0, v_2, \dots, v_n) + (v_3, v_1, v_3, \dots, v_n) - (v_0, v_1, v_2, v_4, \dots, v_n) + \dots$$

   viene mappato da g_{*n-1} in

   $$(w_1, w_2, \dots, w_n) - (w_1, w_2, \dots, w_n) + 0 + 0, \dots$$

3. $g(\sigma) \in L^{(n-2)}$: allora $\forall tau \subset \sigma, \tau \in K^{[n-1]}$ $g(\tau) \notin L^{[n-1]}$, quindi ho che $g_{*n}(\sigma) = 0 = g_{*n-1}(\partial\sigma)$.

□

Corollario 7.4. g induce $g_{*n} \colon H_n(K) \to H_n(L)$.

7.2 Il Teorema di approssimazione simpliciale

Definizione 7.5. Se K è un complesso simpliciale, la *stella* $\mathrm{St}(v, K)$, con v vertice, è definita come $\{\sigma \in K \mid v \in \sigma^{[0]}\}$. La *stella aperta* $\mathring{\mathrm{St}}(v, K)$ è definita come $\bigcup \{\mathrm{int}(\sigma) \mid \sigma \in K, v \in \sigma^{[0]}\}$.

Proposizione 7.6. Per ogni $\tau \in K$ si ha $\mathring{\mathrm{St}}(v, \sigma) \cap \tau$ è aperta in τ.

Dimostrazione. Omessa. □

Corollario 7.7. $\overset{\circ}{\mathrm{St}}(v, K)$ è aperto in $|K|$.

Dimostrazione. Le τ formano un ricomprimento fondamentale. □

Lemma 7.8. Se $v_1, \dots, v_k \in K^{[0]}$, allora

$$\bigcap_{j=1}^{k} \overset{\circ}{\mathrm{St}}(v_j, K) \neq \emptyset \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_k) \in K$$

Dimostrazione. Se x sta nell'intersezione delle stelle aperte, considero $\sigma \in K$ tale che $x \in \mathrm{int}(\sigma)$, quindi $\overset{\circ}{\mathrm{St}}(v_j, K) \subset \mathrm{int}(sigma)$, per cui v_j è un vertice di σ (e quindi $(v_1 \dots, v_k))$ è una faccia di σ e sta in K. Per il viceversa si mostra che se $x \in \mathrm{int}(v_1, \dots, v_k)$, allora x sta nell'intersezione delle stelle aperte. □

Teorema 7.9 (di approssimazione simpliciale)**.** se K, L, sono complesis simpliciali e $f\colon |K| \to |L|$ è continua, allora esiste H suddivisione di K e $g\colon H \to L$ simpliciale tale che $\forall x \in |K|$ esiste un simplesso di L che contiene sia $f(x)$ che $g(x)$.

Il nome del Teorema è dovuto al seguente

Corollario 7.10. Data $f\colon |K| \to |L|$ continua esiste H suddivisione di K e $g\colon H \to L$ simpliciale omotopa ad f.

Dimostrazione. Presa g come nel Teorema possiamo porre $F(t, x) = t \cdot f(x) + (1 - t)(g(x))$. La combinazione convessa ha senso perché i due punti stanno in uno stesso simplesso per il Teorema. □

Corollario 7.11. Dati $f\colon |K| \to |L|$ continua ed $\varepsilon > 0$, esistono suddivisioni H di K ed M di L, e $g\colon H \to M$ simpliciale tali che g è omotopa ad f e $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$.

Dimostrazione. Suddivido L in M con i diametri controllati da ε e poi uso il Teorema. □

Ora dimostriamo il Teorema.

Dimostrazione. $\left\{ \overset{\circ}{\mathrm{St}}(w, L) \mid w \in L^{[0]} \right\}$ è un ricoprimento aperto di $|L|$. Ne segue che $\left\{ f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(w, L)) \mid w \in L^{[0]} \right\}$ è un ricomprimento aperto di $|K|$ e posso quindi scegliere un suo numero di Lebesgue ε. Prendo H suddivisione di K i cui diametri siano minori di $\varepsilon/2$. Dato $v \in H^{[0]}$ scelgo $g(v) \in L^{[0]}$ tale che la palla $B(v, \varepsilon/2) \subset f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(g(v), L))$ (perché ε è il numero di Lebesgue). Dato che tutti i simplessi di H hanno diametro minore di $\varepsilon/2$ ho che $\forall \sigma \in H$, con $v \in H$ ho $\sigma \subset f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(g(v), L))$, perciò $\overset{\circ}{\mathrm{St}}(v, H) \subset f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(g(v), L))$. Affermo che:

1. g si estende ad una mappa simpliciale $g\colon H \to L$

2. $\forall x \in K\ \exists \tau \in L\ f(x), g(x) \in \tau$

Mostriamolo:

1. Devo mostrare che se ho $(v_1, \ldots, v_k) \in H^{[0]}$, allora $(g(v_1) \ldots, g(v_k) \in L)$. Sia $x \in \operatorname{int}(v_1, \ldots, v_k)$. Ho $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \overset{\circ}{\mathrm{St}}(v_j, H)$, ma per scelta di $g(v)$ questa è contenuta in $\bigcap_{j=1}^{k} \overset{\circ}{\mathrm{St}}(g(v_j), L) = f^{-1}(\bigcap \overset{\circ}{\mathrm{St}}(g(v_j), L))$ e per il Lemma precedente, dato che questa intersezione è non vuota, $(g(v_1), \ldots, g(v_k)) \in L$.

2. Sia $(v_1, \ldots, v_k) \in H$ tale che $x \in \operatorname{int}(v_1, \ldots, v_j)$. Lo stesso discorso del punto precedente prova che $f(x) \in \operatorname{int}(g(v_1), \ldots, g(v_k))$, ma anche $g(x) \in \operatorname{int}(g(v_1), \ldots, g(v_k))$ perché g è una mappa simpliciale, e basta porre $\tau = (g(v_1), \ldots, g(v_k))$.

□

Esiste anche una versione relativa di questo Teorema, che si dimostra all'incirca allo stesso modo:

Teorema 7.12. Sia $H \subset K$, $N \subset L$, $f\colon |K| \to |L|$ continua e tale che $f(|M|) \subset |N|$. Allora esiste H suddivisione di K e $g\colon H \to L$ simpliciale tale che, identificando M col sottosimplesso di H con lo stesso supporto del "vecchio" M, $g(|M|) \subset |N|$, se $x \in |M|$ esiste $\tau \in N$ tale che $f(x), g(x) \in \tau$, e se $x \in |K|$ esiste $\tau \in L$ tale che $f(x), g(x) \in \tau$.

Dimostrazione. Si procede allo stesso modo con ε che sia numero di Lebesgue per

$$\left\{ f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(w, L)) \mid w \in L^{[0]} \right\}$$

e anche per

$$\left\{ f_{|M|}^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}(w, N)) \mid w \in N^{[0]} \right\}$$

Si sceglie $g(v)$ come prima badando che $g(v) \in N^{[0]}$ se $v \in H^{[0]} \cap |M|$. Il seguito è uguale. □

Teorema 7.13. Sia $f\colon |K| \to |L|$ continua e $g\colon H \to L$ simpliciale, con H suddivisione di K e g omotopa ad f. Allora è ben definita $f_*\colon H_*(K) \to H_*(L)$ come

$$\begin{tikzcd}
H_*(H) \arrow[r, "g_*"] & H_*(L) \\
H_*(K) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[ur, "f_*"'] \arrow[u, phantom, shift left=8ex, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Seuge dal fatto che se $g_1 \colon H_1 \to L$ e $g_2 \colon H \to L$ sono omotope tramite funzioni continue, allora a meno degli isomorfismi canonici $g_{1*} = g_{2*}$. $\square$

Lemma 7.14. Sia $G \colon K \to L$ simpliciale e sia M una suddivisione di K. Sia $f \colon M \to L$ simpliciale tale che se $v \in \mathrm{int}(\sigma)$, allora $f(v) \in f(\sigma)^{[0]}$ (in altre parole mando le cose che non erano vertici prima di suddividere le mando in vertici, a scelta). Allora

$$\begin{tikzcd}
C_n(K) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "g_{*n}"'] & C_n(M) \arrow[d, "f_{*n}"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] \\
& C_n(L)
\end{tikzcd}$$

(dove s induce l'isomorfismo in omologia).

Dimostrazione. Via disegno. $\square$

8 17/10

8.1 Invarianza per omotopia

Teorema 8.1. Siano K un complesso simpliciale, $g_0, g_1 \colon |K| \to |L|$, M_0, M_1 suddivisioni di K, $g_i \colon M_i \to L$, simpliciali e[13] $g_0 \simeq g_1$. Allora

$$\begin{tikzcd}
& H_n(M_0) \arrow[dr, "g_{0*}"] & \\
H_n(K) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & H_n(L) \\
& H_n(M_1) \arrow[ur, "g_{1*}"'] &
\end{tikzcd}$$

[13] D'ora in poi denoteremo così la relazione di omotopia.

Corollario 8.2. Se $f\colon |K| \to |L|$ è continua, allora è ben definita f_* fra i gruppi di omologia con $f_* = g_*$ con g approssimazione simpliciale di f.

Corollario 8.3. Se due funzioni sono omotope inducono gli stessi omomorfismi in omologia.

Osserviamo che $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Corollario 8.4. $H_n(|K| =)$ dipende solo dal tipo di omotopia[14] di $|K|$.

In particolare $H_n(|K|)$ dipende solo dal tipo di omeomorfismo di $|K|$. Vedremo che ci sono altre teorie omologiche (equivalenti) in cui ciò è immediato.

Dimostriamo il Teorema.

Dimostrazione. Sia M una suddivisione di M_0, M_1 ed estendiamo $M \times 2$[15] ad una triangolazione di $|K| \times [0,1]$ nella maniera seguente. I vertici rimangono gli stessi. Agli 1-simplessi aggiungo $K^{[0]} \times 2$. Induttivamente, per $\sigma \in M$ triangolo $\sigma \times 2$ facendo il cono dal centro sul bordo (che è già triangolato).

Ora prendo $F\colon |K| \times 2 \to |L|$ approssimazione simpliciale di G rispetto a N (la triangolazione di $|K| \times 2$ trovata in precedenza). WLOG posso supporre che su $|K| \times \{0\}$ e su $|K| \times \{1\}$ la N induca la stessa triangolazione P di $|K|$. Tale P suddivide M_0 ed M_1 e $\mathcal{F}_j = F(\cdot, j)$ si ottiene da g_j come nel Lemma 7.14. Ho che $f_j(v) \in g_j(\sigma)^{[0]}$ se $v \in \operatorname{int}(\sigma)$, $\sigma \in M_j$. Dunque

$$\begin{tikzcd}
H_n(M_j) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "g_{j*}"'] & H_n(P) \arrow[d, "f_{j*}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& H_n(l)
\end{tikzcd}$$

Senza perdita di generalità $\forall \sigma \in P$ possiamo suppore che $\sigma \times [0,1]$ sia un sottocomplesso di N, a meno di aggiungere lati. Ora, se $z \in C_n(P)$, ha senso $z \times [0,1]$

$$z = \sum n_\sigma \cdot \sigma \Rightarrow z \times [0,1] = \sum n_\sigma \cdot (\sigma \times [0,1])$$

dove $(\sigma \times [0,1])$ è scritto come somma di n-simplessi di N con le orientazioni ovvie. Se ora $z \in Z_n(P)$, vale

$$\partial(z \times [0,1]) = \underbrace{(\partial z)}_{=0} \times [0,1] + z \times \underbrace{\partial[0,1]}_{\{1\}-\{0\}}$$

[14]Che, ricordiamo è la classe di equivalenza modulo "esistono f, g le cui composizioni sono omotope alle identità".

[15]$2 = \{0,1\}$. Se qualcuno sta veramente leggendo questi appunti potrebbe trovare questa cosa molto fastidiosa. Vedi disclaimer.

dunque

$$\partial^L_{n+1} \underbrace{F(z \times [0,1])}_{\in C_{n+1}(L)} = F(z \times 1) - F(z \times 0) = f_{1*}(z) - f_{0*}(z)$$

e ne segue che $f_{0*} = f_{1*} \colon H_n(P) \to H_n(L)$.

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M_0) \arrow[rr, "g_{0*}"] \arrow[dr, "\cong"] & & H_n(L) \\
H_n(K) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & H_n(P) \arrow[ur, "f_{0*}"'] \arrow[dr, "f_{1*}"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
 & H_n(M_1) \arrow[rr, "g_{1*}"'] \arrow[ur, "\cong"'] & & H_n(L)
\end{tikzcd}$$

□

8.2 Varietà differenziabili

Definizione 8.5. M si dice *varietà differenziabile* se è uno spazio T_2 paracompatto e ha un *atlante*, cioè una collezione di *carte* le cui immagini ricoprono M, dove una carta è un omeomorfismo $\alpha \colon U \to \alpha(U)$ aperto di M con U aperto di $\mathbb{R}^n$, e i *cambiamenti* di carta sno differenziabili.

Prenderemo gli atlanti massimali per inclusione (contiene tutte le carte compatibili con lui).

Dimostrazione. $M \subseteq \mathbb{R}^k$ è una n-sottovarietà se le carte $\alpha \colon U \to alpha(U) \subset M$ aperto sono mappe differenziabili con[16] $\operatorname{rank}(d\alpha) \equiv n$. □

Osserviamo che $M \subset \mathbb{R}^k$ è una sottovarietà se e solo se è localmente il grafico di una mappa $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k-n}$ differenziabile e che

Definizione 8.6. Per $M \subset \mathbb{R}^k$ n-sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^k$ e $p \in M$ è definito in modo naturale lo *spazio tangente* $T_p(M)$ come $(d_{\alpha^{-1}(p)\alpha})(\mathbb{R}^n)$ dove $\alpha \colon U \to M$ è una carta con $p \in \alpha(U)$.

Voglio generalizzare questo concetto, che per ora si basa sull'immersione, a varietà astratte. L'idea è che i vettori tangenti sono quelli nelle cui direzioni posso derivare le funzioni definite su M.

Definizione 8.7. Se M è una varietà, $f \colon M \to \mathbb{R}$ è differenziabile se per ogni α carta $f \circ \alpha$ lo e.

La seguente definizione potrebbe essere data in maniera più fine con i germi di funzioni, ma non lo faremo.

[16] $d\alpha$ indica il differenziale di α.

Definizione 8.8. Se M è una varietà e $p \in M$, lo *spazio tangente* a p in M è

$$T_p(M) = \{v \colon C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \mid v \text{ lineare e } \forall f, g\ v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)\}$$

Esercizio 8.9. Se $\alpha \colon U \to M$ è una carta e $p \in \alpha(U)$

$$\mathbb{R}^n \ni w \mapsto \left(f \mapsto \frac{\partial}{\partial w}(f \circ \alpha)_{|\alpha^{-1}(p)} \right) \in T_pM$$

è un isomorfismo.

Definizione 8.10. $g \colon M \to N$ è differnziabile se per ogni carta β di N e α di M lo è $\beta^{-1}_{|\dots} \circ g_{|\dots} \circ \alpha$.

Definizione 8.11. $d_pg \colon T_pM \to T_{g(p)}N$ è definita come

$$((d_pg)(v))(f) = v(f \circ g)$$

Definizione 8.12. Se $g \colon m \to N$ è differenziabile, $p \in M$ è *regolare* se d_pg è surgettivo, mentre $q \in N$ è regolare se ogni $p \in g^{-1}(q)$ è regolare.

Definizione 8.13. M è una n-varietà differenziabile *con bordo* se le carte $\alpha \colon U \to M$ sono da un aperto U di $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty)$.

Nella definizione precedente la differenziabilità sul bordo è da intendersi nella stessa maniera.

Proposizione 8.14. Se $p \in M$ e $p \in \alpha(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ per qualche carta α, allora per ogni altra carta β si ha $p \in \beta(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

Dimostrazione. I diffeomorfismi mandano punti sul bordo i punti sul bordo. □

È ben posta quindi la

Definizione 8.15. $\partial M = \left\{ p \in M \mid p \in \alpha(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \right\}$

che è una $n-1$ varietà senza bordo.

Mentre è facile vedere che il bordo va nel bordo tramite diffeomorfismi, per gli omeomorfismi è più difficile. Si fa in dimensione 1 per connessione e in dimensione 2 col π_1. Per le dimensioni più alte serve l'omologia.

Definizione 8.16. M varietà differenziabile è *orientata* se dotata di un atlante in cui tutti i cambi di carta hanno determinante del differenziale positivo.

8.3 Varietà pl

Definizione 8.17. Se K è un complesso simpliciale, un *link* è

$$\mathrm{Lk}(v, K) = \{\tau \in K \mid v \notin \tau, \exists \sigma \in K\ \sigma \supset \tau, \sigma \ni v\}$$

cioè le facce dei simplessi della stella che non contengono v.

Esercizio 8.18. $|\mathrm{St}(v)| = \overset{\circ}{\mathrm{St}}(v) \sqcup |\mathrm{Lk}(v)|$, $\mathrm{St}(v) = \mathrm{Cono}(v, \mathrm{Lk}(v))$.

Definizione 8.19. K, L complessi simpliciali, sono PL[17]-*omeomorfi* se esistono suddivisioni K' ed L' ed un omeomorfismo simpliciale $K' \to L'$.

Proposizione 8.20. $\mathrm{Lk}(v, K) \cong_{\mathrm{PL}} \mathrm{Lk}(v, H)$ se H suddivide K e $v \in K^{[0]}$.

Dimostrazione. L'idea sarebbe costruire l'omeomorfismo radialmente (disegno). In realtà non è così liscia, va fatto così sui vertici di $\mathrm{Lk}(v, H)$ suddividendo K e poi esteso simplicialmente. □

Esercizio 8.21. La mappa radiale[18] non è simpliciale.

Corollario 8.22. Se K è un complesso simpliciale e $p \in |K|$ sono ben definiti a meno di omeomorfismi PL $\mathrm{St}(p, K)$ e $\mathrm{Lk}(p, K)$ come $\mathrm{St}(p, H)$ e $\mathrm{Lk}(p, H)$ dove H è una suddivisione di K tale che $p \in H^{[0]}$.

Dimostrazione. Passando a suddivisioni comuni per il link e usando il link e il fatto che la stella è un cono sul link per la stella. □

Definizione 8.23. K complesso simpliciale è una *varietà* PL senza bordo[19] se vale uno dei seguenti fatti equivalenti

1. $\forall v \in K^{[0]}\ \mathrm{Lk}(v, K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_n$, dove Δ^n è il *simplesso standard*, cioè $\mathrm{Conv}(e_0, \ldots, e_n \in E^{n+1})$.
2. $\forall p \in |K|\ \mathrm{Lk}(p, K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_n$
3. $\forall v \in K^{[0]}\ \mathrm{St}(v, K) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$ con $v \leftrightarrow x \in \mathrm{int}(\Delta_n)$
4. $\forall p \in |K|\ \mathrm{St}(p, K) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$ con $p \leftrightarrow x \in \mathrm{int}(\Delta_n)$

Proposizione 8.24. Le precedenti sono equivalenti.

Dimostrazione. ($4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$) sono ovvie. Per ($3 \Rightarrow 4$) sia $p \in |K|$. Allora $p \in \mathrm{int}(\sigma)$ con $\sigma \in K$. Prendo $v \in \sigma^{[0]}$ e considero una suddivisione per la quale p è un vertice e segue la tesi (finire per esercizio). □

[17] Piecewise Linear.

[18] Che mappa i punti di un segmento su un altro segmento tramite le rette passanti per un punto fissato.

[19] Qui il Matveev sbaglia.

9 22/10

9.1 Complessi simpliciali astratti

Possiamo dare in un altro modo la definizione di varietà PL:

Definizione 9.1. Se $\mathcal{F}$ è una classe di omeomorfismi fra aperti di $\mathbb{R}^n$ chiusa per restrizione e composizione posso definire una *$\mathcal{F}$-varietà* come uno spazio $M^{(n)}$ T2 paracompatto coperto da carte con cambiamenti di carta in $\mathcal{F}$.

Ad esempio se $\mathcal{F}$ sono tutti gi omeomorfismi ho la nozione di varietà topologica e se $\mathcal{F}$ sono diffeomorfismi C^∞ ho la nozione di varietà differenziabile.

Teorema 9.2. *M^n è una varietà PL se e solo se è una $\mathcal{F}$-varietà con $\mathcal{F}$ la classe degli omeomorfismi localmente PL ed è compatto*[20].

Dimostrazione. Per "$\Rightarrow$" basta usare come carte gli omeomorfismi PL degli intorni dei punti con il simplesso standard (che esistono per ipotesi) ristretti alla parte interna. Per "$\Leftarrow$" l'idea è ricoprire M con un numero finito di carte dell'atlante PL. Considero le immagini in M dei simplessi dati dalle carte e prendo tutte le loro intersezioni. Suddivido in *simplessi astratti*[21] usando le carte (disegno).

Così metto su M una struttura di *complesso simpliciale astratto* finito, cioè un insieme finito V di vertici e $K \subset \mathscr{P}(V)$ chiuso per sottoinsiemi e intersezioni. Posso realizzare M in $\mathbb{R}^V$ mandando una combinazione convessa $\sum t_i v_i$ (letta in qualche carta, ma tanto i cambiamenti sono PL ed è tutto ben definito) in $\sum t_i e_{v_i}$, dove $\{e_v \mid v \in V\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^V$. Trovo $K \subset \mathbb{R}^V$ complesso simpliciale tale che $|K| \cong M$ e le carte PL di M sono PL per K rispetto a tale omeomorfismo. □

Definizione 9.3. $K \subset \mathbb{R}^N$ a supporto finito è una *n-varietà* PL *a bordo* se valgono i seguenti fatti equivalenti:

1. $\forall v \in K^{[0]}$ $\mathrm{Lk}(v,K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_n$ oppure $\mathrm{Lk}(v,K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_{n-1}$
2. $\forall p \in |K|$ $\mathrm{Lk}(p,K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_n$ oppure $\mathrm{Lk}(p,K) \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_{n-1}$
3. $\forall v \in K^{[0]}$ $\mathrm{St}(v,K) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$
4. $\forall p \in |K|$ $\mathrm{St}(p,K) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$

Dimostrazione.

(2$\Rightarrow$1) è ovvio. Per (1$\Rightarrow$3) si passa ai coni (disegno) usando il fatto che $\mathrm{Cono}(q, \partial\Delta_n) \cong_{\mathrm{PL}} \mathrm{Cono}(q, \Delta_{n-1}) \cong \Delta_n$. (3$\Rightarrow$4) si fa mostranco che $\mathrm{St}(p,\Delta_n) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$. Per (4$\Rightarrow$2) mostro che $\mathrm{St}(p,K) \cong_{\mathrm{PL}} \Delta_n$. Se $p \leftrightarrow x \in \mathrm{int}(\Delta_n) \Rightarrow \mathrm{Lk}(p) \cong \partial\Delta_n$, se invece $p \leftrightarrow x \in \partial\Delta_n \Rightarrow \cong_{\mathrm{PL}} \partial\Delta_{n-1}$. □

[20] Mutatis mutandis nelle definizioni di complesso simpliciale è vero anche senza ipotesi di compattezza.

[21] Che, in sostanza, vuol dire che possono essere curvi.

9.2 Orientazione e omologia

M varietà C^∞ è orientata se i cambi di carta hanno determinante del differenziale positivo.

Proposizione 9.4. Se K è una varietà PL n-dimensionale e $\tau \in K^{[n-1]}$, allora esistono esattamente due $\sigma \in K^{[n]}$ tali che $\tau \subset \sigma$.

Dimostrazione. È vero per facce interne di una triangolazione di Δ_n e basta sfruttare la struttura di varietà PL. □

Definizione 9.5. Un'*orientazione* per K varietà PL è un'orientazione di ogni $\sigma \in K^{[n]}$ tale che se $\tau \in K^{[n-1]}$, $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, allora $\varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$.

Proposizione 9.6. Un'orientazione PL corrisponde a una scelta di atlante PL con cambi di carta che preservano le orientazioni degli n-simplessi ereditate da $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Se ho le orientazioni su $K^{[n]}$ uso omeomorfismi PL con aperti di $\mathbb{R}^n$ compatibili con loro. Viceversa oriento i simplessi come nelle carte e noto che la proprietà sugli $n-1$-simplessi vale in $\mathbb{R}^n$. □

Definizione 9.7. Una n-varietà M è *chiusa* se è compatta e senza bordo.

Esercizio 9.8. Se M è una n-varietà PL, allora $\partial M = \{p \in M \mid \mathrm{Lk}(p) \cong \Delta_{n-1}\}$ è una $n-1$ varietà PL senza bordo.

Proposizione 9.9. Sia $M^{(n)}$ una varietà chiusa connessa. Allora

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } M \text{ è orientabile} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Se M è orientabile, ho orientazioni su $M^{[n]}$tali che

$$\tau \subset \sigma_1 \cap \sigma_2 \in K^{[n-1]} \Rightarrow \varepsilon(\sigma_1, \tau) + \varepsilon(\sigma_2, \tau) = 0$$

Allora $H_n(M) = Z_n$. Per le facce adiacenti $\partial(\sum n_i \sigma_i) = 0$ perché ogni faccia compare due volte e con orientazioni diverse (disegno + conto). Per connessione posso trovare un cammino simpliciale da σ_{i_1} a σ_{i_2} ed iterare il discorso precedente, quindi $n_{i_1} = n_{i_2}$, da cui $Z_n = \mathbb{Z} \cdot \sum_{\sigma \in M^{[n]}} \sigma$. Se $H_n(M) \neq \{0\}$, cioè esiste $0 \neq \sum n_i \sigma_i \in Z_n$, come sopra vedo che $\forall i_1, i_2$ $n_{i_1} = \pm n_{i_2}$. Dunque tutti gli n_i sono non nulli e posso cambiare l'orientazione di σ_i per $n_i < 0$ e trovo un'orientazione per M. □

9.3 Grado

Proposizione 9.10. Se M è orientata, $H_n(M)$ ha un generatore canonico: la *classe fondamentale* $[M] = \sum_{\sigma \in M^{[n]}} \sigma$

Definizione 9.11. Se M, N sono n-varietà PL chiuse orientate (connesse) ed $f \colon M \to N$ è continua, se $f_*([M]) = d \cdot [N]$ chiamo d il *grado* di f (denotato con $\deg(f)$).

Posso farlo perché se $f \simeq g$ simpliciale rispetto a suddivisioni e che se $g_1 \simeq g_2$ simpliciali, allora $g_{1*} = g_{2*}$ modulo isomorfismi canonici. Per lo stesso motivo è vero che

Proposizione 9.12. $f_1 \simeq f_2 \Rightarrow \deg(f_1) = \deg(f_2)$.

Corollario 9.13. Se M è chiusa orientabile di dimensione positiva, $\mathrm{Id}_M \colon M \to M$ ha grado 1 (e in particolare non è omotopa ad una costante, che ha grado 0 se la dimensione è positiva.).

Proposizione 9.14 (Calcolo locale del grado)**.** Se $f \colon M \to N$ è simpliciale e $\sigma_0 \in N^{[n]}$, siano $\tau_1, \dots, \tau_k$, tutti gli n-simplessi in $M^{[n]}$ tali che $f(\tau) = \sigma_0$. Sia

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{se } f \colon \tau_i \to \sigma_0 \text{ preserva l'orientazione} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ (disegno).

Dimostrazione. $[M] = \sum_{\tau \in M^{[n]}} \tau$. Quindi

$$f_*(M) = \sum_{\substack{\tau \in M^{[n]} \\ f(\tau) \in N^{[n]}}} \varepsilon(\tau) \cdot f(\tau) = d \cdot \sum_{\sigma \in N^{[n]}} \sigma$$

Ora notiamo che

$$\text{LHS} = \Big(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\Big)\sigma_0 + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} (\dots) \cdot \sigma$$

e quindi $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = d$. □

9.4 Sottovarietà e punti regolari

Definizione 9.15. Sia $f \colon M \to N$ una funzione C^∞ tra $M^{(m)}$ e $N^{(n)}$ varietà chiuse C^∞. $x \in M$ è un punto *regolare* se $d_x f$ è surgettivo[22]. $y \in N$ è regolare se ogni $x \in f^{-1}(y)$ è regolare.

Definizione 9.16. $P \subset M$ è una sottovarietà se localmente è $\mathbb{R}^p \times \underbrace{\{0\}}_{\in \mathbb{R}^{m-p}} \subset \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^m$ carta C^∞ per M.

[22] Se $m < n$ nessun punto è regolare.

Proposizione 9.17. Se y è un valore regolare di $f\colon M \to N$, allora $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà (di dimensione $m-n$). Se M, N sono orientate, $f^{-1}(y)$ è canonicamente orientata.

Dimostrazione. Se $m < n$ si ha che $f^{-1}(y) = \emptyset$. Se $m \geq n$, localmente (vicino a un punto di $f^{-1}(y)$) ho $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con $d_0 f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surgettivo. Usando il Teorema delle funzioni implicite ho che, a meno di cambi C^∞ di coordinate, f è una proiezione $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$ che mappa $(a,b) \mapsto a$. Dunque localmente $f^{-1}(0)$ è $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Per M, N orientate uso carte $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ orientate compatibili con l'orientazione e dichiaro la carta $\mathbb{R}^{m-n} \to \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$ orientata positivamente. $\square$

Definizione 9.18. Se $f\colon M^{(m)} \to N^{(n)}$ è C^∞ con $\partial M \neq \emptyset$ e $\partial N = \emptyset$, dico che y è un valore regolare di f se è regolare per $f_{|M \setminus \partial M}$ e per $f_{|\partial M}$.

Definizione 9.19. $P \subset M$ è una sottovarietà *propriamente embedded* se localmente

$$P \cong \mathbb{R}^{p-1} \times [0, +\infty) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty)$$

(il bordo sta nel bordo).

Definizione 9.20. Se $f\colon M \to N$, $\partial M \neq \emptyset$, $\partial N = \emptyset$, $y \in N$ è un valore regolare se $f^{-1}(y)$ è una sottovarietà propriamente embedded di M; orientata se M, N lo sono.

10 24/10

Aggiunta alla scorsa lezione: $\partial(f^{-1}(y)) = (F_{\partial M})^{-1}(y)$ (verifica).

10.1 Grado in contesto liscio

Lavoreremo con varietà compatte. I risultati si possono generalizzare richiedendo che le applicazioni siano proprie.

Lemma 10.1 (Sard)**.** L'insieme dei valori non regolari ha misura 0 (in ogni carta) ed è magro.

Definizione 10.2. Se $M^{(n)}$ e $N^{(n)}$ sono orientate e $f\colon M \to N$ è C^∞, preso $y \in N$ valore regolare chiamo *grado* di f in y

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} x$$

dove $f^{-1}(y)$ è una 0-sottovarietà orientata e $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(\det(d_x f))$, da intendersi tramite le carte (si verifica la buona definizione[23]).

[23] Il determinante non è ben definito, ma il suo segno o il fatto che sia nullo sì.

Teorema 10.3. Se N è connessa $\deg(f, y)$ non dipende da y, inoltre[24] $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Dimostrazione. L'insieme dei valori regolari è aperto (il complementare è $f(\{x \mid \det(d_x f) = 0\})$). Inoltre $\deg(f, y)$ è localmente costante, perché se y è regolare esiste V intorno di y tale che

$$f^{-1}(V) = W_1 \cup, \ldots, \cup W_k \ \left(f_{|W_j} \colon W_j \overset{\cong}{\to} V\right)$$

e quindi su V il grado è costante. Mostriamo ora che se $f_0, f_1 \colon M \to N$ sono omotope e y è regolare per entrambe, allora $\deg(f_0, y) = \deg(f_1, y)$. Infatti ho $F \colon M \times [0,1] \to N$ con $F(\cdot, j) = f_j$. I valori regolari di F sono un aperto denso per Sard, e quindi WLOG y è un valore regolare per F. $F^{-1}(y)$ è una 1-sottovarietà orientata di $M \times [0,1]$ con $\partial(F^{-1}(y)) = \left(F_{|M \times \{0,1\}}\right)^{-1}(y)$, con orientazioni compatibili. Usando la regola della normale estena per prima si vede che $M \times \{1\}$ è orientata come M e che $M \times \{0\}$ è orientata in maniera opposta ad M. Dunque

$$\sum_{x \in f_1^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(x) = \sum_{x \in f_0^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(x)$$

Ora, dati $y_0, y_1 \in N$ (connessa), esiste una isotopia, cioè una $H \colon N \times [0,1] \to N \times [0,1]$ diffeomorfismo che mappa $(y, t) \mapsto (h_t(y), t)$ tale che $h_0 = \mathrm{Id}$ e $h_1(y_0) = y_1$ (idea della dimostrazione via disegno).

Per conlcudere prendiamo y_0, y_1 regolari per f e h_t come sopra. Si ha, facendo le somme,

$$\deg(h_1 \circ f, h_1(y_0)) = \deg(f, y_0)$$

ma d'altronde

$$\text{LHS} = \deg(h_1 \circ f, y_1) = \deg(f, y_1)$$

□

Proposizione 10.4. Il grado liscio coincide con il grado PL.

Dimostrazione. Formalmente dovremmo dire che

$$\begin{tikzcd} M^{C^\infty} \arrow[r, "f^{C^\infty}"] \arrow[d, "\cong_+"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N^{C^\infty} \arrow[d, "\cong_+"] \\ M^{\mathrm{PL}} \arrow[r, "f^{\mathrm{PL}}"] & N^{\mathrm{PL}} \end{tikzcd}$$

[24] L'omotopia è da intendersi C^∞, ma in realtà dovrebbe essere vero che se fra due mappe C^∞ c'è un'omotopia, allora ce n'è anche una C^∞.

con gli omeomorfismi verticali *positivi*, cioè che conservano l'orientazione (lo definiremo in maniera precisa più avanti tramite l'omologia), allora $\deg(f^{C^\infty}) = \deg(f^{\mathrm{PL}})$. (disegno) In sostanza parto da f liscia, noto che f^{-1} dei vertici di un simplesso molto piccolo in ogni carta sono vertici di un simplesso; modifico f con un'omotopia in modo che sia simpliciale su tali simplessi senza modificarla sui vertici. Orientazioni compatibili con i segni di $\det(d_{x_j} f) \Rightarrow \ldots$ □

Questo è dovuto al fatto che il grado si può definire anche solo con la struttura topologica e che queste nozioni di grado coincidono con quella topologica.

Posso pensare una varietà sia in senso C^∞ che in senso PL, ad esempio posso pensare S^1 cone circonferenza o come simplesso (in entrambi i casi la penso con orientazione).

Teorema 10.5. *$f_0, f_1 \colon S^1 \to S^1$ sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.*

Vediamola nel contesto C^∞. Anche senza "credere" all'equivalenza col caso PL, la dimostrazione può essere riadattata per quest'ultimo contesto.

Dimostrazione. Abbiamo già visto "$\Rightarrow$". Per il viceversa, sia $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ che supponiamo per ora $\neq 0$. Ho $f_0, f_1 \colon S^1 \to S^1$ e voglio "estenderle"[25] ad una $F \colon S^1 \times [0,1] \to S^1$. Sceglo $y \in S^1$ valore regolare comune e ho

$$f_0^{-1}(y) = \{p_1^0, \ldots, p_k^0, n_1^0, \ldots, n_h^0\} \qquad f_1^{-1}(y) = \{p_1^1, \ldots, p_t^1, n_1^1, \ldots, n_s^1\}$$

con i segni pari a $+1$ per i p e -1 per gli n. Per ipotesi $k - h = s - t \neq 0$. (disegno) Si mostra per induzione sul numero di punti coinvolti che

Esercizio 10.6. In tali ipotesi trovo archi orientati $\alpha_1 \ldots, \alpha_N$ con $N = \frac{k+h+t+s}{2}$ tali che ogni $\partial\alpha_j$ sia o $\cup f_*^1 \cup p_*^1$ o $\cup n_*^1 \cup n_*^0$ o $\cup p_*^1 \cup n_*^1$ o $\cup p_*^0 \cup n_*^0$. (disegno)

Dimostrazione. Se $h = s = 0$ oppure $k = t = 0$ è ovvio perché prendo dei raggi. Altrimenti vuol dire che ci sono due segni discordi consecutivi e basta collegarli. □

Dato che il grado non è nullo ho almeno un α_j che unisce $S^1 \times \{0\}$ con $S^1 \times \{1\}$. (disegno) Uso l'Esercizio precedente e considero dei nastri (strisce) attorno a questi cammini, dove è facile estendere $f_0 \sqcup f_1$. Resta da estendere ad un'unione di dischi (ho tolto strisce da un disco) sul cui bordo la F è già definita a valori nel complementare dei punti in cui l'abbiamo già definita, che è un arco (serve molto un disegno qua). Mi trovo a dover estendere

[25] Ci siamo capiti.

una funzione definita sul bordo di un disco a valori in un intervallo. Basta estenderla radialmente dopo aver scelto un valore a caso sul centro.

Nel caso del grado nullo vedo che f_0 ed f_1 sono entrambe omotope ad una costante (e quindi sono omotope fra loro). $\square$

Questi strumenti permetto di fornire una (ennesima) dimostrazione del

Teorema 10.7 (Fondamentale dell'Algebra)**.** $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ha radici.

Dimostrazione. Supponiamo WLOG p monico. Consideriamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$ con le carte date dalle proiezioni stereografiche su piani tangenti ai poli. Considero $f\colon S^2 \to S^2$ definita come

$$f(z) = \begin{cases} p(z) & \text{se } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Affermo che f ha grado d: questo è sufficiente perché se $p(z)$ non ha radici allora $0 \notin \mathrm{Im}(f)$, valore regolare $\Rightarrow \deg(f) = 0$ (anzi, f è omotopa ad una costante perché ha immagine su $\mathbb{C}$). per vederlo analizzo f vicino a ∞: considero

$$z \mapsto \frac{1}{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z^d} + a_1 \frac{1}{z^{d-1}} + \ldots + a_d} = \frac{z^d}{1 + a_1 z + \ldots + a_d z^d}$$

che a meno di una determinazione olomorfa della radice d-esima è localmente del tipo $\left(\frac{z}{\sqrt[d]{1+\ldots}}\right)^d = u^d$. La mappa $u \mapsto u^d$ ha grado d (0 non è un valore regolare: ∞ non è un valore regolare di f per $d \geq 1$). $\square$

Definizione 10.8. $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ è un'*immersione* se è C^∞ e $\forall z$ $f'(z) \neq 0$. f_0, f_1 immersioni sono *regolarmente omotope* se sono omotope tramite immersioni. Se f è un'immersione, chiamo *writhe* di f

$$w(f) = \deg\left(\frac{f'}{\|f\|'}\right) : S^1 \to S^1$$

Una nozione di omotopia regolare può essere data anche nel caso PL ma è parecchio complicata.

Teorema 10.9. f_0, f_1 sono regolarmente omotope se e solo se $w(f_0) = w(f_1)$.

Dimostrazione. Provo che ogni f si riconduce tramite omotopia regolare a uno di questi modelli: (disegni, guardare appunti Petronio). Essenzialmente sono un ∞ per $w = 0$, circonferenze per $w = 1$ e $w = -1$ (con orientazioni opposte) e circonferenze con riccioli per w più grandi.

Come prima cosa elimino i "riccioli grandi": seguo la curva fino alla prima autoinsersezione e ho una circonferenza per Jordan. Se questo ho esaurito S^1 ho trovato S^1 in uno dei due versi. Altrimenti ho trovato un ricciolo, che borda un disco, che possibilmente contiene altri punti dell'immagine di f. In ogni caso posso "retrarre" il ricciolo in maniera che non ne contenga ottenendo solo "riccioli piccoli", che non interagiscono col resto dell'immagine.

Poi elimino i riccioli da parti opposte (disegno) ottenendo un pezzo dritto.

Alla fine ho riccioli tutti dalla stessa parte. Se ce ne sono 0 ho le circonferenze, con 1 ricciolo ho l'∞. Se sono almeno 2 posso averli tutti dentro o tutti fuori, ma in realtà questi possono essere "rivoltati" uno nell'altro.

$\square$

11 29/10

11.1 Alcune conseguenze dei risultati precedenti

Dal Teorema dimostrato l'altra volta segue che

Corollario 11.1. $S^1 \hookrightarrow {S^2}/_{\text{omotpie regolari}} \leftrightarrow {\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$.

Dimostrazione. (disegni) $\square$

Teorema 11.2. Se $m \neq n$, allora $\mathbb{R}^n$ non è omeomorfo ad $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione. Se per assurdo lo fossero ed $n > m$, lo sarebbero anche $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Questi hanno lo stesso dipo di omotopia di $S^{n-1} \cong \partial\Delta_n$ e $S^{m-1} \cong \partial\Delta_m$, ma $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ mentre $H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$. $\square$

Questo non è una conseguenza dell'omologia ma l'avevamo usato, quindi lo dimostriamo.

Teorema 11.3 (Jordan- Schoiffies)**.** Se $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \cong S^1$ (omeo), allora $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma = D \cup E$, con $\gamma = \partial D = \partial E$, $\bar{D} \cong D^2$, $\bar{E} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \mathring{D}^2$.

Per $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è falso. La dimostrazione per gli omeo è difficile. Vediamo quella pl (o differenziabile, che è quasi uguale).

Dimostrazione. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ compesso simpliciale con $|K| \cong_{\text{PL}} S^1$ ($\partial\Delta_2$). WLOG posso supporre che nessun $r \in K^{[1]}$ sia orizzontare eche tutti i vertici siano ad ordinate distinte. Scelgo altezze $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ che contengano:

- tutte le altezze dei vertici che non sono minimi o massimi locali
- una altezza subito sopra e una subito sotto ogni massimo e minimo locale (tranne che sotto il minimo globale e sopra il massimo globale).

(disegni) Sia

$$\gamma_i = \gamma \cap \{y \leq y_i \,|\} \cup \{\text{segmenti orizzontali ad altezza } y_i\}$$

dove i segmenti sono messi in modo che diventi una 1-varietà PL. Provo ricorsivamente che $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma_i$ è unione di D_i che è unione di dischi bucati e di E_i che è $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{dischi aperti}\}$ con $\partial D_i = \partial E_i = \gamma_i$. Ciò basta: per $i = N$ ho che $\overline{D_N}$ è unine di dischi bucati e $\overline{partial D_N} = \gamma_N = \gamma \cong S^1$ e quindi $\overline{D_N} \cong D^2$. Analogamente $\overline{E_N} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \mathring{D}^2$.

Se $i = 1$ ho un triangolo ed ho finito. Per il passo induttivo ho tre casi a seconda del fatto che abbia un minimo, un massimo, o nessuno dei due. In quest'ultimo caso (disegni) è tutto come prima. Se c'è un minimo locale (disegni) o si aggiunge un disco a D_i oppure non succede niente. Se c'è un massimo locale (disegni anche qua) non succede niente, aggiungo un buco ad un disco , oppure ho unito due dischi. Questo conclude la versione PL.

Per la variante differenziabile considero $f\colon S^{\rightarrow}\mathbb{R}^2$ embedding, prendo $v \in S^1$ valore regolare per $\frac{f'}{\|f'\|}$ e per $-\frac{f'}{\|f'\|}$ e WLOG $v = (1, 0)$; ora nei punti in cui f' è orizzontale ho dei minimi o dei massimi locali. Ora $y \cdot f$ ha un numero finito di massimi o minimi locali come soli punti critici. WLOG posso supporre che abbiano altezze diverse, e ora la sitauzione è come nel caso PL, a patto di vedere che nelle strisce ho dei dischi (esercizio di analisi 1). □

Teorema 11.4 (del punto fisso di Brouwer)**.** Se $f\colon D^n \to D^n$ è continua, allora ha un punto fisso.

Dimostrazione. Come nel caso $n = 2$, scrivendo $D^n = {S^{n-1} \times [0,1]}\big/{S^{n-1} \times \{0\}}$ e costruendo un'omototpia fra la costante e $\mathrm{Id}_{S^{n-1}}$, che è assurdo perché la prima ha grado 0 e la seconda ha grado 1. □

Teorema 11.5 (della palla pelosa[26])**.** Se n è pari, non esiste $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mai nulla con $\forall x\ v(x) \perp x$.

Lemma 11.6. Se $f, g\colon X \to S^n$ non sono mai antipodali fra loro, allora sono omotope.

Dimostrazione. $F(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+t(g(x))}{\|(1-t)f(x)+t(g(x))\|}$. □

Lemma 11.7. $\deg(-\mathrm{Id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$.

Dimostrazione. Vediamo S^n come i vettori di norma unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$, orientata come bordo di D^{n+1}. e_0 punta fuori a D^{n+1} in e_0. Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di $T_{e_0}S^n = e_0^{\perp}$, per la regola della normale esterna per prima ho

[26] O "perché servono le orecchie"

che questa è una base positiva perché $e_0, \dots, e_n$ è positiva in $\mathbb{R}^{n+1}$. Ora $-e_0 = (-\operatorname{Id}_{S^n})(e_0)$ è esterno a D^{n+1} in $-e_0$

$$d(-\operatorname{Id}_{S^n})(e_1, \dots, e_n) = (-e_1, \dots, -e_n)$$

ora $(-e_1, \dots, -e_n)$ è positiva per $T_{-e_0}S^n$ se e solo se $-e_0, -e_1, \dots, -e_n$ è positiva per $\mathbb{R}^{n+1}$, che è vero se e solo se $n+1$ è pari.

Se esistesse $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ come nelle ipotesi, avrei che

$$\forall x \; v(x) \notin \{-x, x\}$$

quindi avrei $-\operatorname{Id}_{S^n} \simeq \frac{v}{\|v\|} \simeq \operatorname{Id}_{S^n}$ e questo è omotopo perché hanno gradi diversi. □

11.2 Classificazione pl delle superfici

Teorema 11.8 (Difficile)**.** Ogni 2-varietà topologica chiusa ammette strutture PL e differenziabili; due varietà PL/differenziabili chiuse omeomorfe sono PL-omeomorfe/diffeomorfe.

In altre parole in dimensione 2 sono uguali le categorie TOP = PL = DIFF. È vero anche in dimensione 3. In dimensione 4 invece si ha TOP ≠ PL = DIFF, e per $n \geq 5$ sono tutte diverse.

Definizione 11.9. Una *superficie* è una 2-varietà chiusa connessa PL.

[esempi con disegni di come mettere struttura PL su sfera, toro, proeittivo]

Definizione 11.10. Se Σ_1 e Σ_2 sono superfici, definisco la *somma connessa*

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 = (\Sigma_1 \setminus \mathring{T}_1) \cup_f (\Sigma_2 \setminus \mathring{T}_2)$$

Proposizione 11.11. $\Sigma_1 \# \Sigma_1$ non dipende da:

- T_1, T_2
- f, pre o post componendo con una permutazione pari dei vertici.
- f, se per almeno una fra Σ_1 e Σ_2 esiste $s\colon \Sigma_j \to \Sigma_j$ omeomorfismo PL con $s(T_j) = T_j$ ed s corrisponde ad una permutazione dispari.

Dimostrazione. Domani. □

Teorema 11.12. Ogni Σ chiusa connessa di dimensione 2 è omeomorfa a una e una sola delle seguenti:

- S^2

- $\underbrace{\mathbb{T} \# \ldots \# \mathbb{T}}_{n \text{ volte}}$
- $\underbrace{\mathbb{P}^2 \# \ldots \# \mathbb{P}^2}_{n \text{ volte}}$

dove quest'ultima è la somma connessa di un po' di copie del toro col proiettivo o con la bottiglia di Klein a seconda della parità di n.

12 31/10

12.1 Classificazione delle superfici

L'indipendenza da T_1 e T_2 della definizione di somma connessa segue dal fatto che

Proposizione 12.1. Se $T_1, T_2 \in \Sigma^{[2]}$, allora esiste $g\colon \Sigma \to \Sigma$ omeomorfismo PL tale che $g(T) = T'$.

Dimostrazione. Basta vederlo per T, T' con un lato in comune (a meno di costruire un "cammino" di triangoli). Si fa a meno di raffinare le triangolazioni e shiftare i triangoli (disegno). □

L'indipendenza da f a meno di permutazioni pari dei vertici di T_1 e T_2 è dovuta alla seguente

Proposizione 12.2. Ogni permutazione pari di $T^{[0]}$ è indotta da $G\colon \Sigma \to \Sigma$ omeomorfismo PL.

Dimostrazione. Esercizio. □

Chiaramente è vero anche che

Proposizione 12.3. Se Σ_1 o Σ_2 hanno un automorfismo che induce una permutazione dispari su $T_1^{[0]}$ o $T_2^{[0]}$, allora la somma connessa non dipende da f.

Proposizione 12.4. S^2, $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{T}$ hanno automorfismi di questo tipo.

Dimostrazione. Basta prendere l'altezza per il vertice che non vogliamo scambiare e usare una simmetria (i triangoli li possiamo supporre regolari quanto ci pare). □

Notiamo anche che

Proposizione 12.5. S^2 è l'identità della somma connessa.

Dimostrazione. Facile da vedere pensando S^2 come simplesso. □

Come conseguenza dell'esistenza degli automorfismi di cui sopra, $n \cdot \mathbb{T}$ e $n \cdot \mathbb{P}^2$ sono ben definiti.

Dimostriamo il Teorema 11.12.

Dimostrazione. Procederemo in più stadi:

1. Ogni poligono con i lati identificati a coppie tramite funzioni affini dà una superfice. Si vede facilmente (disegno) che il link di ogni punto è un S^1.

2. Ogni superficie può essere descritta come nel punto precedente: per mostrarlo considero il *grafo di incollamento* di una triangolazione. Questo è costruito mettendoci un vertice per ogni triangolo e un arco per ogni lato comune a due triangoli. Ora considero un albero massimale in questo grafo; questo è planare, cioè può essere realizzato nel piano. A questo punto basta reintrodurre i triangoli e definire gli incollamenti in maniera coerente con la superficie. Questo restituisce automaticamente un poligono con un numero pari di lati proprio perché ho un incollamento a coppie.

3. Ora una superfice è una parola di lunghezza $2n$ in cui ogni lettera compare due volte (eventualmente con esponente -1). Ad esempio S^2 è aa^{-1}, $\mathbb{P}^2$ è aa, $\mathbb{T}^2$ è $aba^{-1}b^{-1}$, la bottiglia di Klein K è $aba^{-1}b\ldots$ Chiaramente vanno quozientate per[27]

   - permutazione ciclica
   - inversione
   - sostituire a con a^{-1} e viceversa.

   e la somma connessa diventa la concatenazione (basta togliere un triangolo su un vertice, disegno)

4. Senza perdita di generalità possiamo supporre che tutti i vertici del poligono si proiettino sullo stesso vertice di Σ (tranne nel caso del poligono che induce S^2). (disegni)

5. Da ora per convenzione indichiamo le lettere con le minuscole e le parole con le maiuscole. Abbiamo $xxWU \cong xW^{-1}xU$. Come conseguenza $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong K$ e $T \# \mathbb{P}^2 \cong K \# \mathbb{P}^2$. Ad esempio per il primo si ha $aabb = ab^{-1}ab$, e per il secondo

   $$aba^{-1}b^{-1}cc = abcbac = abbc^{-1}ac = c^{-1}acabb$$

   Osserviamo che quest'ultima proprietà preserva "un solo vertice". Usandola posso supporre che ogni lato che compare come $x \ldots x \ldots$ compaia consecutivo, cioè $\ldots xx \ldots$ (dove uno dei due può essere x^{-1}.

[27] Probabilmente anche altro, tipo buttare via una lettera se compare sempre a destra della stessa (non dà più informazione).

6. Preservando "un solo vertice" e "xx consecutivi" ho che $xWUx^{-1}Z \cong xUWx^{-1}Z$ (disegni).
7. Un "toro mischiato ad altra roba" $xWyUx^{-1}Vy^{-1}$ può essere visto come toro incollato al resto: $xyx^{-1}y^{-1}T$.
$$\begin{aligned} &x(W)(yU)x^{-1}Vy^{-1}Z = xy(UW)(x^{-1}V)y^{-1}Z = xyx^{-1}VUWy^{-1}Z \\ =&yx^{-1}VUWy^{-1}Zx = yx^{-1}y^{-1}ZVUWx = xyx^{-1}y^{-1}ZVUW \end{aligned}$$
8. Ora abbiamo:
   - un solo vertice
   - stesse lettere consecutive ($a \dots a \mapsto aa \dots$
   - tori consecutivi $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \mapsto aba^{-1}b^{-1}$

   Se tutti i lati sono in tali configurazioni ho finito, infatti ho $n \cdot \mathbb{T} \# m \cdot \mathbb{P}^2$ e qui se $m = 0$ ho $n \cdot \mathbb{T}$, altrimenti ho $(2n+m) \cdot \mathbb{P}^2$. Proviamo che ho usato tutti i lati: se a non l'ho usato certamente ho $aXa^{-1}Y$. Ora basta vedere dove possono comparire eventuali b, b^{-1} (o b, b) fra X e Y. Si conclude facendo i casi (disegni).

Resta da vedere che S^2, $n \cdot \mathbb{T}$ e $m \cdot \mathbb{P}^2$ sono distinti. Basta usare il π_1 notando che la somma connessa passando al π_1 diventa il prodotto libero (dettagli non trascritti). Passando all'omologia (cioè agli abelianizzati) è forse più facile vedere che i gruppi non sono isomorfi. □

12.2 Omologia relativa per complessi simpliciali finiti

Definizione 12.6. Se K è un complesso simpliciale ed $L \subset K$ un suo sottocomplesso, $C_n(K, L)$ è il gruppo abeliano libero generato da $K^{[n]} \setminus L^{[n]}$. Inoltre
$$\partial_n^{(K,L)} \sigma = \sum_{\substack{\tau \in \sigma^k \sigma \\ \tau \notin L^{[n-1]}}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

Proposizione 12.7. $\partial_{n-1}^{(K,L)} \circ \partial_n^{(K,L)} = 0$

Dimostrazione. Segue immediatamente da $\partial_{n-1}^K \circ \partial_n^K = 0$ □

Ho un complesso di catene e posso quindi farne l'omologia. Dato che sto "buttando via" i simplessi di L potremmo pensare che $H_n(K, L) = H_n(\overline{K \setminus L})$, dove la chiusura serve a renderlo un complesso simpliciale. In ogni caso non è vero: un controesempio si ha considerando come K un triangolo e come L il suo bordo. $\overline{K \setminus L}$ è sempre K che è contrattile, quindi ha $H_0 = \mathbb{Z}$ e $H_n = \{0\}$ se $n > 0$. Nell'altro caso ho
$$\begin{array}{lcc} 0 \to \dots \to 0 \to & C_2(K,L) \to C_1(K,L) & \to C_0(K,L) \to 0 \\ 0 \to \dots \to 0 \to & \mathbb{Z} \to 0 & \to 0 \to 0 \end{array}$$

e quindi $H_2(K, L) = \mathbb{Z}$ e $H_n(K, L) = 0$ per $n \neq 2$.

Proposizione 12.8. Fatti analoghi a quelli per l'omologia veri per l'omologia relativa:

- L'omologia non cambia per suddivisioni.
- Se $f\colon (K, L) \to (A, B)$ (cioè $f(L) \subset B$) ho $f_*\colon H_n(K, L) \to H_n(A, B)$ e se $f_0 \simeq_L f_1$, cioè se esiste un omotopia che "lascia L sempre incluso in B", allora $f_{0*} = f_{1*}$ (basta usare la versione relativa del Teorema di Approssimazione Simpliciale)
- $H_n(K, L) = H_n(|K|, |L|)$ a meno di isomorfismo

Inoltre vale

Proposizione 12.9 (Proprietà di excision)**.** Se $Z = X \cup Y$, con X, Y sottocomplessi si ha

$$H_n(Z, Y) \cong H_n(X, X \cap Y)$$

anzi, sono direttamente uguali i complessi di catene.

Dimostrazione.

$$C_n(Z, Y) = \langle \sigma \in Z^{[n]} \setminus Y^{[n]} \rangle = \langle \sigma \in X^{[n]} \setminus (X \cap Y)^{[n]} \rangle = C_n(X, X \cap Y)$$

□

13 05/11

13.1 Successioni esatte

Definizione 13.1. Una successione

$$\ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \to \ldots$$

di gruppi abeliani e omeomorfsmi è *esatta* se $\mathrm{Im}(\varphi_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\varphi_n)$.

Se un complesso di catene è una successione esatta ha quindi omologia nulla. Indicando per brevità il gruppo con un elemento con 0 (invece che con $\{0\}$) osserviamo che $0 \to K \xrightarrow{i} A$ esatta vuol dire che i è iniettiva, mentre $A \xrightarrow{p} Q \to 0$ vuol dire che p è surgettiva.

Definizione 13.2. Una successione del tipo

$$0 \to K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} Q \to 0$$

si dice *successione esatta corta.*

Questo equvale a dire che $K < A$ e $Q = {}^{A}\!/\!_{K}$.

Definizione 13.3. Una successione esatta di mappe tra catene è una successione di mappe tra catene esatta a ogni livello, cioè $C^{(k)}$ complessi di catene, $\varphi^{(k)}\colon C^{(k)} \to C^{(k-1)}$ mappa tra complessi di catene, cioè

$$\begin{tikzcd}
C_n^{(k)} \arrow[r, "\varphi_n^{(k)}"] \arrow[d, "\partial_n^{(k-1)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n^{(k-1)} \arrow[d, "\varphi_{n-1}^{(k)}"] \\
C_{n-1}^{(k)} \arrow[r, "\partial_n^{(k)}"] & C_{n-1}^{(k-1)}
\end{tikzcd}$$

e per ogni n

$$\ldots \to C_n^{(k+1)} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} C_n^{(k)} \to \varphi_k C_n^{(k-1)} \to \ldots$$

è esatta.

13.2 Successioni esatte lunghe in omologia

Se K è un complesso simpliciale e L è un sotto complesso avevamo definito

$$C_n(K,L) = \langle K^{[n]} \setminus L^{[n]} \rangle$$

ed è definito

$$\partial_n^{(K,L)}\colon C_n(K,L) \to C_{n-1}(K,L) \qquad \sigma \mapsto \sum_{\tau \in K^{[n-1]} \setminus L^{[n-1]}, \tau \subset \sigma} \varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \tau$$

Osserviamo che

Proposizione 13.4.

$$\begin{array}{ccc}
0 \to C_n(L) \xrightarrow{i_n} C_n(K) & & \xrightarrow{p_n} C_n(K,L) \to 0 \\
\sigma \mapsto \sigma & & \sigma \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma \in L^{[n]} \\ \sigma & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{array}$$

dà una successione esatta corta di mappe tra complessi di catene.

Dimostrazione. L'esattezza è ovvia. Veiamo che è una mappa fra complessi.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(L) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial_n^L"] & C_n(K) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n^K"] & C_n(K,L) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n^{(K,L)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(L) \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}(K) \arrow[r, "p_{n-1}"] & C_{n-1}(K,L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

verificare per esercizio. □

Teorema 13.5. Sia

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \to 0$$

una successione esatta corta tra complessi di catene. Si ricava una successione esatta lunga in omologia

$$\ldots \to H'_n \xrightarrow{i_{n*}} H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n \xrightarrow{d_n} H'_{n-1} \to \ldots$$

Corollario 13.6. Se K è un complesso simpliciale e $L \subset K$ è un sotto complesso ho una successione esatta lunga

$$\ldots \to H_n(L) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(K) \xrightarrow{p_{n*}} H_n(K,L) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(L) \to \ldots$$

Dimostrazione. Mostriamo che $i_{n*}\colon H'_n \to H_n$ è ben definita:

$$\begin{tikzcd}
C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[d, "\partial n"] \\
C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$[z] \in H'_n$, $z \in Z'_n$, $z \in C'_n$, $\partial'_n z = 0$- $i_{n*}([z]) = [i_n(z)]$. Devo vedere che

1. $i_n(z) \in Z_n$, cioè $\partial_n(i_n(z)) = i_{n-1}(\partial'_n(z)) = i_{n-1}(z) = 0$

2. è indipendente da z. Se $[z_1] = [z_2]$ ho che $z_1 - z_2 \in B'_n$, cioè $z_1 - z_2 = \partial'_{n+1}(w)$ e ho $i_n(z_1) - i_n(z_2) = i_n(\partial'_{n+1} w) = \partial_{n+1}(i_{n+1}(w))$

$$\begin{tikzcd}
C'_{n+1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[d, "\partial n+1"] \\
C'_n \arrow[r, "i_n"] & C_n
\end{tikzcd}$$

dunque $i_n(z_1) - i_n(z_2) \in B_n$ e quindi $[i_n(z_1)] = [i_n(z_2)]$.

Per $p_{n*} \colon H_n \to H''_n$ è uguale. Mostriamo l'esattezza al livello H_n.

$$H'_n \to\xrightarrow{i_{n*}} H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n$$

Devo far vedere che

$$p_{n*} \circ i_{n*} = 0$$

cioè $\mathrm{Im}(i_{n*}) \subset \mathrm{Ker}(p_{n*})$. In generale $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$, ma $p_n \circ i_n = 0$ e quindi $(p_n \circ i_n)_* = 0$. Mostriamo ora che $\mathrm{Im}(i_{n*}) \supset \mathrm{Ker}(p_{n*})$. Sia $[z] \in \mathrm{Ker}(p_{n*})$.
[28]

$$\begin{tikzcd}
 & & C_{n+1} \arrow[r, "p_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{n+1}"] & 0 \\
 & C'_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\partial'_n"] & C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C''_n & \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

esiste quindi $w \in C''_{n+1}$ tale che $p_n(z) = \partial''_{n+1}(w)$. Dunque esiste $u \in C_{n+1}$ tale che $\partial''_{n+1}(p_{n+1}(u)) = p_n(z)$. Questo implica l'esistenza di $u \in C_{n+1}$ tale che $p_n(\partial_{n+1}(u)) = p_n(z)$, e allora esiste $u \in C_{n+1}$ tale che $z - \partial_{n+1}(u) \in \mathrm{Ker}(p_n)$. Allora esiste $u \in C_{n+1}$, $v \in C'_n$ tale che $z - \partial_{n+1}(u) = i_n(v)$. Ora si conclude usando la parte più a sinistra in basso del diagramma.

Definiamo ora $d_n \colon H''_n \to H'_{n-1}$. $z \in Z''_n \subset C''_n$. $\exists w \in C_n$ tale che $z = p_n(w)$. Col solito diagramma ho che $\partial_n w \in \mathrm{Ker}(p_{n-1}) = \mathrm{Im}(i_{n-1})$, e dunque $\exists u \in C'_{n-1}$ tale che $\partial_n w = i_{n-1} u$. Voglio definire

$$d_n([z]) = [u]$$

[28]Forse sono stati usati anche pezzi del diagramma che non ho disegnato, quando risistemo gli appunti magari lo faccio una volta sola.

sempre smanettando con i diagrammi mostro che $\partial'_{n-1}(u) = 0$ (verifica omessa) e vedo che $[u] \in H_{n-1}$ è ben definita.

Mostriamo ora l'indipendenza da w. Supponiamo di avere $p_n(w_1) = p_n(w_2) = z$. $p_n(w_1) - p_n(w_2) = 0$. Ho che esiste $v \in C'_n$ tale che $w_1 - w_2 = i_n(v)$. Siano $u_1, u_2 \in C'_{n-1}$ tali che $i_{n-1}(u_j) = \partial_n(w_j)$. Ho

$$i_{n-1}(u_2 + \partial'_n v) = \partial w_2 + \partial(w_1 - w_2) = \partial w_1$$

e quindi $u_1 = u_2 + \partial'_n v$ e $[u_1] = [u_2] \in H'_{n-1}$.

Mostriamo l'indipendenza da z. Sia $z_2 = z_2 + \partial''_{n+1} x$ Sia $y \in C_{n+1}$ tale che $x = p_{n+1} y$. Sia w_1 con $p_n(w_1) = z_1$. Si ha

$$p_n(w_1 + \partial_{n+1} y) = z_1 + \partial_{n+1} x = z_2$$

e posso scegliere $w_2 = w_1 + \partial_{n+1} y$. Questo conclude perché per la commutatività del diagramma ho che posso usare lo stesso u.

Dobbiamo ancora mostrare l'esattezza in H''_n

$$H_n \xrightarrow{p_{n*}} H''_n \xrightarrow{d_n} H'_{n-1}$$

Mostriamo che $\operatorname{Im} p_{n*} \subset \operatorname{Ker} d_n$. Calcoliamo $d_(\underbrace{p_{n*}([w])}_{:=[z]})$. Ho $\partial_n w = 0$ e quindi posso (devo) scegliere $u = 0$. Dunque $d_n(p_{n*}([w])) = 0$. Mostriamo che $\operatorname{Im} p_{n*} \supset \operatorname{Ker} d_n$. Sempre via "caccia al diagramma" (sempre lo stesso diagramma), se $[z] \in \operatorname{Ker} d_n$ esistono $v \in C'_n$, $w \in C_n$, $u \in C'_{n-1}$ tali che

$$p_n(w) = z \qquad i_{n-1}(u) = \partial_n w \qquad u = \partial'_n v$$

Ne segue che

$$\partial_n w = i_{n-1}(\partial'_n v) = \partial_n(i_n(v))$$

dunque $\partial_n(w - i_n(v)) = 0$ e $p_n(w - i_n v) = z$. Dunque $[z] = p_{n*}([w - i_n v])$.

Per conlcudere la dimostrazione mostriamo l'esattezza in H'_n

$$H''_n \xrightarrow{d_{n+1}} H'_n \xrightarrow{i_{n*}} H_n$$

Mostriamo $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} i_{n*}$. Questo è vero perché se $d_{n+1}([z]) = [u]$ allora via caccia al diagramma $i_{n*}([u]) = [i_n(u)] = [\partial_{n+1} w] = 0$. Infine mostriamo $\operatorname{Im} d_{n+1} \supset \operatorname{Ker} i_{n*}$. Sia $i_{n*}([u]) = 0$. Allora esiste $x \in C_{n+1}$ tale ceh $i_n(u) = \partial_{n+1}(x)$. Claim: $\partial''_{n+1}(p_{n+1}(w)) = 0$, da cui $[u] = d_{n+1}(\underbrace{[p_{n+1}(x)]} \in H''_{n+1})$. Infatti

$$\partial''_{n+1}(p_{n+1}(x)) = p_n(\partial_{n+1}(x)) = p_n(i_n(u)) = 0$$

□

14 07/11

14.1 Interpretazione geometrica di d_n

$$\begin{tikzcd} & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n^X"] & C_n(X,A) \\ C_{n-1}(A) \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1}(X) & \end{tikzcd}$$

Avevamo definito $d_([z]) = [u]$, dove $z \in C_n(X,A)$ e $u \in C_{n-1}(A)$. Il nostro z è

$$z = \sum_{\sigma \in X^{[n]} \setminus A^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma$$

avevamo sollevato a $w \in C_n(X)$ che per noi è

$$w = \sum_{\sigma \in X^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma$$

dove $n_\sigma = 0$ per $\sigma \in A^{[n]}$. Dato che $z \in Z_n(X,A)$ abbiamo $\partial^{(X,A)} z = 0$, quindi

$$\partial^X w = \sum_{\substack{\sigma \in X^{[n]} \\ \tau \subset \sigma \\ \tau \in A^{[n-1]}}} n_\sigma \cdot \varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \tau + \sum_{\substack{\sigma \in X^{[n]} \\ \tau \subset \sigma \\ \tau \in X^{[n-1]} \setminus A^{[n-1]}}} \varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \tau$$

la seconda sommatoria deve essere nullo (segue dalle definizioni). Ne segue che

$$d_n \left(\sum n_\sigma \cdot \sigma \right) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in A^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} n_\sigma \cdot \varepsilon(\sigma,\tau) \cdot \tau$$

Cioè $d_n \colon H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ si ottiene applicando l'operatore ∂ (per costruzione si trovano solo $n-1$ simplessi di A).

14.2 Omologia ridotta

Ricordiamo che se X è connesso $H_0(X) \cong Z$ canonicamente da $[v]$, $v \in X^{[0]}$. Invece $H_0(X,A) = 0$ se $A \neq \emptyset$.

Definizione 14.1. Se $X = \bigsqcup_{i=1}^k X_j$, con le X_j componenti connesse per archi e $v_j \in X_j^{[0]}$, l'*omologia ridotta* è

$$\tilde{H}_n(X,A) = \begin{cases} H_n(X,A) & \text{se } n > 0 \\ \sum_{i=1}^k n_j [v_j] \in H_0(X,A) \mid \sum n_j = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che se $A \neq \emptyset$ ho qualche $[v_j] = 0$, quindi $\tilde{H}_0(X, A) = H_0(X, A)$. Invece se $A = \emptyset$ ho $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$ e

$$\tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{k-1} = \left\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k \mid \sum n_j = 0\right\}$$

dove con $H_n(X)$ si intende $H_n(X, \emptyset)$.

Proposizione 14.2. La successione esatta di omologia

$$\ldots \to H_1(X, A) \xrightarrow{d_i} H_0(A) \xrightarrow{i_0^*} H_0(X) \xrightarrow{p_0^*} H_0(X, A) \to 0$$

induce la stessa successione esatta in omologia ridotta

$$\ldots \to \tilde{H}_1(X, A) \xrightarrow{\tilde{d}_i} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{\tilde{i}_0^*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\tilde{p}_0^*} \tilde{H}_0(X, A) \to 0$$

Dimostrazione. Per definizione

$$\tilde{H}_0(A) = \left\{\sum n_j[a_j] \mid \sum n_j = 0\right\}$$

Proviamo che $\mathrm{Im}(d_1) \subset \tilde{H}_0(A)$. Sia $[z] \in \tilde{H}_1(X, A) = H_1(X, A)$. Dunque $z = \sum m_j \cdot e_j$. Dato che $\partial^{(X,A)} z = 0$, abbiamo

$$\partial^X z = \sum m_j \left(e_j(1) - e_j(0)\right)$$

da intersi come "il secondo estremo meno il primo". Questo è uguale a

$$\sum_{v \in A^{[0]}} \left(\sum_{j | e_j(1) = v} m_j - \sum_{j | e_j(0) = v} m_j\right) + \sum_{v \notin A^{[0]}} \left(\sum_{j | e_j(1) = v} m_j - \sum_{j | e_j(0) = v} m_j\right) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

in ∂_X la somma di tutti i coefficienti e 0. Dato che $\partial^{X,A} z = 0$, in Σ_2 tutti i coefficienti sono 0, e quindi in Σ_2 la somma di tutti i coefficienti è 0, per cui $d_1([z]) = [\partial^X z] \in \tilde{H}_0(A)$.

Ora mostriamo che $i_0^*(\tilde{H}_0(A)) \subset \tilde{H}_0(X)$. Questo è vero perché

$$i_0^* \left(\sum n_j [a_j]_A\right) = \sum n_j [a_j]_X$$

e $\sum a_j = 0$ continua ad essere vero.

Vediamo che $\mathrm{Im}(\tilde{d}_1) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{i}_0^*)$. Questo è ovvio perché

$$\tilde{i}_0^* \circ \tilde{d}_1 = i_0|_{\tilde{H}_0(A)}^{\tilde{H}_0(X)} \circ d_1|^{\tilde{H}_0(A)} = i_0 \circ d_1|^{\tilde{H}_0(X)} = 0$$

perché $i_0 \circ d_1 = 0$.

Vediamo che $\mathrm{Ker}(\tilde{i}_0^*) \subset \mathrm{Im}(\tilde{d}_1)$. Se $[z] \in \mathrm{Ker}(\tilde{i}_0^*)$, allora $[z] \in \mathrm{Ker}(i_0^*)$ e dunque $[z] \in \mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Im}(\tilde{d}_1)$.

Ora la buona definizione di p_0^*. Mostriamo che $p_0^*(\tilde{H}_0(X)) \subset \tilde{H}_0(X,A)$. Questo è ovvio perché

$$p_0^*\left(\sum n_j[v_j]_X\right) = \sum n_j[v_j]_{(X,A)}$$

e continua ad essere vero che $\sum n_j = 0$.

$\mathrm{Im}(\tilde{i}_0^*) \subset \operatorname{Ker} \tilde{p}_0^*$ è ovvio.

$\mathrm{Im}(\tilde{i}_0^*) \supset \operatorname{Ker} \tilde{p}_0^*$ è vero perché

$$[z] \in \operatorname{Ker}(\tilde{p}_0^*) \Rightarrow [z] \in \operatorname{Ker}(p_0^*) \Rightarrow \exists [w] \in H_0(A)\ [z] = i_0^*([w])$$

bisogna vedere che $[w] \in \tilde{H}_0(A)$ (esercizio).

Infine $\tilde{p}_0^*$ è surgettivo perché

$$\sum n_j[v_j]_{(X,A)} \in \tilde{H}_0(X,A) \Rightarrow \text{ è } \tilde{p}_0^*\left(\sum n_j[v_j]_X\right)$$

□

Proposizione 14.3. Anche per $\tilde{H}_n$ valgono le proprietà:

1. Omotopia: se $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ e $f \simeq_A g$ allora $f_* = g_*\colon \tilde{H}_n(X,A) \to \tilde{H}_n(Y,B)$
2. Escissione: $H_n(Z,Y) \cong H_n(X, X \cap Y)$.

14.3 Omologia ridotta delle sfere

Teorema 14.4. Per ogni n, m si ha

$$\tilde{H}_n(S^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cioè

$$H_n(S^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = m = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 < m \text{ oppure } n = m > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. $S^{m-1} = \partial D^m$, quindi posso usre la successione esatta di (D^m, S^{m-1}).

$$0 = \tilde{H}_n(D^m) \to \tilde{H}_n(D^m, S^{m-1}) \to H_{n-1}(S^{m-1}) \to H_{n-1}(D^m) = 0$$

dove le uguaglianze con 0 sono perché D^m è contrattile e per ogni n un punto ha $\tilde{H}_n$ banale. Dunque

$$\tilde{H}_n(D^m, S^{m-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1}) \tag{3}$$

Ora[29]

$S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\} = \{x \in S^m \mid x_0 \geq 0\} \cup \{x \in S^m \mid x_0 \leq 0\} = D^m_+ \cup D^m_-$

e inoltre $D^m_+ \cap D^m_- = S^{m-1}$. Per escissione

$$\tilde{H}_n(S^m, D^m_+) = \tilde{H}_n(D^m_-, S^{m-1}) \tag{4}$$

Per la successione esatta di S^m, D^m_+ ho

$$0 = \tilde{H}_n(D^m) \to \tilde{H}_n(S^m) \to \tilde{H}_n(S^m, D^m) \to \tilde{H}_{n-1}(D^m) = 0$$

e quindi

$$\tilde{H}_n(S^m) \cong \tilde{H}_n(S^m, D^m) \tag{5}$$

Mettendo insieme gli isomorfismi 3, 4 e 5 otteniamo

$$\tilde{H}_n(S^m) = \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1})$$

Basta ora scendere finché uno dei due non è 0. Posso quindi giungere a $\tilde{H}_{n-m}(S^0)$, che ha omologia ridotta $\mathbb{Z}$ se $n = m$ e 0 altrimenti, oppure a $\tilde{H}_0(S^{m-n})$, che ha omologia ridotta $\mathbb{Z}$ se $m = n$ e 0 altrimenti. $\square$

14.4 Ancora algebra

Proposizione 14.5. La successione esatta di omotopia è funtoriale dalla categoria delle coppie (K, L) con K complesso simpliciale e L sottocomplesso dove le frecce che sono le mappe simpliciali di coppie alla categoria delle successioni esatte di omomorfismi di gruppi abeliani dove le frecce sono le mappe naturali[30].

Questo segue dal fatto genereale che

Proposizione 14.6. Se ho successioni esatte corte di complessi di catene

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \to 0$$

con bordi ∂, ∂', ∂'' e

$$0 \to D' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p} D'' \to 0$$

con bordi d, d', d'', e ho mappe di complessi di catene $\varphi' \colon C' \to D'$, $\varphi \colon C \to D$, $\varphi'' \colon C'' \to D''$ e i diagrammi commutano tutti, allora commuta anche

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{i_n^*} & H_n(C) & \xrightarrow{p_n^*} & H_n(C'') & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \varphi'_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi''_n & & \downarrow \varphi'_{n-1} & \\
\cdots \longrightarrow & H_n(D') & \xrightarrow{j_n^*} & H_n(D) & \xrightarrow{q_n^*} & H_n(D'') & \xrightarrow{\eta_n} & H_{n-1}(D') & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

[29] Usiamo il linguaggio liscio, ma si riporta pari pari al caso PL.

[30] Cioè che fanno commutare tutti i quadrati.

Dimostrazione. Alcuni sono ovvi perché valgono a livello di catene. Vediamo che $[z] \in H_n(C'')$. Usando la commutatività di

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & C''_n \\
C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & C_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

abbiamo $\partial_n([z]) = [u]$. Devo provare che $\eta_n(\varphi''_n([z])) = [\varphi'_{n-1}(x)]$

$$\begin{tikzcd}
 & D_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "d_n"] & D''_n \\
D'_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] & D_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

e quindi ho

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C''_n \arrow[d, "\varphi''_n"] \\
D_n \arrow[r, "q_n"] & D''_n
\end{tikzcd}$$

se provo che $j_{n-1}(\varphi'_{n-1}(w)) = d_n(\varphi_n(w))$ ho la conclusione. Questo è vero perché commuta

$$\begin{tikzcd}
C'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi'_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
D'_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

e commuta

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial n"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "d_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

□

Questo è un analogo di Van Kampen:

Teorema 14.7 (Successione esatta di Mayer-Vietoris)**.** Sia K un complesso simpliciale, A_1, A_2 sottocomplessi, K la loro unione e L la loro intersezione. Ho

$$C(L) \xrightarrow{i^{(p)}} C(A_p) \xrightarrow{j^{(p)}} C(K)$$

per $p = 1, 2$. Denotando con ℓ la composizione, la successione

$$0 \to C(L) \xrightarrow[i]{i^{(1)}, -i^{(2)}} C(A_1) \oplus C(A_2) \xrightarrow[j]{j^{(1)}+j^{(2)}} (K) \to 0$$

è esatta

Dimostrazione. La prossima volta. □

Corollario 14.8. Per il Teorema generale che da una esatta corta di complessi di catene otteniamo una esatta lunga in omologia abbiamo

$$\ldots \to H_n(L) \to H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \to H_n(K) \to H_{n-1}(L) \to \ldots$$

Questo vale anche per $\tilde{H}_n$. È un analogo di Van Kampene perché per $n = 1$ ed L connesso dice

$$H_1(L) \to H_1(A_1) \oplus H_1(A_2) \to H_1(K) \to \tilde{H}_0(L) = 0$$

e questo dice che

$$H_1(K) \cong {H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)}\big/{i_*(H_1(L))}$$

che è l'abelianizzato di Van Kampen.

15 12/11

15.1 Dimostrazione e applicazioni di Mayer-Vietoris

Dimostrazione. i è iniettiva perché lo sono $i^{(1)}$ e $i^{(2)}$. Inoltre $\operatorname{Ker} j \supset \operatorname{Im} i$, cioè $j \circ i = 0$, perché

$$(j \circ i)(\sigma) = (j^{(1)} + j^{(2)})(i^{(1)}(\sigma) - i^{(2)}(\sigma)) = (j^{(1)} \circ i^{(1)})(\sigma) - (j^{(2)} \circ i^{(2)})(\sigma) = e(\sigma) - e(\sigma) = 0$$

Mostriamo che $\operatorname{Ker} j \subset \operatorname{Im} i$:

$$x = \left(\sum_{\sigma \in A_1} n_\sigma^{(1)} \cdot \sigma, \sum_{\sigma \in A^2} n\sigma^{(2)} \cdot \sigma \right) \in \operatorname{Ker} j$$

cioè

$$\sum_{\sigma \in A_1} n\sigma^{(1)} \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in A_2} n\sigma^{(2)} \cdot \sigma = 0 \qquad (\text{in } |K|)$$

questo è

$$\left(\sum_{\sigma \in A_1 \setminus L} n\sigma^{(1)} \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in L} n\sigma^{(1)} \cdot \sigma \right) + \left(\sum_{\sigma \in A_2 \setminus L} n\sigma^{(2)} \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in L} n\sigma^{(2)} \cdot \sigma \right)$$

Tuttavia $n\sigma^{(r)} = 0$ per ogni $\sigma \in A_r \setminus L$ per $r \in \{1, 2\}$, mentre per $\sigma \in L$ si ha $n_\sigma^{(2)} = -n_\sigma^{(1)}$. Dunque

$$x = \left(\sum_{\sigma \in L} n_\sigma^{(1)} \cdot \sigma, - \sum_{\sigma \in L} n_\sigma^{(1)} \cdot \sigma \right)$$

e quindi

$$x = (i^{(1)}, -i^{(2)})(\sum_{\sigma \in L} n_\sigma^{(1)} \cdot \sigma)$$

(questo discorso va fatto per ogni livello k; va sostituito ad esempio A_1 con $A_1^{[k]}$; d'ora in poi li indicheremo)

j è surgettiva: infatti

$$C_k(K) \ni \sum_{\sigma \in K^{[k]}} n_\sigma \cdot \sigma = \sum_{\sigma \in A_1^{[k]}} (\dots) + \sum_{\sigma \in A_2^{[k]} \setminus A_1^{[k]}} (\dots) = j^{(1)}(\dots) + j^{(2)}(\dots)$$

$\square$

Per dedurre

$$\dots \to H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \xrightarrow{j_*} H_n(K) \xrightarrow{d} H_{n-1}(L) \to \dots$$

dal Teorema generale bisogna dire che $H(C \oplus C') \cong H(C) \oplus H(C')$ (facile).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C_n(A_1) \oplus C_n(A_2) & \xrightarrow{j} C_n(K) & \longrightarrow 0 \\
 & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\partial_n^{A_1}, \partial_n^{A_2})} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}(L) & \xrightarrow{(i_{n-1}^{(1)}, -i_{n-1}^{(2)})} & C_{n-1}(A_1) \oplus C_{n-1}(A_2) & &
\end{array}$$

$$z = \sum_{\sigma \in K^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma$$

$$w = \left(\sum_{\sigma \in A_1^{[n]} \setminus L^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma + \sum_{\sigma \in L^{[n]}} p_\sigma \cdot \sigma, \sum_{\sigma \in A_2^{[n]} \setminus L^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma + \left(\sum_{\sigma \in L^{[n]}} (n_\sigma - p_\sigma) \cdot \sigma \right) \right)$$

Dato che z è un ciclo, calcolando $(\partial_n^{A_1}, \partial_n^{A_2})(w)$...

Se $\tau \in A_1^{[n]} \setminus L^{[n]}$ ho $\varepsilon(\sigma, \tau) \neq 0$ solo per $\sigma \in A_1^{[n]} \setminus L^{[n]}$. Ma allora il coefficiente di τ in $\partial_n z$ è uguale a quello in $\partial_n^{A_1} w_1$. Stesso: $\tau \in A_2^{[n-1]} \setminus L^{[n-2]}$, allora il coefficiente di τ in $\partial_n z$ è uguale a quello in $\partial_n^{A_2} w_2$. Morale: siccome $\partial_n z = 0$ ho $\partial_n w_1 \in C_{n-1}(L)$ e $\partial_n w_2 \in C_{n-1}(L)$, anzi a $Z_{n-1}(L)$. Anzi si ha $(\partial_n w_1, \partial_n w_2) = (i_{n-1}^{(1)}(u), i_{n-1}^{(2)}(u))$ e questo non dipende dalla scelta dei p_σ. In altre parole $d\colon H_n(K) \to H_{n-1}(L)$ funziona così:

- Si prende $z = \sum n_\sigma \cdot \sigma$, $[z] \in H_n(K)$
- Si scrive $z = (w_1, w_2)$ con $w_1 \in C_n(A_1)$ e $w_2 \in C_n(A_2)$
- $d([z]) = [\partial_n w_1]$ (automaticamente $\partial_n w_1 \in Z_{n-1}(L)$, e non solo a $Z_{n-1}(A_1)$).

Esercizio 15.1. Sia M una 3-varietà[31] ed $N = M \setminus (\mathrm{int}(\Delta_3))$ (e a meno di defomare questa è la stessa cosa di dire $N \simeq M \setminus \{p\}$). Provare che $H_1(N) \cong H_1(M)$.

Dimostrazione. Via Mayer-Vietoris o dal fatto che $N^{(2)} = M^{(2)}$, e H_1 dipende solo dal 2-scheletro.

Via Mayer-Vietoris[32]: $N = A_1$, $\Delta_3 = A_2$, $L = A_1 \cap A_2 = \partial \Delta_3 = S^2$.

$$\underbrace{H_1(S^2)}_{0} \to H_1(N) \oplus \underbrace{H_1(D^3)}_{=0} \to H_1(M) \to \underbrace{\tilde{H}_0(S^2)}_{=0}$$

□

Esercizio 15.2. Sia M chiusa orientata, $N = M \setminus \mathrm{int}(\Delta_3)$. Allora $H_2(N) \cong H_2(M)$.

Dimostrazione. Usando Mayer-Vietoris abbiamo (a patto di risolvere il prossimo esercizio)

$$\underbrace{H_3(D^3)}_{=0} \oplus \underbrace{H_3(N)}_{=0} \to \underbrace{H_3(M)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{a} \underbrace{H_2(S^2)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{g} \underbrace{H_2(D^3)}_{=0} \oplus H_2(N) \xrightarrow{f} H_2(M) \to \underbrace{H_1(S^2)}_{=0}$$

Ho $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, g$. Se provo che a è un isomorfismo ho che a è surgettiva, dunque $g = 0$ e $\mathrm{Ker}\, f = 0$. d è un isomorfismo: $d([M]) = \ldots$

$$\sum_{\sigma \in M} \sigma = \Delta_3 + \sum_{\sigma \neq \Delta_3} \sigma$$

[31] Va bene anche ≥ 3.

[32] Che vale anche per l'omologia ridotta, anche se non l'abbiamo dimostrato.

e

$$d([M]) = [\partial\Delta_3]$$

cioè $d\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ manda 1 in 1 ed è quindi un isomorfismo. □

Esercizio 15.3. Se $N^{(n)}$ è compatta connessa con $\partial N \neq \emptyset$, allora $H_n(N) = 0$.

Dimostrazione. (disegno) □

Esercizio 15.4. Sia $K \subset S^3$ un nodo PL (cioè una sottovarietà PL omeomorfa a S^1). È vero che[33] esiste un intorno U di K in S^3 omeomorfo a $K \times D^2$ (U intorno regolare[34]). Poniamo[35] $N = S^3 \setminus \mathring{U}$. Allora $H_1(N) \cong \mathbb{Z}_\mu$, cioè $\mathbb{Z}$ generato da un *meridiano*, ossia un laccio che gira una volta intorno al nodo.

Dimostrazione. Uso Mayer-Vietoris come prima, con $A_1 = U$, $A_2 = N$, $K = S^3$, $L = \partial U \cong T$, con T il toro. Sia λ una *longitudine*, cioè[36] una curva che percorre tutto il toro. Ora $T \cong S^1 \times S^1$ e[37] $H_1(T) = \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\lambda$.

$$\underbrace{H_2(S^3)}_{=0} \to \underbrace{H_1(\partial U)} = \mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\lambda \to \underbrace{H_1(U)}_{=\mathbb{Z}_\lambda} \oplus H_1(N) \to \underbrace{H_1(S^3)}_{=0}$$

e quindi $H_1(N) \cong \mathbb{Z}_\mu$. Abbiamo un'applicazione $H_1(\partial U) \to H_1(N)$, cioè $\mathbb{Z}_\mu \oplus \mathbb{Z}_\lambda \to \mathbb{Z}_\mu$. Il Ker di quest'applicazione sarà isomorfo a $\mathbb{Z}$, quindi esiste un preciso $p \in \mathbb{Z}$ tale che $p\cdot\mu+\lambda$ è nel nucleo dell'applicazione sopra. Chiamo questa longitudine quella privilegiata, e questo risolve l'ambiguità. □

Esercizio 15.5. Se $N = S^3 \setminus \mathring{U}(K)$, allora $H_2(N) = 0$.

Dimostrazione.

$$\underbrace{H_3(U)}_{=0} \oplus \underbrace{H_3(N)}_{=0} \to \underbrace{H_3(S^3)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{d} \underbrace{H_2(\partial U)}_{=\mathbb{Z}} \to H_2(U) \oplus H_2(N) \to \underbrace{H_2(S^3)}_{=0}$$

Basta mostrare che d è un isomorfismo, e segue che $H_2(N) = 0$. Come sopra, prendo

$$[S^3] = \left[\sum_\sigma \sigma\right] \overset{d}{\mapsto} \left[\partial\left(\sum_{\sigma\in U} \sigma\right)\right] = [\partial U]$$

e quindi $d\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ manda 1 in 1 ed è quindi un isomorfismo. □

[33] Dimostrazione omessa.

[34] In generale $Y^{(k)} \hookrightarrow X^{(n)}$ sottovarietà compatta lisca o PL$\Rightarrow$ esiste un intorno di Y in X che è un fibrato in D^{n-k} su Y, cioè è localmente D^{n-k}. Ad esempio l'intorno regolare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di γ dove $[\gamma] \neq 0$ è il nastro di Möbius, che non è $S^1 \times D^1$.

[35] Quello che mi interessa è proprio $S^3 \setminus K$, di cui N è un retratto per deformazione.

[36] Per ora è definita in modo ambiguo, potremmo sostituirla con $\lambda + p\cdot\mu$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$; sistemeremo dopo.

[37] L' H_1 del prodotto *non* è il prodotto degli H_1 in generale, ma in questo caso ci va bene.

15.2 Proprietà assiomatiche dell'omologia

Vogliamo isolare alcune proprietà dell'omologia simpliciale che, se verificate da altre costruzioni, restituiscono la stessa costruzione di omologia.

L'omologia è un funtore (covariante) dalla categoria delle coppie (K, L), con L sottocomplesso di K con le frecce date dalle mappe di coppie, cioè tali che l'immagine di L è contenuta nel secondo membro dell'oggetto in arrivo, alla categoria delle successioni di gruppi abeliani con le frecce date dalle successioni di omomorfismi.

Gli assiomi che diamo sono

1. Omotopia: se $f_0 \simeq_L f_1 \colon (K, L) \to (A, B)$, cioè sono omotope relativamente ad L, cioè esiste f_t con $f_t(L) \subset B$ per ogni t, allora $f_{0*} = f_{1*}$.
2. Escissione: Se $K = X \cup Y$, $Z = X \cap Y$, allora $H_n(K, Y) = H_n(X, Z)$.
3. Les(Long Exact Sequence):
$$\ldots \to H_n(L) \to H_n(K) \to H_n(K, L) \to H_{n-1}(L) \to \ldots$$
(tutto funtoriale)
4. Dimensione: $H_n(\{p\})$ è $\mathbb{Z}$ se e solo se $n = 0$, altrimenti è 0.
5. 0-omologia[38] $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\#\text{ componenti connesse}}$.

Mayer-Vietoris non è enunciato in quanto segue dai precedenti. Osserviamo che questi assiomi bastano[39] a calcolare $H_n(D^p, S^{p-1}) \cong H_n(S^p)$.

16 14/11

Manca l'inizio lezione. Essenzialmente sono definizioni (già date all'inizio) di tipo categoriale, più la definizione di *isomorfismo naturale* (una trasformazione naturale dove ogni freccia è un'isomorfismo).

16.1 Equivalenza di omologie

Teorema 16.1. Sia H' un funtore dalle coppie (K, L) come sopra alle successioni di gruppi abeliani che soddisfi le proprietà date in 15.2. Se esiste una trasformazione naturale $\varphi \colon H \to H'$, dove H è l'omologia simpliciale, tale che per ogni punto p la mappa $\varphi_{\{p\}}$ sia un isomorfismo, allora φ è un isomorfismo.

[38] Forse non è necessario.
[39] In realtà avevamo usato l'omologia ridotta.

Dimostrazione. Devo mostrare che ogni $\varphi_{(K,P)}$ è un isomorfismo. Supponiamo $P = \emptyset$ e procediamo per induzione sul numero $\#K$ di simplessi di K. Se $\#K = 1$, allora $K = \{p\}$ e la tesi è vera banalmente dalle ipotesi assunte. Sia $\#K > 1$ e sia $\sigma \in \mathbb{K}^{[n]}$, con n massimo. Per ogni m ho

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{m+1}(K,L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{(K,L),m+1}"] & H_m(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{L,n}"] & H_m(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{K,n}"] & H_m(K,L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{(K,L),m}"] & H_{m-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{L,m-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H'_{m+1}(K,L) \arrow[r] & H'_m(L) \arrow[r] & H'_m(K) \arrow[r] & H'_m(K,L) \arrow[r] & H'_{m-1}(L) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per ipotesi induttiva sono isomorfismi $\varphi_{L,m}$ e $\varphi_{L,m-1}$ Per escissione ho

$$H_p(K,L) \cong H_p(\sigma, \partial\sigma) \cong H_p(\Delta_n, \partial\Delta_n) \cong H_p(D^n, \partial D^n) \cong H_p(S^{n-1})$$

Dato che $H_p(S^{n-1})$ ed $H_{p'}(S^{n-1})$ li abbiamo calcolati solo usando le proprietà date in 15.2, ho $H_p(S^{n-1}) \cong H'_p(S^{n-1})$. Inoltre, dato che φ commuta con tutto[40], l'isomorfismo è naturale, ovvero

$$\varphi_{(K,L),p} \colon H_p(K,L) \to H'_p(K,L)$$

è un isomorfismo. Quindi per $P = \emptyset$ concludiamo usando il Lemma 16.2

La conclusione nel caso $P \neq \emptyset$ segue dallo stesso Lemma applicato al diagramma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(P) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(K) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(K,P) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(P) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H'_n(P) \arrow[r] & H'_n(K) \arrow[r] & H'_n(K,P) \arrow[r] & H'_{n-1}(P) \arrow[r] & H'_{n-1}(K) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\square$

Lemma 16.2 (5-lemma)**.** Se abbiamo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r, "k'"] & D' \arrow[r, "e'"] & E'
\end{tikzcd}$$

con righe esatte e α, β, δ, ε isomorfismi, allora anche γ è un isomorfismo.

[40]Stiamo barando, mancano un bel po' di dettagli.

Dimostrazione. Vediamo l'inettività. Sia $\gamma(c) = 0$. Allora $k'(\gamma(c)) = 0$ e quindi $\delta(\kappa(c)) = 0$. Dato che δ è iniettiva, $k(c) = 0$. Dunque $c = j(b)$ e $\gamma(j(b)) = 0$, perciò $j'(\beta(b)) = 0$ e $\beta(b) = i'(a')$. Per surgettività di α si ha $a' = \alpha(a)$. Dunque $\beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = i'(a') = \beta(b)$, e dunque per iniettività di β si ha $b = i(a)$, da cui $c = j(b) = j(i(a)) = 0$.

Vediamo la surgettività. Sia $c' \in C'$. $k'(c') \in D'$, per surgettività di δ abbiamo $k'(c') = \delta(d)$. Dunque $e'(k'(c')) = 0$, e quindi $e'(\delta(d)) = 0$, da cui $\varepsilon(e(d)) = 0$ e (per iniettività di ε) $e(d) = 0$. Allora $d = k(c)$ e $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0$, dunque $k'(c' - \gamma(c))$ è 0 e quindi $c' - \gamma(c) = j'(b')$. Ora per surgettività di β abbiamo $b' = \beta(b)$ e

$$\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = j'(b') = c - \gamma(c)$$

e quindi $c' = \gamma(c + j(b))$. □

16.2 Altre teorie omologiche

Usare direttamente l'omologia simpliciale a volte è difficile, ad esempio perché

Proposizione 16.3. La più piccola triangolazione del toro ha 14 triangoli.

Inoltre a volte potremmo voler usare i risultati per oggetti infinito-dimensionali. Per questo vedremo altre teorie omologiche, tutte equivalenti nel senso visto sopra.

Definizione 16.4. I Δ-complessi sono[41] $\Delta_n = \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.Indichiamo inoltre con

$$\varphi_i^{(n)} \colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

l'identificazione tra Δ_{n-1} e la faccia di Δ_n opposta al vertice e_i, quindi $e_j \mapsto e_j$ se $j < i$ e $e_j \mapsto e_{j+1}$ se $j \geq 1$. L'ordinamento dei vertici è fisso.

Definizione 16.5. Se X è uno spazio topologico, chiamo *struttura di Δ-complesso* su X una famiglia $\mathscr{S} = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in A\}$, $\sigma_\alpha \colon \Delta_{n(\alpha)} \to X$ con

1. $\sigma_{\alpha|\mathrm{int}(\Delta_n(\alpha))}$ è iniettiva
2. $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\mathrm{int}(\Delta_n(\alpha)))$
3. $\sigma_\alpha \circ \varphi_i^{(n(\alpha))} \in \mathscr{S}$ per ogni $\alpha \in A$, $i = 0, \dots, n(\alpha)$
4. $Y \subset X$ è aperto se e solo se $\sigma_\alpha^{-1}(Y)$ è aperto in $\Delta_{n(\alpha)}$ per ogni α.

Cioè X è espresso come unione disgiunta di simplessi aperti e l'embedding di ciascun simplesso aperto astratto si estende al simplesso chiuso astratto; su ogni singola faccia del bordo tale estensione ha un embedding, ma non sul bordo intero (più conseguenza ordinamento che ora vedremo).

[41] Proprio loro, non loro a meno di...

Esempio 16.6. Realizziamo il toro come unione di due triangoli (disegno[42]). Gli estremi dei segmenti vanno nello stesso punto, quindi tutti gli embedding si estendono al bordo, ma non sono embedding sul bordo. Comunque abbiamo solo 2 triangoli, non 14.

Un Δ-complesso è il quoziente di

$$\bigsqcup \text{simplessi astratti} \Big/ \text{incollamenti indotti dalle } \sigma_\alpha$$

cioè se $x \in \Delta_{n(\alpha)}$ e $y \in \Delta_{n(\beta)}$, allora $x \sim y$ se $\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(y)$. Inoltre in X ogni simplesso aperto ha una ben definita orientazione derivante dall'ordinamento dei vertici in qualsiasi sua versione astratta, cioè per qualunque σ_α io usi di cui il simplesso è nell'immagine.

(esempi via disegni)

Un complesso simpliciale finito diventa un Δ-complesso scegliendo su ogni simplesso l'orientazione indotta da un ordinamento totale di tutti i vertici. Inoltre, se X ha una struttura di Δ-complesso finito, è anche omeomorfo a $|K|$ per un qualche[43] complesso simpliciale finito K.

Se X è un Δ-complesso, in X sono definiti i simplessi; è ben definita la nozione di "un simplesso τ è faccia di un simplesso η": se esiste α, $T, E \subset \Delta_{n(\alpha)}$ tale che T faccia di E e $\sigma_\alpha(\tau) = \tau$, $\sigma_\alpha(E) = \eta$, allora ciò accade per ogni altro α tale che $\eta \subset \mathrm{Im}(\alpha)$.

Proposizione 16.7. Ogni $\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$ è chiuso (con A di cardinalità qualsiasi).

Dimostrazione. $\sigma_\beta^{-1}(\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)}))$ è unione di facce di $\Delta_{n(\beta)}$ è se c'è una faccia ci sono le sue facce (ciò è vero per σ_α). □

Definiamo le catene come il gruppo abeliano libero

$$C_n(X) = \langle \sigma_\alpha \mid n(\alpha) = n \rangle$$

con

$$\partial_n = C_n(X) \to C_{n-1}(X) \qquad \partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \sigma_\alpha \circ \varphi_i^{(n)}$$

Si verifica che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, e quindi è ben definita un'omologia $H_n^\Delta(X, Y)$, e che per (K, L) coppia di comploessi simpliciali finiti, $H_n^\Delta(|K|, |L|) \cong H_n(K, L)$, dove l'isomorfismo è canonico. Per vedere questo non serve nemmeno passare alla verifica degli assiomi dati in 15.2, scelto un ordinamento totale dei vertici di K si sceglie $\tilde{\sigma} \colon \Delta_n \to \sigma$ che rispetti l'orientazione.

[42] Nel solito quadrato quozientato.

[43] La dimostrazione si fa suddividendo.

17 19/11

17.1 Complessi simpliciali astratti

Definizione 17.1. Un *complesso simpliciale astratto* è una coppia $K = (K^{[0]}, \mathcal{F})$, dove $K^{[0]}$ è un insieme e $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(K^{[0]})$ tale che

- Ogni $\sigma \in \mathcal{F}$ è finito
- $\forall v \in K^{[0]}\ \{v\} \in \mathcal{F}$
- $\forall \sigma \in \mathcal{F}\ \forall \tau \subset \sigma\ \tau \in \mathcal{F}$

Poniamo inoltre

$$K^{[n]} = \{\sigma \in \mathcal{F} \mid \#\sigma = n+1\} \qquad K^{(n)} = \bigcup_{i \leq n} K^{[n]}$$

Definizione 17.2. La *realizzazione geometrica* $|K|$ di un complesso simpliciale astratto K è l'insieme delle funzioni $\alpha \colon K^{[0]} \to [0,1]$ tali che

- $\left\{v \in K^{[0]} \mid \alpha(v) \neq 0\right\} \in \mathcal{F}$
- $\sum_{v \in K^{[0]}} \alpha(v) = 1$

  Mettiamo su $|K|$ una distanza

$$d(\alpha, \beta) = \left(\sum_{v \in K^{[0]}} (\alpha(v) - \beta(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e come topologia non quella indotta da d ma quella *debole*, cioè

- Su ogni $|\sigma|$ per $\sigma \in \mathcal{F}$ metto la topologia indotta da d (chiamo ancora σ il sottocomplesso $\{\tau \subset \sigma\}$
- Impongo che $\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathcal{F}\}$ sia un ricoprimento fondamentale.

Proposizione 17.3. Se $K \subset \mathbb{R}^N$ è un complesso simpliciale finito, sia $\tilde{K}$ l'associato complesso simpliciale astratto (cioè $\tilde{K}^{[0]} = F^{[0]}$ e $\mathcal{F} = \left\{\sigma^{[0]} \mid \sigma \in K\right\}$). Allora la mappa $\left|\tilde{K}\right| \to |K|$ che associa $\alpha \mapsto \sum_{v \in K^{[0]}} \alpha(v) \cdot v$ è un omeomorfismo.

Dimostrazione. L'inversa è data da: se $p \in |K|$, $p \in \operatorname{int}(\sigma)$ e $\sigma = (w_0, \ldots, w_m)$, $p = (t_0 w_0 + \ldots, +t_m w_m)$ (con $t_i > 0$), mando

$$p \mapsto \left(v \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \in \{w_0, \ldots, w_m\} \\ t_i & \text{se } v = w_i \end{cases} \right)$$

Sia in $|K|$ sia in $\left|\tilde{K}\right|$ i simplessi sono un ricoprimento chiuso finito (quindi fondamentale) e si vede che $|\tilde{\sigma}| \to |\sigma|$ è un omeomorfismo. $\square$

Proposizione 17.4. Per ogni complesso simpliciale K, la sua realizzazione geometrica $|W|$ è T4[44]

Dimostrazione. I punti sono chiusi perché $|\sigma| \cong D^n$ e in D^n i punti sono chiusi e l'insieme dei $|\sigma|$ ricopre. Per provare che è T4 basta vedere che per ogni chiuso $C \subset |K|$ e $f\colon C \to [0,1]$ continua esiste un'estensione continua a K (questo è sufficiente perché se A, B sono chiusi disgiunti sia $C = A \cup B$, $f\colon C \to [0,1]$ che vale 0 su A e 1 su $B \dots$). Basta definire l'estensione di f ricorsivamente su $K^{(n)}$. Per passare da $K^{(n)}$ a $K^{(n+1)}$, tenendo conto che la topologia è quella debole, basta estendere f un simplesso alla volta: abbiamo f già definita su ∂D^n e su un chiuso $C \subset D^n$, quindi l'estensione esiste. $\square$

Proposizione 17.5. Sia K un complesso simpliciale astratto. Se $C \subset |K|$ è compatto interseca un numero finito di simplessi.

Dimostrazione. Se K incontra un simplesso, incontra una faccia nella parte interna, quindi basta mostrarlo per le parti interne. Per ogni σ tale che $C \cap \operatorname{int}(\sigma) \neq \emptyset$ scelgo $p_\sigma \in C \cap \operatorname{int}(\sigma)$. Prendiamo poi come D la collezione di tutti i p_σ. Poiché ogni τ ha un numero finito di facce, $D \cap \tau$ è finito, e quindi tutti i punti di D sono aperti per la topologia indotta da $|\tau|$ su D. Per definizione di topologia debole, la topologia indotta su D da K è discreta. Dato che $D \subset C$ con C compatto, è finito[45]. $\square$

Corollario 17.6. $|K|$ è compatto se e solo se K è finito.

Definizione 17.7. $\varphi\colon K \to H$ è una mappa simpliciale se $\varphi\colon k^{[0]} \to H^{[0]}$ e $\varphi(\sigma \in H$ per ogni σ in K. Tale φ induce $|\varphi| : |K| \to |H|$

$$(|\varphi|\,\alpha)(\underbrace{w}_{\in H^{[0]}}) = \sum_{\substack{v \in K^{[0]} \\ \varphi(v) = w}} \alpha(v)$$

Per i complessi concreti è la solita definizione (disegno).

Diamo ora l'omologia per questi complessi. Su ogni $\sigma \in K^{[n]}$ si fissa un ordine a meno di permutazioni pari (per $n = 0$ scelgo il segno $+$). Definisco

$$C_n(K) = \langle K^{[n]} \rangle$$

(il gruppo abeliano libero generato da $K^{[n]}$). Le mappe di bordo sono

$$\partial_n \underbrace{\sigma}_{\in K^{[n]}} = \sum_{\substack{\tau \in K^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

[44] Intendiamo T1+T4.

[45] Sottoinsiemi discreti chiusi di compatti sono finiti.

dove $\varepsilon(\sigma, \tau)$ è così definito: scelgo $(v_0, \dots, v_n)$ ordine positivo di σ; suppongo $\tau = \{v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n\}$ e pongo

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = (-1)^i \cdot \begin{cases} +1 & \text{se } (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \text{ è pari} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si dimostra per via algebrica che questa è una buona definizione: bisogna provare che se η è una permutazione pari e $i \in n+1$, allora la permutazione β ottenuta rinumerando con $0, \dots, n-1$

$$\eta(0), \dots, \widehat{\eta(i)}, \dots, \eta(n)$$

$$(-1)^{\eta(i)-i} \cdot \operatorname{sgn}(\beta) = +1$$

Esercizio 17.8. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Quindi posso definire l'omologia $H_n(K)$ alla solita maniera. La definizione è ovviamente quella già vista per K finito. Per l'escissione bisogna definire un sottocomplesso come un'unione *chiusa* di simplessi.

Questa definizione è interessante perché non solo aumenta la gamma di spazi trattabili, ma facilita il calcolo anche nel caso di complessi simpliciali finiti.

17.2 cw-complessi e loro omologia

Definizione 17.9. L'*attaccamento di una n-cella a uno spazio X* è definito prendendo

$$g\colon \underbrace{S^{n-1}}_{=\partial D^n} \to X$$

e defininendo

$$X \cup_g D^n = {X \sqcup D^n}\big/{y \sim g(y)}$$

Notiamo che g può non essere iniettiva.

Esempio 17.10. Se $g\colon S^{n-1} \to \{p\}$ e prendiamo $\{p\} \cup_g D^n$, sto collassando il bordo di D^n a un solo punto, quindi ottengo ${D^n}\big/{S^{n-1}} \cong S^n$.

Definizione 17.11. Un CW-*complesso* (*complesso cellulare*) è uno spazio X ricorsivamente ottenuto da $X^{(0)}$ discreto dove $X^{(n)}$ è ottenuta da $X^{(n-1)}$ attaccando n-celle simultaneamente, cioè ho delle $g_\alpha^{(n)}\colon S^{n-1} \to X^{(n-1)}$, per $\alpha \in A_n$ (non necessariamente finito) e

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \bigcup_{\alpha \in A_n} \cup_{g_\alpha^{(n)}} D^n$$

con la topologia debole: $\left\{X^{(n)} \mid n \geq 0\right\}$ è un ricoprimento fondamentale.

Osserviamo che K è un complesso simpliciale (anche non finito), allora $|K|$ ha una naturale struttura di CW-complesso. Per ogni $\sigma \in K^{[n]}$ ho $g_\sigma \colon \partial D^n \to \left|K^{[n-1]}\right|$ omeomorfismo tra ∂D^n e $\partial\sigma$. realizzando D^n come Δ_n posso prendere un omeomorfismo simpliciale.

Inoltre, se X è un CW-complesso e ogni $g_\alpha^{(n)}$ è simpliciale, allora X ha una struttura di complesso simpliciale (suddividendo molto).

$g_\alpha^{(n)} \colon S^{n-1} \to X^{(n-1)}$ si estende a $G_\alpha^{(n)} \colon D^n \to X^{(n)}$ e $G_\alpha^{(n)}{}_{|\mathrm{int}(D^n)}$ è un omeomorfismo sull'immagine.

Definiamo ora l'omologia cellulare di un CW-complesso X. Prendiamo

$$C_n(X) = \langle g_\alpha^{(n)} \mid \alpha \in A_n$$

il gruppo abeliano libero generato dalle n-celle. Le mappe di bordo sono

$$\partial_n g_\alpha^{(n)} = \sum_{\beta \in A_{n-1}} d(g_\alpha^{(n)}, g_\beta^{(n-1)}) \cdot g_\beta^{(n-1)}$$

per $n = 0$ abbiamo $\partial_0 = 0$, mentre per $n = 1$ definiamo $\partial_1(g_\alpha^{(1)}) = +g_\alpha^{(1)}(+1) - g_\alpha^{(1)}(-1)$.

$$\partial_1(g_\alpha^{(1)}) \colon \partial \underbrace{D^1}_{=\{\pm 1\}} \to X^{[0]}$$

Per $n > 1$ chiamo $Y_\alpha^{(n-1)} = X^{(n-1)} \setminus G_\alpha^{(n-1)}(\mathrm{int}(D^{n-1}))$. Allora trovo $\overline{G_\alpha^{(n-1)}}$ omeomorfismo tale che

$$\begin{tikzcd}
D^{n-1} \arrow[r, "G_\alpha^{(n-1)}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X^{[n-1]} \arrow[d, "\pi_\alpha^{(n-1)}"] \\
D^{n-1} \diagup S^{n-2} \arrow[r, "\overline{G_\alpha^{(n-1)}}"] & X^{(n-1)} \diagup Y_n^{(n-1)}
\end{tikzcd}$$

Inoltre ho l'omeomorfismo naturale $D^{n-1} \diagup S^{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} S^{n-1}$ che associa

$$D^{n-1} \ni x \mapsto y = \frac{x}{1 - \|x\|} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Allora pongo

$$d(g_\beta^{(n)}, g_\alpha^{(n-1)}) = \deg(S^{n-1} \xrightarrow{g_\beta^{[n]}} X^{(n-1)} \xrightarrow{\pi_\alpha^{(n-1)}} X^{(n-1)} \diagup Y_\alpha^{(n-1)} \xrightarrow{\overline{G_\alpha^{(n-1)}}^{-1}} D^{n-1} \diagup S^{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} S^{n-1})$$

Il fatto di parlare di grado usa il fatto che H_{n-1} è già definito su S^{n-1} e vale $\mathbb{Z}$.

Teorema 17.12. $\partial^{\text{CW}}_{n-1} \circ \partial^{\text{CW}}_n = 0$

Quindi è definito H^{CW}_n.

Esempio 17.13. Se Σ è una superficie, $H_2(\Sigma)$ è $\mathbb{Z}$ se Σ è orientabile, 0 altrimenti (disegni).

Esempio 17.14. Prendiamo $\mathbb{RP}^3 = {D^3}/{x \sim -x}$ e realizziamolo come CW-complesso. Bastano una 0-cella P, una 1-cella α, una 2-cella R e una 3-cella B (disegni)

Abbiamo $\partial_0 P = 0$, $\partial_1 \alpha = P - P = 0$, $\partial_2 R = \alpha + \alpha = 2\alpha$, $\partial_3 B = R - R = 0$. Dunque $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = {\mathbb{Z}}/{2\mathbb{Z}}$, $H_2 = 0$ e $H_3 = \mathbb{Z}$. Questo è molto più veloce che mettere una struttura simpliciale sul proiettivo tridimensionale.

Esempio 17.15. $H_n(S^m)$ segue dal fatto che S^m si può realizzare con una 0 cella ed una m-cella.

In realtà questo è un imbroglio perché abbiamo usato l'omologia di S^n per definire l'omologia cellulare.

18 21/11

Ancora da TEXare.

19 26/11

19.1 Numero di Lefschetz

Questo numero è in un certo senso un'estensione della carrateristica di Eulero. Abbiamo visto che possiamo definire

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{rank}(H_i(X))$$

e che questo coincide con

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \# K^{[i]}$$

Proposizione 19.1. Sia $C = \{(C_n, \delta_n)\}$ un complesso di catene di $\mathbb{F}$-spazi vettoriali e $H_n(C)$ la sua omologia. Sia $\varphi \colon C \to C$ una mappa fra complessi di catene e $\varphi^* \colon H(C) \to H(C)$ la mappa indotta. Allora

$$\sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{tr} \varphi_i = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi^*_i)$$

Dimostrazione. Per ogni i abbiamo $B_i \subset Z_i \subset C_i$. Scelgo $\mathscr{B}_i$, $\mathscr{H}_i$, $\mathscr{K}_i$ in modo che la prima sia una base di B_i, l'unione delle prime due base di Z_i e l'unione di tutte e tre base di C_i in maniera che $\partial_i \mathscr{K}_i = \mathscr{B}_{i-1}$ (parto da $\mathscr{B}_0$ base di B_0, estendo a $\mathscr{B}_0, \mathscr{H}_0$ base di $Z_0 = C_0$, sollevo $\mathscr{B}_0$ a $\mathscr{K}_1 \subset C_1$, sceglo $\mathscr{B}_1$ base di B_1, completo a base di $\mathscr{B}_1, \mathscr{H}_1$ base di Z_1, ...Per costruzione $\mathscr{B}_1, \mathscr{H}_1, \mathscr{K}_1$ è base di C_1 e procedo). Noto che $\mathscr{H}_i$ si proietta ad una base $\bar{\mathscr{H}_i}$ di H_i. Poiché $\varphi \colon C \to C$ è una mappa fra complessi di catene ho che $\varphi(B_i) \subset B_i$ e $\varphi(Z_i) \subset Z_i$. Dunque la matrice che rappresenta φ_i rispetto alla base $(\mathscr{B}_i, \mathscr{H}_i, \mathscr{K}_i)$ sia in partenza che in arrivo è triangolare superiore a blocchi

$$[\varphi_i]^{(\mathscr{B}_i,\mathscr{H}_i,\mathscr{K}_i)}_{(\mathscr{B}_i,\mathscr{H}_i,\mathscr{K}_i)} \begin{pmatrix} M_i & X_i & Y_i \\ 0 & N_i & W_i \\ 0 & 0 & P_i \end{pmatrix}$$

e $[\varphi_i^*]^{\bar{\mathscr{H}_i}}_{\bar{\mathscr{H}_i}} = N_i$. So che $\varphi_{i-1} \circ \partial_i = \partial_i = \partial_i \circ \varphi_i$ e $\partial_i \mathscr{K}_i = \mathscr{B}_{i-1}$. Per definizione di matrice associata $[\varphi_i]^{\mathscr{B}_i}_{\mathscr{B}_i} = M_i$ significa $\varphi_i \cdot \mathscr{B}_i = \mathscr{B}_i \cdot M_i$. Analogamente

$$\varphi_i \cdot \mathscr{K}_i = \mathscr{B}_i \cdot Y_i + \mathscr{H}_i \cdot W_i + \mathscr{K}_i \cdot P_i$$

e quindi si ha

$$\partial_i \cdot \varphi_i \cdot \mathscr{K}_i = \varphi_{i-1} \cdot \partial_i \cdot \mathscr{K}_i = \varphi_{i-1} \cdot \mathscr{B}_{i-1} = \mathscr{B}_{i-1} \cdot M_{i-1}$$

sostituendo si ha

$$\partial_i \cdot \varphi_i \cdot \mathscr{K}_i = \partial_i(\mathscr{B}_i Y_i + \mathscr{H}_i \cdot W_i + \mathscr{K}_i \cdot P_i) = 0 + 0 + \mathscr{B}_i \cdot P_i$$

e quindi $P_i = M_i$. Allora

$$\sum (-1)^1 \operatorname{tr}(\varphi_i) = \sum (-1)^i (\operatorname{tr} M_i + \operatorname{tr} N_i + \operatorname{tr} P_i) = \sum (-1)^i \operatorname{tr} N_i = \operatorname{tr} \varphi_i^*$$

□

Definizione 19.2. Il *numero di Lefschetz* di $\varphi \colon C \to C$ è

$$\lambda(phi) = \sum (-1)^i \operatorname{tr} \varphi_i = \sum (-1)^i \operatorname{tr}(\varphi_i^*)$$

Osserviamo che $\chi(C) = \sum (-1)^i \dim H_i(C)$, e quindi $\chi(C) = \lambda(C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C)$, infatti $\operatorname{tr}(C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C) = \dim C_i$. Se $\{(C_n, \partial_n)\}$ è un complesso di gruppi abeliani e $\varphi \colon C \to C$ è una mappa fra complessi di catene, possiamo definire

$$\operatorname{tr}(\varphi_i) = \operatorname{tr}(\varphi_i \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}} \colon C_i \otimes \mathbb{Q} \to C_i \otimes \mathbb{Q})$$

Per φ_i^* non è così ovvio. Un'idea è definire

$$\operatorname{tr}(\varphi_i^*) = \operatorname{tr}(\overline{\varphi_i^*} \mid H_i \otimes \mathbb{Q} \circlearrowleft)$$

oppure possiamo definire

$$\mathrm{tr}(\varphi_i^*) = \mathrm{tr}(\varphi_i^{*\mathbb{Q}} \mid H_i^{\mathbb{Q}} \circlearrowleft \ \text{con } H_i^{\mathbb{Q}} = H_i(C \otimes \mathbb{Q}))$$

In realtà le definizioni coincidono perché $H_i^{\mathbb{Q}}$ è canonicamente isomorfo ad $H_i \otimes \mathbb{Q}$. Dunque posso definire $\lambda(\varphi)$ anche per gruppi abeliani e vale $\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$.

Definizione 19.3. Se $X = |K|$ e $f\colon X \to X$ è continua posso definire $\lambda(f)$ come $\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi_*)$ con $\varphi\colon K_1 \to K_1$ approssimazione simpliciale di f.

Questa è una buona definizione perché $\lambda(\varphi_*)$ è ben definita e non cambia a meno di omotopia di φ.

Teorema 19.4 (del punto fisso di Lefschetz)**.** Se $X = |K|$ con K complesso simplicicale finito e $f\colon X \to X$ è continua con $\lambda(f) \neq 0$, allora f ha un punto fisso.

Osserviamo che l'insieme dei punti fissi $\mathrm{Fix}(f)$ cambia omotopando f, mentre $\lambda(f)$ no. Il fatto che $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ quindi comunque non cambia a meno di omotopia.

Servirà del lavoro preliminare per dimostrare questo Teorema.

Lemma 19.5. Se $f\colon K \to K$ è simpliciale, sostituendo K con K' (la prima suddivisione baricentrica) si ha che $\mathrm{Fix}(f)$ è un sottocomplesso.

Dimostrazione. Basta provare che per qualunque $\sigma \in K$ si ha che $\mathrm{Fix}(f) \cap \sigma$ è un sottocomplesso di K'. Quindi guardiamo $f\colon \sigma \to K$. Se $v \in \sigma^{[0]}$ e $f(v) \notin \sigma^{[0]}$, allora $\mathrm{Fix} \subset \tau$ dove τ è la faccia di σ opposta a v. Dunque al posto di σ prendo τ e itero finché non trovo $f(\sigma) \subset \sigma$. Se $f(\sigma)$ è una faccia propria di σ ho che $\mathrm{Fix}(f) \subset f(\sigma)$. Sostituisco σ con $f(\sigma)$ e itero finché non ottengo $f(\sigma) = \sigma$. Dunque f è indotta da una permutazione η dei vertici di σ. Se $\sigma = Conv(v_0, \dots, v_n)$, allora

$$\mathrm{Fix}(f) = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \;\middle|\; t_i \geq 0, \sum t_i = 1, t_{\eta(i)} = t_i \right\}$$

Per concludere basta vedere che ogni equazione $t_i = t_j$ definisce un sottocomplesso di σ' (disegno). Si mostra per induzione su $\dim(\sigma)$ usando che, posto $L_{ij}(\sigma) = \{p \in \sigma \mid t_i(p) = t_j(p)\}$,

1. $L_{ij}(\sigma)$ è il cono dal baricentro di σ su $\bigcup_{\tau \subset \partial\sigma} L_{ij}(\tau)$.
2. "$L_{ij}(\tau)$ è τ se v_i e v_j non sono vertici di τ; è $L_{ij}(\tau)$ altrimenti." (Le virgolette ci sono perché così non è che si capisca molto, ci sarebbe da sistemare i dettagli.)

□

Lemma 19.6. Se $\mathrm{Fix}(f)$ è un sottocomplesso di K ($f\colon K \to K$ simpliciale) e $f(\sigma) = \sigma$, allora $\sigma \subset \mathrm{Fix}(f)$.

Dimostrazione. Il baricentro di σ è fisso e il simplesso che lo contiene al suo interno e proprio σ, quindi σ è fisso. $\square$

Lemma 19.7. Se $f\colon K \to K$ è simpliciale e $\mathrm{Fix}(f)$ è un sottocomplesso, allora $\lambda(f^*) = \chi(\mathrm{Fix}(f))$.

Dunque se $\lambda(f^*) \neq \emptyset$ allora $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. $\lambda(f^*)$ posso calcolarlo al livello delle catene, e a questo livello sulle diagonali ho entrata non nulla per ogni $\sigma \in K$ tale che $f(\sigma) = +\sigma$ ($f_{|\sigma} = \mathrm{Id}$). Per f_i sulal diagonale ho tante entrate $+1$ quanti $\sigma \in K^{[n]}$ sono in $\mathrm{Fix}(f)$, e da qui segue la tesi. $\square$

Dimostriamo ora il Teorema.

Dimostrazione. Sia $f\colon |K| \to |K|$ continua con $\lambda(f) \neq 0$. Sia per assurdo $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$; posso trovare $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in |K|$ si abbia $d(x, f(x)) \geq \varepsilon$. Prendo K_1 suddivisione con $\mathrm{maxdiam}(K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, e K_2 suddivisione con $g\colon K_2 \to K_1$ approssimazione simpliciale di f, dunque per ogni $x \in |K|$ si ha $d(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Scorciatoia[46] (sbagliata): $\lambda(g) = \lambda(f) \neq 0$, quindi per il Lemma precedente g ha punti fissi, ma questo è assurdo perché $d(x, g(x)) \geq d(f(x), x) - d(g(x), f(x)) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Purtroppo questo non funziona perché non possiamo applicare il Lemma, dato che g è simpliciale $K_2 \to K_1$, non $K_2 \to K_2$. Comunque è vero che λ è invariante a meno di omotopia.

Ora concludiamo la dimostrazione: sia $\alpha\colon C(K_1) \to C(K_2)$ espressione di ogni simplesso di K_1 come somma di simplessi di K_2, che induce l'isomorfismo canonico in omologia. Inoltre ho $g^*\colon C(K_2) \to C(K_1)$, e quindi $\alpha \circ g^*\colon C(K_2) \to C(K_2)$. $\lambda(\alpha \circ g^*) = \lambda(g) = \lambda(f) \neq 0$. Dunque deve esistere almeno un simplesso σ di K_2 che ha coefficiente non nullo in $\alpha(g(\sigma))$. Ma allora $\sigma \subset g(\sigma)$ e otteniamo un assurdo come prima. $\square$

19.2 Omologia singolare

Dalla definizione che daremo non è chiaro che quest'omologia (che è più generale) sia calcolabile. In realtà lo è a posteriori dopo aver visto che è equivalente a quella simpliciale.

Definiamo $\Delta_n = \mathrm{Conv}(e_0, \ldots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\varphi_1^{(n)}\colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ la "parametrizzazione ovvia tramite le Δ_{n-1} della faccia di Δ_n opposta ad e_i", cioè

$$(e_0, \ldots, e_{n-1}) \mapsto (e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n)$$

[46] E non è chiaro cosa abbiamo visto a fare l'ultimo Lemma, visto che dopo non si usa.

cioè

$$\varphi_i^{(n)}(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, n$$

Chiamo n-simplesso sinbolare in X spazio topologico una $\sigma\colon \Delta_n \to X$ continua. Inoltre definisco le n-catene singolari $C_n^{\text{sing}}(X)$ come il gruppo abeliano libero generato dagli n-simplessi singolari

$$C_n^{\text{sing}}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \sigma_i \mid p_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i\colon \Delta_i \to X \text{ continua} \right\}$$

e l'operatore di bordo

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \varphi_i^{(n)}$$

Se $X = |K|$ e σ è una parametrizzazione PL di un n-simplesso in K, allora $\partial_n \sigma$ dà una parametrizzazione di $\partial \tau$. Segue facilmente che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Dunque ho $H_n^{\text{sing}}(X)$, che però vista così non è chiaro come calcolare.

Osserviamo che $H_n^{\text{sing}}(X) \cong H_n^{\Delta}(S(X))$, dove

$$S(X) = \bigsqcup_{\substack{\sigma\colon \Delta_n \to X \\ n \in \mathbb{Z}}} \Delta_{n(\sigma)}^{(\sigma)} \Big/ \sim$$

dove $\sim$ è generata da $p \sim q$ se $p \in \Delta_{n(\tau)}^{\tau}$, $q \in \Delta_{n(\sigma)}^{\sigma}$ e $\tau = \sigma \circ \varphi_i^{(n(\sigma^i))}$ e $q = \varphi_i^{(n(\sigma))}(p)$.

Sia $z \in Z_n^{\text{sing}}(X)$. Abbiamo $z = \sum_{i=1}^{k} p_i \sigma_i$, dove $\sigma_i\colon \Delta_n \to X$ conitnua. Sostituendo $p_i \cdot \sigma_i$ con $\pm(\underbrace{\sigma_i + \ldots + \sigma_i}_{|p_i| \text{ volte}})$ possiamo supporre $p_i = \pm 1$. Ora $\partial z = 0$ significa che per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ e per ogni $j \in n+1$ esistono $i' \in \{i, \ldots, k\}$ e $j' \in n+1$ tali che

$$\sigma_i \circ \varphi_j^{(n)} = \sigma_{i'} \circ \varphi_{j'}^{(n)} \tag{6}$$

e $p_i \cdot (-1)^j + p_{i'} \cdot (-1)^{j'} = 0$. Posso prendere $\bigsqcup_{i=1}^{k} \Delta_n$ mettendo su $\Delta_n^{(i)}$ l'orientazione $(-1)^i$ volte quella canonica e identificare tra loro a coppie le $n-1$ facce usando la relazione 6. Tali identificazioni invertono le orientazioni indotte e $\bigsqcup_{i=0}^{k} \sigma_i$ passa al quoziente.

Dunque una n-catena fornisce una mappa continua da uno spazio del tipo

$$\bigsqcup n\text{-simplessi orientati} \Big/ \text{identificazioni a coppie delle } n-1\text{-facce che invertono l'orientazione}$$

a X. Lo spazio in partenza è "quasi" una n-varietà orientata, con singolarità solo in codimensione almeno 2. In realtà per $n = 2$ (disegno) e

Esercizio 19.8. Le singolarità sono in codimensione ≥ 3.

Dunque un 1-ciclo posso vederlo come una mappa da un'unione disgiunta di circonferenze in X, un 2-ciclo come una mappa da una superficie orientata in X e in generale un n-ciclo è una mappa da M a X, dove M è una n-varietà orientata con singolarità in codimensione almeno 3.

20 28/11

Analogamente a quanto fatto l'ultima volta, possiamo vedere che $z \in Z_n$ è in B_n se e solo se la mappa $M^{(n)} \to X$ si estende a $W^{(n+1)} \to X$ con $\partial W = M$. Questo è vero, però anche W non è una "vera" varietà, ma ha singolarità. Questo è vero in senso stretto per $n = 2$ per quanto visto l'altra volta (disegno). Dunque un laccio è nullo in omologia se si estende ad una superficie di cui il laccio è bordo. In omotopia avevamo che un laccio era nullo se si estendeva al disco.

20.1 Proprietà dell'omologia singolare

Alcune cose sono fatte in dettaglio sull'Hatcher, quindi non vedremo i dettagli

Proposizione 20.1. L'omologia singolare ha le seguenti proprietà:

1. $H_n(X_1 \sqcup X_2) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$. Più in generale
$$H_n(X) \cong \bigoplus_{X_\alpha \text{componente connessa}} H_n(X_\alpha)$$

2. $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ se X è connesso per archi.

3. $H_n(\{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

4. Omologia ridotta:
$$\tilde{H}_n(X) = \begin{cases} H_n(X) & n > 0 \\ \operatorname{Ker}\left(H_0(X) \ni [\sum n_i x_i] \mapsto \sum n_i \in \mathbb{Z}\right) \end{cases}$$
è l'omologia del complesso di catene aumentato ottenuto da $\{(C_n, \partial_n)\}$ ponendo $C_{-1} = \mathbb{Z}$ e $\partial_0 \left(\sum n_i x_i\right) = \sum n_i$.

5. Se $f\colon X \to Y$ è continua, allora $f_\#\colon C(X) \to C(Y)$ definita come $f_{\# n}(\sigma) = f \circ \sigma$
$$\Delta_n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

Dimostrazione. 3. Prendo

$$C \ldots \to \overset{3}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \overset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \to \overset{-1}{0}$$

E i quozienti tornano come devono tornare.

5. È immediamo vedere che $f_\#$ è una mappa tra complessi di catene

$$\sigma_n^Y \circ f_{\# n} = f_{\#(n-1)} \circ \partial_n^X$$

e quindi induce $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$.

□

Teorema 20.2. Se $f_{0*} \simeq f_{1*}$, allora $f_{0*} = f_{1*}$.

Per dimostrarlo bisogno introdurre un po' di concetti.

Definizione 20.3. Siano C, D complessi di catene e $\varphi, \psi\colon C \to D$ mappe tra complessi di catene. Dico che $\varphi \simeq \psi$ (dico che sono omotope) se per ogni n esiste $P_n\colon C_n \to D_{n+1}$ tale che

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^C"] \arrow[d, "\varphi_{n+1} - \psi_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n^C"] \arrow[d, "\varphi_n - \psi_n"'] \arrow[dl, "P_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}"] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^D"] & D_n \arrow[r, "\partial_n^C"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

vale $\varphi_n - \psi_n = P_{n-1} \circ \partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ P_n$.

Lemma 20.4. Se $\varphi \simeq \psi$, allora $\varphi_* = \psi_*$.

Dimostrazione. Sia $z \in Z_n(C)$. Allora

$$\varphi_{n*}([z]) - \psi_{n*}([z]) = [\varphi_n(z)] - [\psi_n(z)] = [(\varphi_n - \psi_n)(z)] = [P_{n-1} \circ \partial_n^C + \ldots] = 0$$

□

Per provare il Teorema mostriamo che $f_{0\#} \simeq f_{1\#}$. Come ipotesi abbiamo l'esistenza di $F\colon X \times [0,1] \to Y$ tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$. L'idea è cercare $P_n\colon C_n(X) \to C_{n+1}(T)$ tale che $f_{1\#} - f_{0\#} = \partial_{n+1}^Y \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n^X$; esprimere $\Delta_n \times [0,1]$ come unione di $n+1$ $(n+1)$-simplessi parametrizzati da $\psi_i^{(n)}$, $i = 0, \ldots, n+1$ come (disegno) Facendo $\sum (-1)^1 \psi^{(n)}$

le facce interne e $\Delta_n \times [0,1]$ si cancellano: resta $\Delta_n \times \{1\} - \Delta_n \times \{0\} + \partial\Delta_n \times [0,1]$. Porremo

$$P_n(\sigma) = F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \cdot \sum (-1)^i \psi_i^{(n)}$$

da cui

$$\partial_{n+1}^Y P_n(\sigma) = f_{1\#}(\sigma) - f_{0\#}(\sigma) + P_{n-1}(\partial_n^X \sigma)$$

Nei dettagli:

Dimostrazione. $\partial_n \sigma 0 \sum_{i=0}^n (-1)^1 \sigma \circ \varphi_i^{(n)}$

$$\varphi_i^{(n)} \colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n, \varphi_i^{(n)}(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \leq i \end{cases}$$

che è la parametrizzazione ovvia della faccia di Δ_n opposta ad e_i. Ora definisco

$$\psi_i^{(n)} \colon \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1] \qquad i = 0, \ldots, n$$

come

$$\psi_i^{(n)}(e_j) = \begin{cases} e_j^{(0)} & j \leq n-1 \\ e_{j-1}^{(1)} & j > n-1 \end{cases}$$

Cioè prendo tutti i vertici ad altezza 0 fino all'$(n-i)$-esimo, poi l'$(n-i)$-esimo ad altezza 1 e continuo ad altezza 1 (questa era la roba che stava nel disegno). Pongo

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1} F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ \psi_i^{(n)}$$

(l'Hatcher mette -1 invece di $(-1)^{n+1}$, ma dovrebbe servire, o forse no; andrebbe ricontrollato tutto). Claim: $P_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ P_n = f_{1\#} - f_{0\#}$, da cui segue la tesi. Si ha

$$\psi_i^{(n)} \circ \varphi_{n-i}^{(n+1)} = \psi_{i+1}^{(n)} \circ \varphi_{n-i}^{(n+1)}$$

(informalmente, le facce di mezzo si cancellano facendo il bordo), perché $\varphi_{n-i}^{(n+1)}$ "salta" il vertice $n-i$, mentre $\psi_i^{(n)}$ ripete $n-1$ sia ad altezza 0 che 1 (dove prima erano tutti a 0 e dopo tutti ad 1), e $\psi_{i+1}^{(n)}$ fa lo stesso con $n-i-1$. Analogamente (per esercizio)

$$\psi_0^{(n)} \circ \varphi_{n+1}^{(n+1)} = \mathrm{Id}_{\Delta_n} \times \{0\}$$

e

$$\psi_n^{(n)} \circ \varphi_0^{(n+1)} = \mathrm{Id}_{\Delta_n} \times \{1\}$$

Informalmente, cioè, facendo il bordo restano le basi $\Delta_n \times \{1\} - \Delta_n \times set0$.

$$\partial^Y_{n+1}(P_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{n+1+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]} \circ \psi_i^{(n)} \psi_j^{(n+1)}$$

(disegno) Si trova

$$\partial^Y_{n+1}(P_n(\sigma)) = f_{1\#}(\sigma) - f_{0\#}(\sigma) + \sum_{\substack{i+j<n \\ i+j>n+1}} (-1)^{n+i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]} \circ \psi_i^{(n)} \circ \varphi_j^{(n+1)}$$

Devovedere che la somma è $P_{n-1}(\partial_n^X \sigma)$. Claim:

$$\psi_i^{(n)} \circ \varphi_j^{(n+1)} = \begin{cases} (\varphi_j^{(n)} \times \mathrm{Id}_{[0,1]} \circ \psi_i^{(n-1)} & i+j<n \\ \text{non ho fatto in tempo a copiare} & i+j \geq n \end{cases}$$

che segue dalle definizioni con un po' di conti. Dunque l'ultimo addendo è

$$\sum_{i+j<n} (-1)^{n+i+j} F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ (\varphi_j^{(n)} \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ \psi_i^{(n-1)} + \sum_{i+j>n+1} F \circ (\sigma \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ (\varphi_{j-1}^{(n)} \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ \psi_{i-1}^{(n-1}$$

ponendo $i = h+1$, $j = k+1$ e poi richiamando h "i" e chiamando k "j", trovo l'uguaglianza con

$$\sum_{i+j<n} (-1)^{n+i+j} F \circ ((\sigma \circ \varphi_j^{(n)}) \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ \psi_i^{(n-1)} + \sum_{i+j\geq n} (-1)^{n+i+j} F \circ ((\sigma \circ \varphi_j^{(n)}) \times \mathrm{Id}_{[0,1]}) \circ \psi_i^{(n-1)}$$

che è uguale a

$$P_{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \varphi_j^{(n)}\right) = P_{n-1}(\partial_n^X(\sigma))$$

$\square$

20.2 Omologia singolare relativa

Posso porre $C_n(X,A) = {C_n(X)}/{C_n(A)}$, che non è molto chiaro chi sia ma ha perfettamente senso e ne segue facilmente che, dato che $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A)$ per $\sigma \in C_n(A)$, abbiamo $\partial_n^{(X,A)} \colon C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ e $\partial_{n-1}^{(X,A)} \circ \partial_n^{(X,A)} = 0$, e quindi abbiamo gli $H_n(X,A)$. Sempre per costruzione abbiamo la successione esatta corta

$$0 \to C(A) \to C(X) \to C(X,A) \to 0$$

da cui abbiamo la successione esatta lunga per omologia singolare

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i^*} H_n(X) \xrightarrow{j^*} H_n(X,A) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

dove $i \colon A \hookrightarrow X$ e $j \colon (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ sono le inclusioni. Diamo ora un'interpretazione geometrica di d_n.

Proposizione 20.5. Posto

$$Z'_n(X,A) = \{z \in C_n(X) \mid \partial_n z \in C_{n-1}(A)\}$$

e

$$B'_n(X,A) = \{d + \partial_{n+1} e \mid d \in C_n(A), e \in C_{n+1}(X)\}$$

si ha $H_n(X,A) \cong {Z'_n(X,A)}\big/{B'_n(X,A)}$.

Usando ${Z'}/{B'}$ come definizione di $H_n(X,A)$, l'operatore $d_n\colon H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ è quello che mappa $[z] \mapsto [\partial z]$. Dimostriamo la Proposizione

Dimostrazione. Chiamo $q_n\colon C_n(X) \to C_n(X,A) = {C_n(X)}\big/{C_n(A)}$ la proiezione. Considero

$$\partial_n^{(X,A)}\colon C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A) \qquad \partial_n^{(X,A)}(q_n(c)) = q_{n-1}(\partial_n^X(c))$$

Definiamo $\psi_n\colon H'_n(X,A) \to H_n(X,A)$ come $[c]' \mapsto [q_n(c)]$. Vediamo che è ben definita è che è un ismorfismo. Per la buona definizione serve vedere che $\partial_n^{(X,A)} q_n(c) = 0$. Ma

$$\partial_n^{(X,A)} q_n(c) = q_{n-1}(\partial_n^X(c)) \in C_{n-1}(A)$$

e quindi è 0. Serve anche che se $c = d + \partial_{n+1}^X e$, con $d \in C_n(A)$, $e \in C_{n+1}(X)$, allora

$$[q_n(c)] = [q_n(d + \partial_{n+1}^X e)] = [\underbrace{q_n(d)}_{=0} + q_n(\partial_{n+1}^X(e))] = 0$$

Vediamo l'iniettività. Se $q_n(c) \in B_n(X,A)$, allora $q_n(c) = q_n(\partial_{n+1}^X(e))$, quindi $q_n(c - \partial_{n+1}^X e) = 0$, e dunque $c - \partial_{n+1}^x e = d \in C_n(A)$. Per la surgettività, se prendo una n-catena in (X,A), cioè $\partial_{n+1}^{(X,A)} q_n(c) = 0$, allora $q_{n-1}(\partial_n^X c) = 0$, e quindi $\partial_n^X c \in C_{n-1}(A)$. Questo vuol dire che $c \in Z'_n$ e $[q_n(c)]$ è l'immagine di $[c]'$. $\square$

Osserviamo che se $f_0, f_1\colon (X,A) \to (Y,B)$ e sono omotope come mappe $(X,A) \to (Y,B)$, allora $P_n^X\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ manda $C_n(A)$ in $C_{n+1}(B)$ e induce $P_n^{(X,A)}\colon C_n(X,A) \to C_{n+1}(Y,B)$, che prova che $f_{0\#} \simeq f_{1\#}$, dunque $f_{0*} = f_{1*}\colon H(X,A) \to H(Y,B)$.

20.3 Escissione

Ci manca ancora l'escissione. Nel caso topologico servono ipotesi più precise che nel caso simpliciale (dove chiedevamo che i "pezzi" fossero sottocomplessi).

Teorema 20.6. Sia X uno spazio topologico, $Z \subset A \subset X$ con $\bar{Z} \subset \mathrm{int}(A)$. Allora l'inclusione $(X \backslash Z, A \backslash Z) \hookrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo in omologia $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A)$.

Non facciamo in tempo a dimostrarlo oggi, ma l'idea del perché dall'escissione topologica segue quella simpliciale è prendere degli intorni regolari e usare anche l'omotopia.

21 03/12

La settimana prossima non c'è lezione il giovedì (12).

21.1 Escissione in omologia singolare

Vediamo la dimostrazione dell'ultimo Teorema enunciato l'ultima volta. Non vedremo tutti i dettagli, ci sono sull'Hatcher. In ogni caso segue dal Teorema che

Corollario 21.1. Nel caso dell'escissione simpliciale, se $A = U(T)$, $Z = T \setminus Y$, allora (X, A) si retrae per deformazione su (X, T) e $(W, A \setminus (T \setminus Y))$ si retrae per deformazione su (W, Y) (disegno). Inoltre $\overline{Z} \subset T \subset \mathrm{int}(A)$. Allora

$$H_n(X,T) \underbrace{\cong}_{\text{omotopia}} H_n(X,A) \underbrace{\cong}_{escissionesingolare} H_n(\underbrace{X \setminus (T \setminus Y)}_{W}, A\setminus(T\setminus Y)) \underbrace{\cong}_{\text{omotopia}} H_n(W,Y)$$

E quindi l'omologia singolare per complessi simpliciali coincide con quella simpliciale.

Proposizione 21.2. Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X e

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ \sum p_i \sigma_i \mid \forall i \exists U \in \mathcal{U} \ \mathrm{Im}(\sigma_i) \subset U \right\}$$

l'inclusione $i\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \to C_n(X)$ è un'equivalenza di omotopia nel senso dei complessi di catene, cioè esiste $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ tale che $\rho \circ i \simeq \mathrm{Id}_{C^{\mathcal{U}}(X)}$ e $i \circ \rho \simeq \mathrm{Id}_{C(X)}$, quindi esiste l'operatore "prisma" $C_n^{()}U \to C_{n+1}^{()}U$.

Osserviamo che la proposizione vale anche se $\mathcal{U}$ non è un ricoprimento aperto, ma le sue parti interne coprono.

Dimostrazione. La dimostrazione è in più passi

1. Suddivisione baricentrica: se $\tau = \mathrm{Conv}(w_0, \ldots, w_k)$ è un simplesso, pongo $\hat{\tau} = \frac{1}{k+1}(w_0, \ldots, w_k)$ (baricentro). Se σ è un simplesso $\sigma = (v_0, \ldots, v_n)$ chiamo *suddivisione baricentrica*

   $$\sigma' = \{\mathrm{Conv}(\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_k) \mid \sigma_0 \subset \ldots, \subset \sigma_k \text{ facce di } \sigma, \dim(\sigma_j) = j\}$$

   Ponendo il diametro di un complesso come il massimo diametro dei suoi simplessi, facciamo il seguente claim: $\mathrm{diam}(\sigma') \leq \frac{n}{n+1} \cdot \mathrm{diam}(\sigma)$.

Si mostra per induzione. Se $(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_k) \in \sigma'$, se $k < n$ è contenutonel bordo $\partial\sigma$ e posso applicare l'ipotesi induttiva e $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$. Altrimenti, se $k = n$, senza perdita di generalità posso supporre $\sigma_0 = v_0$, ed è facile vedere che $\mathrm{diam}(\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n) = \mathrm{dist}(v_0, \sigma_n)$. Ora pongo $p = \frac{1}{n}(v_1 + \ldots + v_n)$ (il baricentro della faccia opposta). Si ha

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \cdot v_0 + \frac{n}{n+1} \cdot p$$

e $v_0, \hat{\sigma}, p$ sono allineati, quindi

$$\mathrm{diam}(v_0, \dots, \hat{\sigma}) = d(v_0, \hat{\sigma}) = \frac{n}{n+1} d(v_0, p) \leq \frac{n}{n+1} \mathrm{diam}(\sigma)$$

Dunque $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(\sigma^{(k)}) = 0$.

2. Operatori:

   - $D_n = \sum_{i=0}^n \eta_i$, dove $\eta_i \colon \Delta_n \to \Delta_n$ ottenute esprimento Δ_n come unione dei coni su $\partial\Delta_n$ con vertice $\hat{\Delta}_n$.
   - $E_n = \sum \varepsilon_i$, dove $\varepsilon_i \colon \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ ottenute esprimento $\Delta_n \times [0,1]$ come unione dei coni su $(\Delta_n \times \{0\}) \cup (\partial\Delta_n \times [0,1])$ con vertice $\hat{\Delta}_n \times \{1\}$ e poi proiettando su Δ_n (disegno).
   - $S_n \colon C_n(X) \to C_n(X)$ data da $S_n(\sigma) = \sigma \circ D_n$.
   - $T_n \colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ definita come $T_n(\sigma) = \sigma \circ E_n$.

   È facile vedere che S è una mappa di catene e T è omotopia fra $\mathrm{Id}_{C_n(x)}$ e S_n. Dunque $\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{Id}_{C_n(X)} - S_n$. Ora considero l'iterata S_n^k e pongo

$$R_n^{(k)} = \sum_{h=0}^{k-1} T_n \circ S_n^h$$

   Questa è un'omotopia fra $\mathrm{Id}_{C_n(X)}$ ed S_n^k, perché

$$\partial_{n+1} \circ R_n^{(k)} + R_{n-1}^{(k)} \circ \partial_n = \partial_{n+1} \circ \sum_{h=0}^{k-1} T_n \circ S_n^h + \sum_{h=0}^{k-1} T_{n-1} \circ S_n^h \circ \partial_n$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} (\partial_{n+1} \circ T_n \circ S_n^h + T_{n-1} \circ \partial_n \circ S_n^h)$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} (\mathrm{Id}_{C_n(X)} - S_n) \circ S_n^h = \mathrm{Id}_{C_n(X)} - S_n^k$$

3. Conclusione: per ogni $\sigma \colon \Delta_n \to X$ sia $k(\sigma)$ il minimo intero tale che $S_n^{k(\sigma)} \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (esistenza: usare numero di Lebesgue di $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$). Definisco $R_n \colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ estendendo $R_n(\sigma) = R_n^{k(\sigma)}(\sigma)$. Ho

$$\partial_{n+1} \circ R_n^{(k(\sigma))} \sigma + R_{n-1}^{(k(\sigma))} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - S_n^{k(\sigma)}(\sigma)$$

sommo e sottraggo $R_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)$: trovo

$$\partial_{n+1} \circ R_n(\sigma) + R_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - \underbrace{(S_n^{k(\sigma)}\sigma + R_{n-1}^{(k(\sigma))} \circ \partial_n\sigma - R_{n-1} \circ \partial_n\sigma)}_{\rho_n(\sigma)}$$

È facile vedere che se $\tau \subset \sigma$ (nel senso che τ è σ ristretto ad una faccia di Δ_n), allora $k(\tau) \leq k(\sigma)$, da cui $\rho_n(\sigma) \in C_n\mathcal{U}(X)$, e abbiamo $\rho_n \colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Per definizione

$$\partial_{n+1} \circ R_n + R_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{Id}_{C_n(X)} - i_n \circ \rho_n$$

mentre $\rho_n \circ i_n = \mathrm{Id}_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$, e questa ρ_n è quella che ci dà l'omotopia.

□

Dimostriamo ora l'escissione

Dimostrazione. Sia $\overline{Z} \subset \mathrm{int}(A)$. Posto $B = X \setminus Z$, ciò equivale a $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$. Vogliamo mostrare che $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismi in omologia. Applico la Proposizione precedente a $\mathcal{U} = (A, B)$. Ora $C_n(A) = C_n^{\mathcal{U}}(A)$ e $C_n(B) = C_n^{\mathcal{U}}(B)$ e abbiamo $\partial_{n+1} \circ R_n + R_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{Id}_{C_n(X)} - i_n \circ \rho_n$ e $\rho_n \circ i_n = \mathrm{Id}_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$ e tutte le mappe coinvolte mandano $C_n(A)$ in $C_n(A)$, quindi posso quozientare rispetto a $C_n(A)$, da cui

$$\frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n(A)} \to \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

induce isomorfismi in omologia. Inoltre $C_n(A) \rightsquigarrow H_n(X, A)$, e

$$\frac{C_n(B)}{C_n(A \cap B)} \xrightarrow{\varphi} \frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n(A)}$$

è un isomorfismo:

$$\varphi(z + C_n(A \cap B)) = z + C_n(A)$$

Se $w \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$, allora $w = w_A + w_B$ rispettivamente in $C_n(A)$ e $C_n(B)$ e abbiamo $\varphi(w + C_n(A))?w_B + C_n(A \cap B)$. Dunque $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$ con mappe indotte dall'inclusione. □

21.2 Omologia con coefficienti in un gruppo

Finora abbiamo usato i coefficienti in $\mathbb{Z}$. Possiamo modificare qualsiasi teoria omologica ponendo

$$C_n(X, A; G) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} g_i\sigma_i \mid g_i \in G, \sigma_i \ n\text{-simplesso (o } n\text{-cella)} \right\}$$

questo è isomorfo a
$$C_n(X, A) \otimes G$$

Le mappe di bordo sono

$$\partial_n^G : C_n(X, A; G) \to C_{n-1}(X, A; G) \qquad \partial_n^G\left(\sum g_i\sigma_i\right) = \sum g_i(\partial_n\sigma)$$

ovvero ∂_n^G corrisponde a $\mathrm{Id}_G \otimes \partial_n$. Ne segue subito che $\partial_{n-1}^G \circ \partial_n^G = 0$. Dunque ho $H_n(X, A; G)$. Per come abbiamo definito le cose possiamo chiederci se
$$H_n(X, A; G) \cong H_n(X, A) \otimes G$$

La risponsta è no: possiamo prendere una realizzazione cellulare di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (disegno). Abbiamo $\partial_0 p = 0$, $\partial_1\alpha = 0$, $\partial_2 R = 2\alpha$. L'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}$ è $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_0 = \mathbb{Z}$ e il resto sono nulli. Se invece prendo i coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abbiamo $\partial_0^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} p = 0$, $\partial_1^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\alpha = 0$, $\partial_2^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} R = 0$. Si vede che $H_2 = H_1 = H_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Più in generale

Esempio 21.3. Se $M^{(n)}$ è una varietà non orientabile, $H_n(M) = 0$, mentre $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ed è canonicamente generato da $\sum_{\sigma \in K^{[n]}} \sigma$ dove $|K| = M$.

Osserviamo che se $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ sono varietà, è definito $\deg_2(f : M \to N) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Vedremo in seguito che

Teorema 21.4 (dei coefficienti universali)**.** $H_*(X, A)$ determina $H_*(X, A; G)$

(nel senso che tutta la successione determina tutta la successione).

Definizione 21.5. $G \otimes H$ è il gruppo generato dai singoli $g \otimes h$ con relazioni di bilinearità.

Osserviamo che $G \otimes \mathbb{Z} \cong G$, secondo la mappa $g \mapsto g \otimes 1$, e che $G \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong G/m \cdot G$, secondo $g \otimes [1] \mapsto [g]$. Inoltre $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/[k, h]\mathbb{Z}$, dove $[k, h]$ è il minimo comune multiplo di k e h.

Definizione 21.6. La *risoluzione libera* di G abeliano è una successione esatta
$$0 \to K \xrightarrow{i} F \to G \to 0$$

con F, K liberi[47]

(cioè realizzare G come quoziente di due gruppi liberi). Ricordiamo che F è libero se è isomorfo a $\mathbb{Z}^X$ per qualche X, e che sottogruppi liberi di gruppi liberi sono liberi.

[47] Si intende abeliani liberi.

Definizione 21.7. Se $0 \to K \xrightarrow{i} F \to A \to 0$ è una risoluzione libera di G e B è un gruppo abeliano, definiamo

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Ker}(i \otimes \mathrm{Id}_B)$$

dove

$$K \otimes B \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}_B} F \otimes B$$

È una buona definizione perché $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$.

Se $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ è esatta e F è libero, allora $A \otimes F \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{Id}_F} B \otimes F \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{Id}_F} C \otimes F$ è esatta, perché se $F = \mathbb{Z}$, si ha $G \otimes \mathbb{Z} = G$, dove $G \in \{A, B, C\}$, e quindi $\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} = \alpha$ e similmente per β. Altrimenti uso che $G \otimes (F_1 \oplus F_2) = (G \otimes F_1) \oplus (G \otimes F_2)$. Mostriamo che $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$.

Dimostrazione. Prendo risoluzioni libere

$$0 \to K \xrightarrow{i} F \to A \to 0$$

e

$$0 \to H \xrightarrow{i} G \to B \to 0$$

Abbiamo le successioni esatte (perché i gruppi sono liberi)

$$0 \to K \otimes H \to F \otimes H \to A \otimes H \to 0$$

$$0 \to K \otimes G \to F \otimes G \to A \otimes G \to 0$$

mentre dato che che A può non essere libero mi devo fermare a

$$K \otimes B \to F \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & 0 & & \\
0 & K \otimes H & F \otimes H & A \otimes H & 0 \\
0 & K \otimes G & F \otimes G & A \otimes G & 0 \\
 & K \otimes B & F \otimes B & A \otimes B & \\
 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

(manca fine dimostrazione via diagram chasing, guardare appunto Petronio).

□